

**Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет
Національний університет водного господарства та
природокористування**

**Бурчак Ігор Несторович
Козяр Микола Миколайович
Кривцов Валерій Володимирович**

навчальний посібник з дисципліни "Нарисна геометрія,
інженерна та комп'ютерна графіка", розділ **нарисна
геометрія** для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти ЗВО

Handbook (Lectures Notes)
in English from the educational discipline «Descriptive
geometry» for receivers of higher education of the first
(Bachelor) level

З грифом «Рекомендовано
Луцьким національним
технічним університетом»

Луцьк, Рівне 2020

УДК 514.18

Б91

Затверджено Вченою Радою Луцького НТУ, протокол № 10 від 25.06.2020 р.

Затверджено науково-методичною радою Луцького НТУ, протокол № 10 від 23.06.2020 р.

Рекомендовано до друку науково-методичною радою машинобудівного факультету Луцького НТУ, протокол № 8 від 15.04.2020 р.

Укладачі: **проф. І.Н. Бурчак, проф. Козяр М.М., доц. Кривцов В.В.**

Рецензенти:

Доктор архітектури, професор О.В. Лесик – професор кафедри образотворчого мистецтва та дизайну Східноєвропейського національного університету.

Кандидат технічних наук, доцент В.Р.Самостян – доцент кафедри інженерної та комп'ютерної графіки Луцького національного технічного університету

Кандидат технічних наук, доцент Я.Р. Лелик – доцент кафедри образотворчого мистецтва та дизайну Східноєвропейського національного університету.

"Handbook (Lectures Notes) in English from the educational discipline«Descriptive geometry» for receivers of higher education of the first (Bachelor) level": *Навчальний посібник/ І.Н.Бурчак, М.М.Козяр, В.В.Кривцов* – Луцьк: РВВ Луцького НТУ, 2020. – 160 с.

Структура посібника узгоджена з типовою програмою дисципліни «Нарисна геометрія інженерна та комп'ютерна графіка» і є його першим класичним розділом. Особливістю навчального посібника є те, що матеріал, починаючи із змісту викладено одразу двома мовами – українською та англійською.

© І.Н. Бурчак, М.М. Козяр, В.В. Кривцов 2020

**Ministry of Education and Science of Ukraine
Lutsk National Technical University
National University of Water and Environmental
Engineering**

Hanbook (Lectures Notes)

in English from the educational discipline«Descriptive
geometry» for receivers of higher education of the first
(Bachelor) level

Lutsk – Rivne – 2019

Зміст

Розділ 1. Метод проекцій. Проекціювання точки.....	5
1.1. Завдання нарисної геометрії.....	5
1.2. Метод проекцій. Ортогональні проекції.....	5
1.3. Метод Монжа – проекціювання точки на дві ерпендикулярні площини проекцій. Елюр точки.....	7
1.4. Проекціювання точки натри площини проекцій.....	12
1.5. Класифікація точок.....	15
Розділ 2. Проекціювання прямої.....	22
2.1. Проекції прямої. Прямі загального положення.....	22
2.2. Натуральна величина відрізка прямої загального положення. Сліди прямої.....	25
2.3. Прямі часткового положення.....	29
2.4. Взаємне положення двох прямих.....	39
2.5. Проекціювання взаємно перпендикулярних прямих.....	46
Розділ 3. Площина.....	49
3.1. Задання площини на епюрі.....	49
3.2. Площини загального та часткового положення.....	53
3.3. Точка і пряма в площині.....	64
3.4. Головні лінії площини.....	69
Розділ 4. Взаємне положення двох площин, прямої лінії та площини.....	78
4.1. Паралельність ліній та площин.....	78
4.2. Паралельні площини.....	79
4.3. Площини, що перетинаються.....	80
4.4. Перетин лінії та площини.....	82
4.5. Перетин двох відсіків площин загального положення.....	86
4.6. Перпендикулярність прямої та площини, двох площин.....	89
Розділ 5. Способи перетворення проекцій.....	93
5.1. Мета застосування способів перетворення проекцій.....	93
5.2. Спосіб заміни площин проекцій.....	97
5.3. Спосіб плоско-паралельного переміщення.....	105
Розділ 6. Поверхні. Точка на поверхні.....	115
6.1. Багатогранники та їх зображення.....	115
6.2. Криві поверхні та їх зображення.....	118
Розділ 7. Перетин поверхонь з площиною.....	128
7.1. Перетин поверхні багатогранника з площиною.....	128
7.2. Перетин кривої поверхні з площиною.....	133

Розділ 8. Взаємний перетин поверхонь	147
8.1. Побудова лінії перетину поверхонь при проєкціюючому положенні однієї з поверхонь відносно площин проєкцій.....	147
8.2. Побудова лінії перетину поверхонь при їх загальному положенні.....	152
Список використаної та рекомендованої літератури	156

Contents

Chapter 1. Method of projections. Projecting a point	5
1.1. The objective of descriptive geometry.....	5
1.2. Method of projections. Orthogonal projections.....	5
1.3. Monge's method. Projecting a point on two perpendicular planes of projection. Epure of the point.....	7
1.4. Projecting a point on three planes of projections.....	12
1.5. Classification of the points.....	15
Chapter 2. Projecting a straight line	22
2.1. Projections of a straight line. Straight lines of general position...	22
2.2. A true size of general position line segment. Traces of a straight line.....	25
2.3. Lines of partial position.....	29
2.4. Mutual alignment of two straight lines.....	39
2.5. Projecting of mutually perpendicular lines.....	46
Chapter 3. The plane	49
3.1. Determining a plane on the epure.....	49
3.2. Planes of general and partial position.....	53
3.3. The point and the straight line in the plane.....	64
3.4. The main lines of the plane.....	69
Chapter 4. Mutual location of two planes, straight line and plane	78
4.1. Parallel relation between lines and planes.....	78
4.2. Parallel planes.....	79
4.3. Intersecting planes.....	80
4.4. The intersection of a line and a plane.....	82
4.5. The intersection of two limited planes of general position.....	86
4.6. Perpendicularity of the straight line and the plane, two planes.....	89
Chapter 5. Methods of transformation of projections	93
5.1. The purpose of applying methods of transformation of projections.....	93

5.2. Method of replacement of planes of projections.....	97
5.3. Method of flat-parallel movement.....	105
Chapter 6. The point on the surface.....	115
6.1. Polygons and their forms.....	115
6.2. Curved surfaces and their forms.....	118
Chapter 7. Intersection of surfaces with a plane.....	128
7.1. Intersection of a polyhedron surface with a plane.....	128
7.2. Intersection of the curved surface with the plane.....	133
Chapter 8. Mutual intersection of surfaces.....	147
8.1. Construction of a line of intersection of surfaces at the projection position of one of the surfaces relative to planes of projections.....	147
8.2. Construction of a line of intersection of surfaces at their general position.....	152
List of used and recommended literature.....	157

Нарисна геометрія. Розділ 1. Метод проєкцій. Проекціювання точки <u>1.1. Завдання нарисної геометрії</u> Основне завдання нарисної геометрії полягає у визначенні способів зображення просторових об'єктів на площині (аркуші паперу або екрані комп'ютера). Ще одним завданням нарисної геометрії є вивчення способів, що дозволяють уявити форми геометричних об'єктів за їх плоскими зображеннями, тобто опанування правилами читання креслень. В основу нарисної геометрії покладено метод проєкцій. <u>1.2. Метод проєкцій.</u> <u>Ортогональні проєкції</u> Апарат відображення просторових фігур на площині (рис. 1.1) включає об'єкт, що проєкціюється (точка A), площину проєкцій, на яку проєкціюється точка A (на рис. 1.1 це π_1 – горизонтальна площина проєкцій). Третім елементом апарата відображення є спосіб проєкціювання. Застосовуємо спосіб ортогонального або прямокутного проєкціювання. За цим способом для отримання	Descriptive geometry. Chapter 1. Method of projections. Projecting a point. <u>1.1. The objective of descriptive geometry.</u> The main objective of descriptive geometry is to define the methods of description of the spatial figures in the plane (a piece of paper or computer screen). One more objective of descriptive geometry is to study methods that allow us to imagine forms of geometric objects by their two-dimensional image, in other words, to acquire the skills of drawing interpretation. Method of projections is the basis of descriptive geometry. <u>1.2. Method of projections.</u> <u>Orthogonal projections.</u> The framework of objects representation in the plane (Fig. 1.1) includes: an object being projected (point A), a plane of projection in which the point A is projected (in Fig. 1.1 π_1 is the horizontal plane of projection). The third element of the framework is method of projection. We use the method of orthogonal or rectangular projection. According to this method, to obtain the image of the point A in the plane π_1 we should
---	--

зображення точки A на площині π_1 потрібно через точку A (рис. 1.2) провести пряму перпендикулярно до площини проєкцій π_1 . Точка перетину цієї прямої з площиною π_1 (це точка A_1) і буде зображенням точки A на площині π_1 . В нарисній геометрії зображення об'єктів, що отримані описаним чином, називаються проєкціями об'єкта. Отже, точка A_1 – це ортогональна проєкція точки A на площині π_1 . Оскільки площина π_1 розміщена горизонтально, проєкцію A_1 називають горизонтальною проєкцією точки A .

Пряму AA_1 , за допомогою якої знайдено проєкцію A_1 , називають проєкціюючою прямою ($AA_1 \perp \pi_1$, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$).

Якщо точка C належить площині π_1 (рис. 1.3), то її горизонтальна проєкція C_1 збігається з самою точкою C ($C_1 \equiv C$). На рис. 1.3 точкам простору B і D відповідають єдині горизонтальні проєкції B_1 і D_1 . Проте, одній горизонтальній проєкції F_1 відповідає безліч точок простору (F, F', F' і т.д.), що знаходяться на одній проєкціюючій прямій. Відзначимо, що точки, які лежать на одній проєкціюючій прямій, називаються конкуруючими. Точки F, F', F' , що зображені на рис. 1.3, це конкуруючі точки.

draw a straight line through the point A (Fig.1.2) perpendicularly to the plane of projection π_1 . The intersection point of this straight line and the plane π_1 (it is the point A_1) will be the image of the point A in the plane π_1 . In descriptive geometry the images of the objects obtained by the above described method are called the projections of the object.

Thus, the point A_1 is the orthogonal projection of the point A in the plane π_1 . Since the plane π_1 is situated horizontally, the projection A_1 is called the horizontal projection of the point A .

The line AA_1 , which helped to find the projection A_1 , is called project line ($AA_1 \perp \pi_1$, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$).

If the point C belongs to the plane π_1 (Fig. 1.3), then its horizontal projection C_1 will coincide with the point C ($C_1 \equiv C$). In Fig. 1.3 the points of space B and D will have horizontal projections B_1 and D_1 respectively. However, one horizontal projection F_1 corresponds to multiple points of space (F, F', F' etc.) that are situated on the same project line. It should be noted that the points which lie on the same project line are called collinear points. The points F, F', F' shown in Fig. 1.3 are collinear points.

Отже, судити про положення точки в просторі за однією її проекцією неможливо, а креслення з однією проекцією об'єкта є невизначеним, неоднозначним.

1.3. Метод Монжа –
проекціювання точки на дві
перпендикулярні
площини проекцій. Елюр
точки.

Французький вчений Гаспар Монж, засновник нарисної геометрії, запропонував для усунення неоднозначності креслення ортогональне проектування здійснювати не на одну, а на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій.

На рис. 1.4 дано наочне зображення точки А в системі двох площин проекцій π_1 і π_2 . Віднесемо до площин проекцій просторову прямокутну систему координат $Oxyz$, де вісь x збігається з лінією перетину площин проекцій π_1 і π_2 . Точка O – початок координат. Наочне зображення виконано у фронтальній диметрії. Площину π_2 називають фронтальною площиною проекцій. Лінію перетину площин проекцій називають віссю проекцій. Лінія перетину площин π_1 і π_2 – це вісь проекцій x , яка збігається з координатною віссю x ($x = \pi_1 \cap \pi_2$).

Thus, it is impossible to define the location of the point in the space using its one projection only. And the drawing with one projection of the object is believed to be indefinite and ambiguous.

1.3. Monge's method. Projecting a
point on two perpendicular planes of
projection. Epure of the point.

Gaspard Monge, a French scientist and the founder of descriptive geometry, suggested that orthogonal projection should be made not on one but on two mutually perpendicular planes of projection in order to avoid inaccurate drawing.

In Fig. 1.4 a visual image of the point A in the system of two planes of projections π_1 and π_2 is given. Let's consider spatial rectangular system of coordinates $Oxyz$ as the plane of projection, where the axis x coincides with the intersection line of the projection planes π_1 and π_2 . The point O is the beginning of the coordinates. The visual image is made in frontal oblique drawing. The plane π_2 is called the frontal plane of projection. The line where the planes of projection intersect is called the axis of projection. The intersection line of the planes π_1 and π_2 is the axis of projection x , which coincides with the axis of coordinates x ($x = \pi_1 \cap \pi_2$).

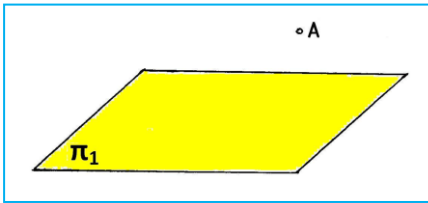


Рис. 1.1. Апарат відображення об'єктів на площині (A – точка простору, що не належить π_1 ; π_1 – горизонтальна площина проєкцій)
 Fig. 1.1. The framework of objects representation in the plane (A is the point of space that doesn't belong to π_1 ; π_1 is the horizontal plane of projections)

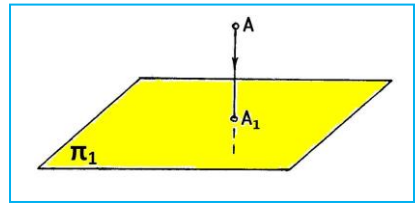


Рис. 1.2. Апарат відображення об'єктів на площині (AA_1 – проєкціююча пряма, $AA_1 \perp \pi_1$; A_1 – горизонтальна проєкція точки A, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$)
 Fig. 1.2. The framework of objects representation in the plane (AA_1 is the project line, $AA_1 \perp \pi_1$; A_1 is the horizontal projection of the point A, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$)

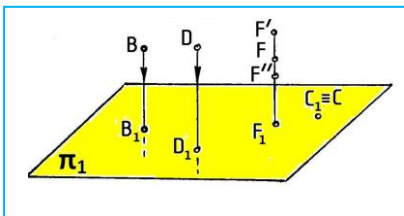


Рис. 1.3. Проекціювання точок на площину проєкцій π_1
 Fig.1.3. Projecting the points on the plane of projections π_1

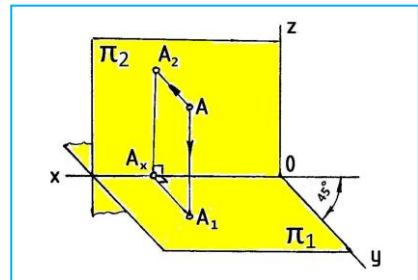


Рис. 1.4. Проекціювання точки на дві площини проєкцій (π_2 – фронтальна площина проєкцій, A_2 – фронтальна проєкція точки A)
 Fig.1.4. Projecting the point on two planes of projections (π_2 is the frontal plane of projections, A_2 is the frontal projection of the point A)

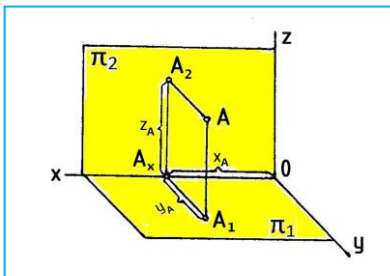


Рис. 1.5. Проекціювання точки на дві площини проєкцій
 Fig. 1.5. Projecting the point on two planes of projections

Фронтальна проекція A_2 визначається таким чином. З точки A проводиться пряма перпендикулярно до площини π_2. Точка перетину цієї прямої з площиною π_2 (це точка A_2) і буде фронтальною проекцією точки A на площині π_2. Дві проекції A' і A'' однозначно вказують на положення точки A відносно системи площин проекцій π_1 і π_2. Положення точки в просторі визначається трьома координатами. На рис. 1.5 показано всі три координати точки A. Таким чином, маючи дві проекції точки, можна визначити її положення в просторі відносно площин проекцій, тобто креслення з двома проекціями, на відміну від креслення з однією проекцією, є визначеним, однозначним. На рис. 1.4, 1.5 отримані проекції точки A на двох взаємно перпендикулярних площинах проекцій π_1 та π_2. Для того, щоб сумістити площини проекцій π_1 і π_2 в одну спільну площину креслення, обертаємо площину π_1 навколо осі x до її суміщення з фронтальною площиною проекцій π_2 в одну спільну площину. Обертання проводиться в напрямку, що вказаний на рис. 1.6. Після суміщення площин отримаємо епюр двох площин проекцій (рис. 1.7) або так, як зображено на рис. 1.8 – без	The frontal projection A_2 can be found in the following way. From the point A we draw a line perpendicularly to the plane π_2. The intersection point of this line and the plane π_2 (it is the point A_2) will be the frontal projection of the point A in the plane π_2. Two projections A' and A'' undoubtedly show the location of the point A in relation to the system of the planes of projections π_1 and π_2. The location of the point in the space is determined by three coordinates. In Fig. 1.5 all three coordinates of the point A are shown. Thus, having two projections of the point you can identify its location in the space in relation to the plane of projection, which means the drawing with two projections is well-defined and unambiguous. In Fig. 1.4, 1.5 we obtained the projections of the point A on two mutually perpendicular planes π_1 and π_2. In order to join the planes of projections π_1 and π_2 in one common plane of drawing, we shall revolve the plane π_1 around the axis x until its alignment with the frontal plane of projection in one common plane is reached. The rotation is made in the direction shown in Fig. 1.6. After alignment of the planes we will obtain the epure of two planes of projection (Fig. 1.7) or, as it is shown in Fig. 1.8, without drawing borders of the planes of projection.
--	--

нанесення обмежень площин проєкцій. Для отримання епюра точки в системі двох площин проєкцій також обертаємо площину π_1, алеразом з розміщеною на ній горизонтальною проєкцією A', до суміщення з площиною π_2 в одну спільну площину креслення (рис. 1.9). Після суміщення отримаємо епюр точки A в системі двох площин проєкцій (рис. 1.10). Епюром називається крес-лення, що отримане при уявному суміщенні площин проєкцій разом із розміщеними на них проєкціями об'єкта в одну спільну площину креслення. На епюрі проєкції точки з'єднані між собою прямою лінією, що називається лінією проєкційного зв'язку. Вона завжди перпендикулярна до осі проєкцій: AA' – вертикальна лінія проєкційного зв'язку, що з'єднує горизонтальну та фронтальну проєкції точки, причому $AA' \perp x$ (рис. 1.10). На епюрі точки A (рис. 1.11) позначено відрізки, які дорівнюють координатам x, y і z точки A. Це дозволяє за епюром, маючи тільки дві проєкції точки, Визначити положення точки y	To obtain the epure of the point in the system of two planes of projections we shall also revolve the plane π_1, but it should be revolved along with the horizontal projection A', located on the plane. It is done until the alignment with the plane π_2 into one common plane of drawing is reached. (Fig.1.9) After the alignment we obtain the epure of the point A in the system of two planes of projections. (Fig.1.10) The epure is a drawing obtained in the process of imaginary alignment of the planes of projection taken along with the projections of the object, located in the planes, into one common plane of the drawing. On the epure the projections of the point are connected with each other by a straight line, which is called the line of the project connection. It is always perpendicular to the axis of projection: AA' is a vertical line of the project connection, which joins horizontal and frontal projection of the point, whilst $AA' \perp x$ (Fig. 1.10). On the epure of the point A (Fig. 1.11) the line segments which are numerically equal to coordinates x, y and z of the point A are marked. This allows us to identify the location of the point in the space against the plane of projection using
---	---

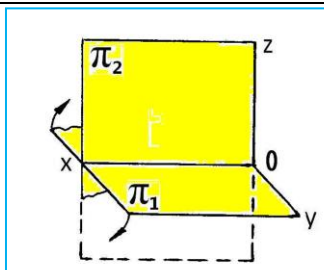


Рис. 1.6. Утворення епюра двох площин проєкцій
Fig.1.6. Constructing the epure of two planes of projections

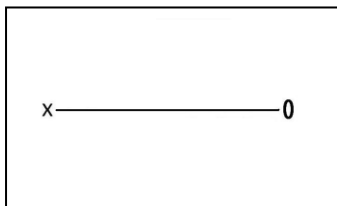


Рис. 1.8. Епюр двох площин проєкцій
Fig. 1.8. The epure of two planes of projections

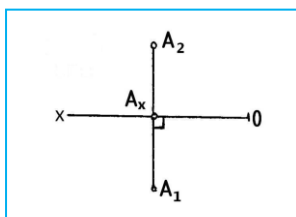


Рис. 1.10. Епюр точки в системі двох площин проєкцій
Fig. 1.8. The epure of the point in the system of two planes of projections

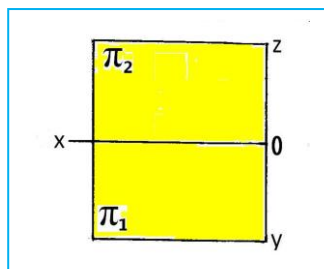


Рис. 1.7. Епюр двох площин проєкцій
Fig. 1.7. The epure of two planes of projections

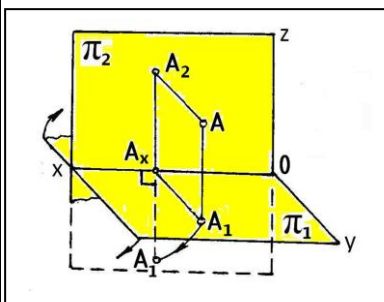


Рис. 1.9. Утворення епюра точки в системі двох площин проєкцій
Fig. 1.9. Constructing the epure of the point in the system of two planes of projections

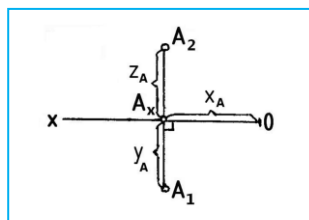


Рис. 1.11. Епюр точки в системі двох площин проєкцій
Fig. 1.11. The epure of the point in the system of two planes of projections

просторі відносно площин проєкцій. Дійсно, відрізок AA_1 (рис. 1.5) дорівнює відстані точки A до площини π_1 , причому $A_1A = A_2A_x$, а, отже, координата z точки A визначає відстань точки A до площини π_1 . Відрізок AA'' (рис. 1.5) дорівнює відстані точки A до площини π_2 , причому $AA_2 = A_1A_x$, а, отже, координата y точки A визначає відстань точки A до площини π_1 .

Таким чином, двом проєкціям точки відповідає єдина точка простору, і креслення з двома проєкціями (зображеннями) є однозначним, визначеним.

1.4. Проєкціювання точки на три площини проєкцій

На рис. 1.12 дано наочне зображення системи трьох площин проєкцій, де π_3 – профільна площина проєкцій, y і z – осі проєкцій ($y = \pi_3 \cap \pi_1$, $z = \pi_3 \cap \pi_2$).

На рис. 1.13 показано проєкції точки A на три площини проєкцій, де A''' – профільна проєкція точки A , а на рис. 1.14 зазначено відрізки, які дорівнюють координатам x , y і z точки A . З рис. 1.14 випливає, що координата x точки A дорівнює відстані точки A до площини π_3 , координата y точки A дорівнює відстані точки A до площини π_2 , а координата z точки A дорівнює відстані точки A до площини π_1 .

the epure and having only two points of projection. Indeed, the segment AA_1 (Fig. 1.5) equals the distance of the point A to the plane π_1 , whilst $A_1A = A_2A_x$, thus, the coordinate z of the point A defines the distance of the point A to the plane π_1 . The segment AA'' (Fig. 1.5) equals the distance of the point A to the plane π_2 , whilst $AA_2 = A_1A_x$, thus, the coordinate y of the point A defines the distance of the point A to the plane π_1 .

Consequently, a single point of space corresponds to two projections. Therefore, the drawing with two projections (images) is unambiguous and well-defined.

1.4. Projecting a point on three planes of projections.

In Fig. 1.12 a visual image of three planes of projections system is given. Here, π_3 is a cross plane of projection, y and z are axes of projections ($y = \pi_3 \cap \pi_1$, $z = \pi_3 \cap \pi_2$).

In Figure 1.13 the projections of the point A on three planes of projections are shown, where, A''' is a cross projection of the point A , and in Fig. 1.14 the segments that equal coordinates x , y and z of the point A are shown. From the Fig. 1.14 we can conclude that the coordinate x of the point A equals the distance of the point A to the plane π_3 , the coordinate y of the point A equals the distance of the point A to the plane π_2 , and the

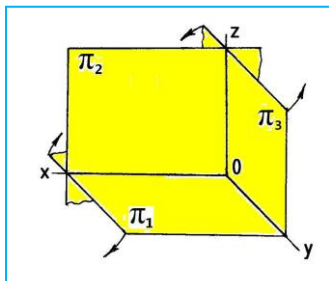


Рис. 1.12. Просторова система трьох площин проєкцій (π_3 – профільна площина проєкцій) та утворення епюра трьох площин проєкцій

Fig.1.12. Spatial system of three planes of projection (π_3 is the cross plane of projections)

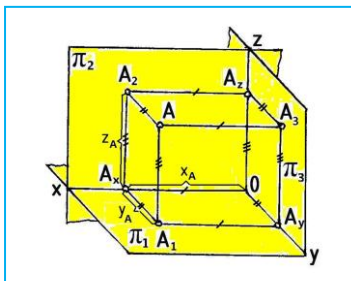


Рис. 1.14.Проекціювання точки на три площини проєкцій

Fig.1.14. Projecting the point on three planes of projections

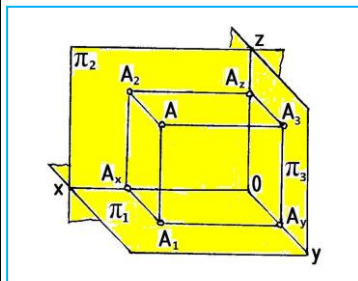


Рис. 1.13.Проекціювання точки на три площини проєкцій (A_3 – профільна проєкція точки A)

Fig. 1.13. Projecting the point on three planes of projections (A_3 is the cross projection of the point A)

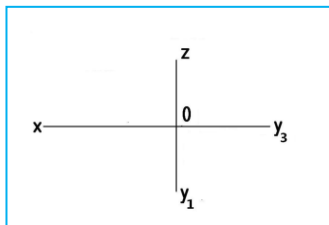


Рис. 1.15.Епюр системи трьох площин проєкцій

Fig. 1.15.The epure of the system of three planes of projections

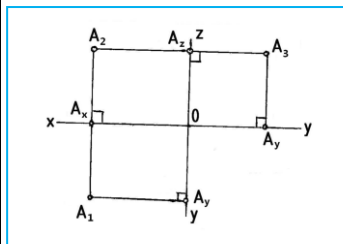


Рис. 1.16. Епюр точки в системі трьох площин проєкцій

Fig. 1.16.The epure of the point in the system of three planes of projections

Утворення епіюра системи трьох площин проєкцій досягається таким чином (рис. 1.12). Площина π_2 залишається нерухомою, обертанням навколо осей x і z з нею суміщаються площини π_1 і π_3. Для того, щоб площини π_1 і π_3 могли обертатися, їх умовно роз'єднують, розрізаючи площини по осі y. На рис. 1.15 дано епіюр системи трьох площин проєкцій. При утворенні епіюра вісь y розпалася на два променя: один промінь (y_1) залишився на площині π_1, а другий промінь (y_3) – на площині π_3. На рис. 1.16 дано епіюр точки A в системі трьох площин проєкцій, який утворений в результаті суміщення площин проєкцій в одну спільну площину креслення. Проекції A_1 і A_2 розміщені на вертикальній лінії проєкційного зв'язку ($A_1A_2 \perp x$), проєкції A_2 і A_3 – на горизонтальній лінії проєкційного зв'язку ($A_2A_3 \perp z$), а проєкції A' і A''' – на горизонтально-вертикальній лінії проєкційного зв'язку ($A_1A_y \cup A_3A_y \perp y$), яка розпалася на два відрізки A_1A_y і A_3A_y, оскільки на два променя y_1 і y_3 розпалася при суміщенні площин проєкцій і сама вісь проєкції y. На рис. 1.17 зазначено відрізки,	coordinate z of the point A equals the distance of the point A to the plane π_1. The construction of the epure of three planes of projection system is obtained in the following way (Fig. 1.12). The plane π_2 stays fixed; it is aligned with the planes π_1 and π_3 by revolving around the axes x and z. To be able to revolve, the planes π_1 and π_3 are figuratively divided, being cut along the axis y. In Fig. 1.15 the epure of three planes of projections system is given. In the formation of the epure the axis y has been divided into two rays: one ray (y_1) is left in the plane π_1, and another ray (y_3) is in the plane π_3. In Fig. 1.16 the epure of the point A in three planes of projection system is given. It is formed in the result of the planes of projection alignment into one common plane of the drawing. The projections A_1 and A_2 are located on the vertical line of the project connection ($A_1A_2 \perp x$); the projections A_2 and A_3 are located on the horizontal line of the project connection ($A_2A_3 \perp z$); and the projections A' and A''' are on the horizontal and vertical line of the project connection ($A_1A_y \cup A_3A_y \perp y$), which has been cut into two segments A_1A_y and A_3A_y, since the axis of projection y, itself, has also been cut into two rays y_1 and y_3 while the alignment of the planes of the projection.
--	---

які дорівнюють координатам x , y і z точки A , що дозволяє, вибравши величину одиниці масштабу, побудувати проекції точки, тобто епюр точки, за заданими чисельними значеннями її координат.

На рис.1.18-1.20 побудований епюр точки B за її координатами: $B(40,20,30)$.

Третю проекцію (профільну B_3) за двома заданими проекціями B_1 і B_2 точки B можна побудувати координатним або проекційним способами (рис.1.21 - 1.23).

На рис. 1.24 дано епюр точки B в системі трьох площин проекцій.

1.5. Класифікація точок

Точки ділять на точки простору, що не належать площинам проекцій, і точки, що належать площинам проекцій.

На рис. 1.25 дано наочне зображення точки C , що належить площині проекцій π_1 . Координата z цієї точки дорівнює нулю, оскільки точка лежить на площині π_1 . На рис. 1.26 дано епюр точки C , що належить площині π_1 .

На рис. 1.27 дано наочне зображення точки D , що належить площині проекцій π_2 . Координата y цієї точки дорівнює нулю, оскільки точка лежить на площині π_2 . На рис. 1.28 дано епюр точки

In Figure 1.17 we can see the segments which are equal to the coordinates x , y and z of the point A . This allows us, having chosen scale unit value, to design the projection of the point, i.e. the epure of the point, using given numerical values of its coordinates.

In Fig. 1.18 – 1.20 we can see the epure of the point B drawn by its coordinates: $B(40,20,30)$.

The third projection (the cross projection B_3) can be drawn by coordinate or project methods (Fig. 1.21 – 1.23), two projections B_1 and B_2 of the point B being given.

In Figure 1.24 the epure of the point B in three planes of projections system is shown.

1.5. Classification of the points

The points are classified into points of space, that don't belong to the planes of projections, and points that belong to the planes of projections.

In Fig. 1.25 a visual image of the point C that belongs to the plane of projection π_1 is given. The coordinate z of this point is equal to zero, since the point lies in the plane π_1 . In Fig. 1.26 the epure of the point C that belongs to the plane π_1 is given.

In Fig. 1.27 a visual image of the point D that belongs to the plane of projection is given π_2 . The coordinate y of this point equals zero since this point lies in the plane π_2 . In Fig.1.28 the epure of the point D that belongs to the plane π_2 is

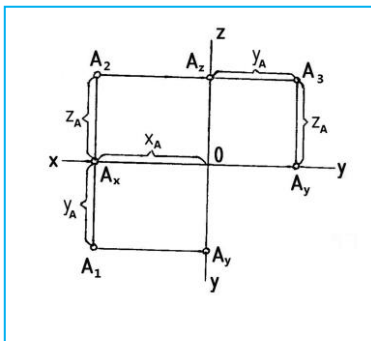


Рис. 1.17. Епюр точки в системі трьох площин проєкцій

Fig. 1.17. The epure of the point in the system of three planes of projections

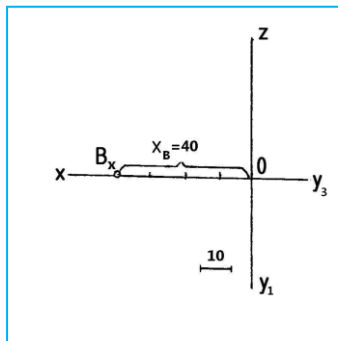


Рис. 1.18. Побудова епюра точки В за її координатами (1 дія)

Fig. 1.18. Constructing the epure of the point B by its coordinates (step 1)

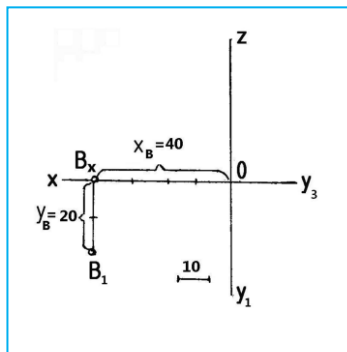


Рис. 1.19. Побудова епюра точки В за її координатами (2 дія)

Fig. 1.19. Constructing the epure of the point B by its coordinates (step 2)

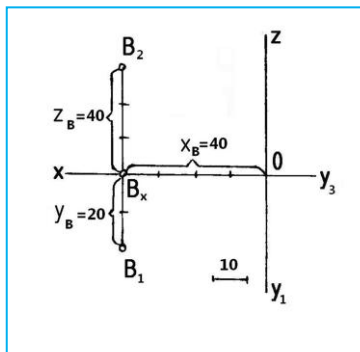


Рис. 1.20. Побудова епюра точки В за її координатами (3 дія)

Fig. 1.20. Constructing the epure of the point B by its coordinates (step 3)

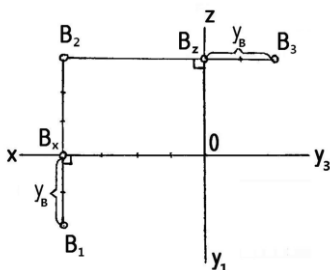


Рис. 1.21. Побудова профільної проекції точки В координатним способом

Fig. 1.21. Constructing cross projection of the point B by coordinate method

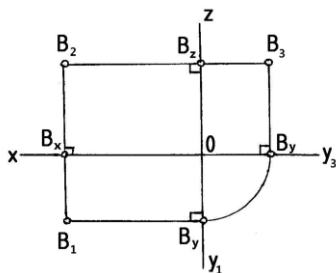


Рис. 1.22. Побудова профільної проекції точки В проєкційним способом (за допомогою дуги)

Fig. 1.22. Constructing cross projection of the point B by project method (by means of arc)

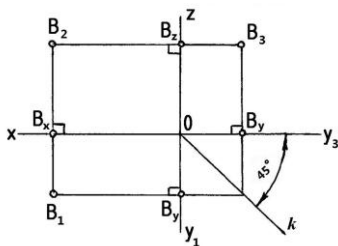


Рис. 1.23. Побудова профільної проекції точки В проєкційним способом (за допомогою сталої прямої креслення)

Fig. 1.23. Constructing cross projection of the point B by project method (by means of the fixed line of the drawing)

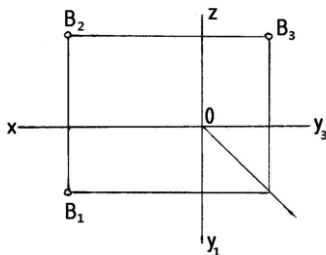


Рис. 1.24. Епюр точки в системі трьох площин проєкцій

Fig. 1.24. The epure of the point in the system of three planes of projections

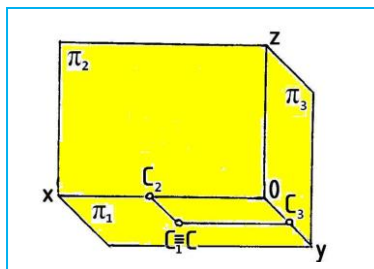


Рис. 1.25. Наочне зображення точки C та її проєкцій ($C \in \pi_1, z_C = 0$)
 Fig. 1.25. A visual image of the point C and its projections ($C \in \pi_1, z_C = 0$)

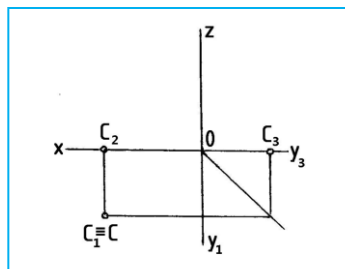


Рис. 1.26. Епюр точки C ($C \in \pi_1, z_C = 0$)
 Fig. 1.26. The epure of the point C ($C \in \pi_1, z_C = 0$)

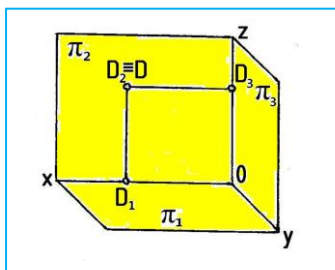


Рис. 1.27. Наочне зображення точки D та її проєкцій ($D \in \pi_2, y_D = 0$)
 Fig. 1.27. A visual image of the point D and its projections ($D \in \pi_2, y_D = 0$)

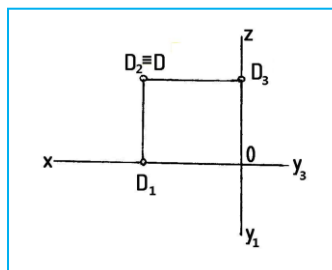


Рис. 1.28. Епюр точки D ($D \in \pi_2, y_D = 0$)
 Fig. 1.28. The epure of the point D ($D \in \pi_2, y_D = 0$)

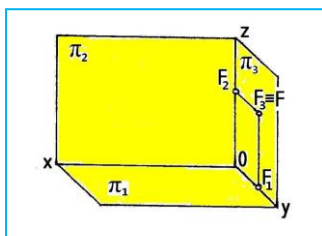


Рис. 1.29. Наочне зображення точки F та її проєкцій ($F \in \pi_3, x_F = 0$)
 Fig. 1.29. A visual image F and its projections ($F \in \pi_3, x_F = 0$)

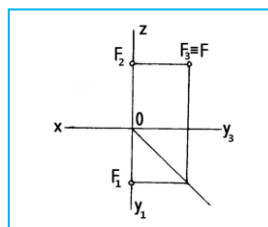


Рис. 1.30. Епюр точки F ($F \in \pi_3, x_F = 0$)
 Fig. 1.30. The epure of the point F ($F \in \pi_3, x_F = 0$)

D, що належить площині π_2 .

На рис. 1.29 дано наочне зображення точки F, що належить площині проєкцій π_3 . Координата z цієї точки дорівнює нулю, оскільки точка лежить на площині π_3 . На рис. 1.30 дано епюр точки F, що належить площині π_3 .

Таким чином, у точки, що належить одній площині проєкцій, дві проєкції знаходяться на осях проєкцій, а третя збігається з самою точкою.

У точки, що належить одній площині проєкцій, одна координата дорівнює нулю; це саме та, яка вказує на віддаленість точки до тієї площини проєкцій, де знаходиться дана точка.

Розглянемо точки, які лежать на осях проєкцій, а, отже, належать двом площинам проєкцій водночас.

На рис. 1.31 дано наочне зображення точки E, яка лежить на осі x , тобто належить двом площинам проєкцій π_1 і π_2 водночас ($x=\pi_2 \cap \pi_1$). У цієї точки координати y і z дорівнюють нулю. Оскільки точка належить і площині π_1 , і площині π_2 , то горизонтальна E_1 і фронтальна E_2 проєкції точки E збігаються між собою і з самою точкою. На рис. 1.32 дано епюр точки E, що лежить на осі проєкцій x .

given.

In Fig.1.29 a visual image of the point F that belongs to the plane of projection π_3 is given. The coordinate z of this point equals zero since this point lies in the plane π_3 . In Fig. 1.30 the epure of the point F that belongs to the plane π_3 is given.

Consequently, the point that belongs to one plane of projection has two projections located on the axes of projections, and the third one coincides with the point itself.

The point that belongs to one plane of projection has one coordinate equal to zero; it is the one that indicates the distance of the point to the plane of projections where the given point is located.

Let's look at the points that lie on the axes of projections, thus, belong to two planes of projections simultaneously.

In Fig. 1.31 a visual image of the point E that lies on the axis x , thus belongs to two planes of projection π_1 and π_2 simultaneously ($x=\pi_2 \cap \pi_1$) is given. This point has coordinates y and z that are equal to zero. Since the point belongs to both planes π_1 and π_2 , then the horizontal E_1 and frontal E_2 projections of the point E coincide with each other and with the point itself. In Fig. 1.32 the epure of the point E that lies on the axis of projection x is given.

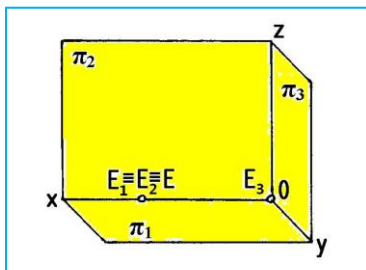


Рис. 1.31. Наочне зображення точки E та її проєкцій ($E \ x$)
 Fig. 1.31. A visual image of the point E and its projections ($E \ x$)

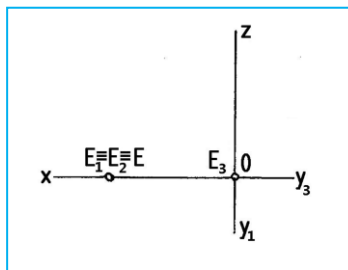


Рис. 1.32. Епюр точки E ($E \ x$)
 Fig. 1.32. The epure of the point E ($E \ x$)

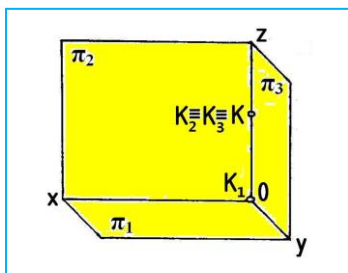


Рис. 1.33. Наочне зображення точки K та її проєкцій ($E \ z$)
 Fig. 1.33. A visual image of the point K and its projections ($E \ z$)

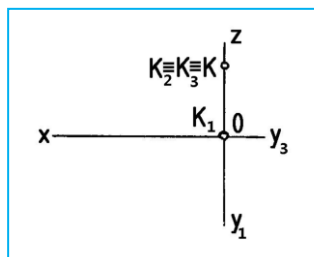


Рис. 1.34. Епюр точки K ($K \ z$)
 Fig. 1.34. The epure of the point K ($K \ z$)

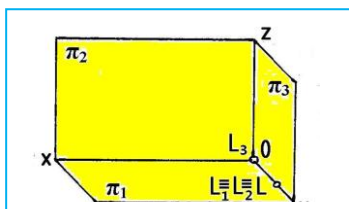


Рис. 1.35. Наочне зображення точки L та її проєкцій ($L \ y$)
 Fig. 1.35. A visual image of the point L and its projections ($L \ y$)

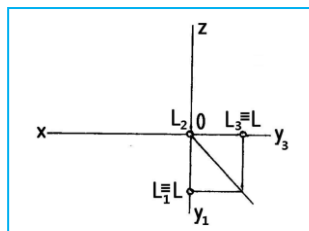


Рис. 1.36. Епюр точки L ($L \ y$)
 Fig. 1.36. The epure of the point L ($L \ y$)

На рис. 1.33 дано наочне зображення точки K, яка лежить на осі z , тобто належить двом площинам проєкцій π_2 і π_3 водночас ($z = \pi_2 \cap \pi_3$). У цієї точки координати x і y дорівнюють нулю. Оскільки точка належить і площині π_2 , і площині π_3 , то фронтальна K_2 і профільна K_3 проєкції точки K збігаються між собою і з самою точкою. На рис. 1.34 дано епюр точки K, що лежить на осі проєкцій z .

На рис. 1.35 дано наочне зображення точки L, яка лежить на осі y , тобто належить двом площинам проєкцій π_1 і π_3 водночас ($y = \pi_1 \cap \pi_3$). У цієї точки координати x і z дорівнюють нулю. Оскільки точка належить і площині π_1 , і площині π_3 , то горизонтальна L_1 і профільна L_3 проєкції точки L збігаються між собою і з самою точкою. На рис. 1.36 дано епюр точки L, що лежить на осі проєкцій y .

Таким чином, у точок, що лежать на осях проєкцій, тобто належать двом площинам проєкцій водночас, дві координати дорівнюють нулю; це саме ті, які вказують на віддаленість точок від тих площин проєкцій, на яких водночас лежать ці точки, при цьому дві з трьох проєкцій даних точок збігаються між собою і з самою точкою.

In Fig. 1.33 a visual image of the point K that lies on the axis z , thus, belongs to two planes of projection π_2 and π_3 simultaneously ($z = \pi_2 \cap \pi_3$) is given. This point has coordinates x and y that are equal to zero. Since the point belongs to the plane π_2 as well as to the plane π_3 , then the frontal K_2 and the cross K_3 projections of the point K coincide with each other and with the point itself. In Fig. 1.34 the epure of the point K that belongs to the axis of projection z is given.

In Fig. 1.35 a visual image of the point L that lies on the axis y thus belongs to two planes of projections π_1 and π_3 simultaneously ($y = \pi_1 \cap \pi_3$) is given. This point has coordinates x and z that are equal to zero. Since the point belongs to the plane π_1 as well as to the plane π_3 , then the horizontal L_1 and the cross L_3 projections of the point L coincide with each other and with the point itself. In Fig. 1.36 the epure of the point L that lies on the axis of projection y is given.

Consequently, the points that lie on the axes of projections, thus, belong to two planes of projections simultaneously, have two coordinates that are equal to zero; they are the ones that indicate the distance of the points from those planes of projections in which these points lie simultaneously, whilst two of three projections of the given points coincide with each other and with the point itself.

Нарисна геометрія. Розділ 2. Проекціювання прямої <u>2.1. Проекції прямої. Прямі загального положення</u> Пряма – найкоротша відстань між двома точками. Проекцією прямої лінії в загальному випадку є також пряма лінія. Так, на рис. 2.1 дано наочне зображення прямої l і її проєкцій – горизонтальної l_1 та фронтальної l_2 – в системі двох площин проєкцій π_1 і π_2. На рис. 2.2 дано епюр прямої l у вигляді прямих ліній – проєкцій l' і l''. Якщо пряма зображена прямими лініями, то вона сама і її проєкції позначаються малими літерами латинського алфавіту – l, b, k тощо. Пряма в просторі може бути визначена двома нетотожними точками. На рис. 2.3 дано наочне зображення прямої, що проходить через точки A і B простору. Отримавши горизонтальні (A_1, B_1) та фронтальні (A_2, B_2) проєкції цих точок та провівши пряму через точки A_1 і B_1, дістанемо горизонтальну проєкцію A_1B_1 прямої AB, а провівши пряму через точки A_2 і B_2, – фронтальну проєкцію A_2B_2 прямої AB. На рис. 2.4 дано епюр прямої AB. Якщо пряма визначена двома	Descriptive geometry. Chapter 2. Projecting a straight line <u>2.1. Projections of a straight line. Straight lines of general position.</u> A straight line is the shortest distance between two points. The projection of a straight line is, in general, also a straight line. Thus, in Fig. 2.1 a visual image of the straight line l is given as well as its projections: the horizontal l_1 and the frontal l_2 in the system of two planes of projections π_1 and π_2. In Fig. 2.2 the epure of the straight line l is given in the form of straight lines i.e. projections l' and l''. If the line is represented by the straight lines, then the line itself and its projections are marked by lower case Latin letters, such as l, b, k etc. The straight line in space can be determined by two non-identical points. In Fig. 2.3 a visual image of a straight line crossing the points of space A and B is given. Having received the horizontal (A_1, B_1) and the frontal (A_2, B_2) projections of these points and having drawn the straight line through the points A_1 and B_1, we shall obtain the horizontal projection A_1B_1 of the line AB, and having drawn the straight line through the points A_2 and B_2, we shall obtain the frontal projection A_2B_2 of the line AB. In Fig. 2.4 the epure of the straight line AB is given. If the line
---	--

нетотожними точками, то вона і її проекції позначаються великими літерами латинського алфавіту за назвою двох її точок – AB, CD і т.д. Таким чином, пряму лінію на епюрі зображують: 1) прямими лініями – її проекціями (рис. 2.2); 2) проекціями двох її нетотожних точок (рис. 2.4). Залежно від розміщення прямих відносно площин проекцій розрізняють прямі загального положення, прямі рівня та проєкціюючі прямі. Прямі загального положення – це прямі, які не паралельні і не перпендикулярні до жодної з площин проекцій. На епюрі у прямих загального положення проекції не паралельні і не перпендикулярні до осі проекцій x. Це характерна графічна ознака епюрів прямих загального положення, яка дозволяє відрізнити епюри прямих загального положення від епюрів прямих рівня та проєкціюючих прямих. На рис. 2.2 і 2.4 зображено епюри прямих загального положення, оскільки l_1, A_1B_1 і l_2, A_2B_2 не паралельні і не перпендикулярні до осі проекцій x. З означення прямої загального положення випливає, що координати x, як і координати y	is determined by two non-identical points, then the line and its projections are marked by upper case Latin letters by the name of its two points, such as AB, CD, etc. Consequently, on the epure the straight line is given: 1) by the straight lines, i.e. its projections (Fig. 2.2); 2) by the projections of its two non-identical points (Fig. 2.4). There are straight lines in general position, level lines and project lines, depending on the location of lines in the planes of projection. The straight lines of general position are the lines which are neither parallel to each other nor perpendicular to any plane of projection. On the epure the straight lines of general position have projections which are neither parallel nor perpendicular to the axis of projections x. It is a graphical attribute of the epures of general position straight lines. It allows us to differentiate the epures of straight lines of general position from level lines and project lines. In Fig. 2.2 and 2.4 the epures of straight lines of general position are shown, since l_1, A_1B_1 and l_2, A_2B_2 are neither parallel and nor perpendicular to the axis of projection x. The definition of the straight line of general position indicates that the x coordinate as well as the y and
--	---

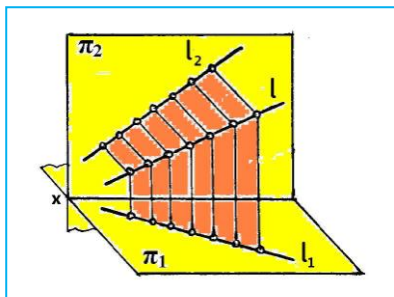


Рис. 2.1. Зображення прямої l у вигляді прямих ліній – її проєкції
Fig. 2.1. A visual image of the line l in the form of straight lines, i.e. its projections

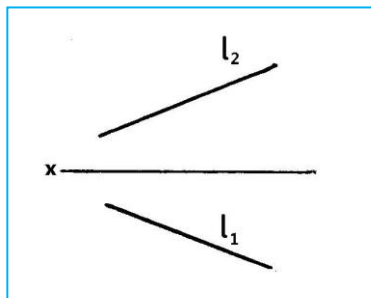


Рис. 2.2. Епюр прямої l
Fig. 2.2. The epure of the straight line l

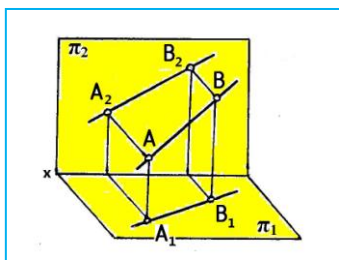


Рис. 2.3. Зображення прямої AB у вигляді проєкцій двох її нетотожних точок

Fig. 2.3. A visual image of the line AB in the form of its two non-identical points projections

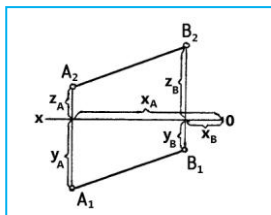


Рис. 2.5. Епюр прямої AB із зазначеними координатами точок A і B

Fig. 2.5. The epure of the straight line AB with the given coordinates of the points A and B

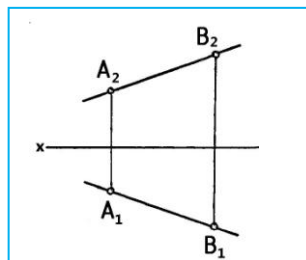


Рис. 2.4. Епюр прямої AB
Fig. 2.4. The epure of the straight line AB

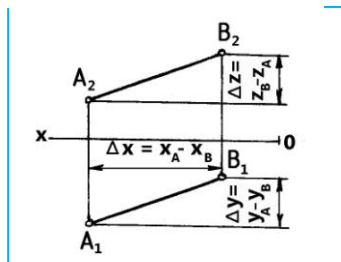


Рис. 2.6. Епюр прямої AB із зазначеними різницями координат точок A і B

Fig. 2.6. The epure of the straight line AB with the given difference between coordinates of the points A and B

та z , двох будь-яких нетотожних точок цієї прямої мають різні числові значення (рис.2.5). Лише прямій загального положення властиве те, що різниці всіх трьох координат двох її нетотожних точок прямої не дорівнюють нулю (рис.2.6).

Зазначимо проєкційні властивості та координатні характеристики прямої загального положення:

1) на епюрі проєкції прямої не паралельні і не перпендикулярні осям проєкцій – це характерна графічна ознака, що властива лише прямій загального положення;

2) кожна проєкція відрізка прямої коротша за натуральну величину самого відрізка, оскільки пряма не паралельна до жодної з площин проєкцій;

3) різниці координат x , y , z двох нетотожних точок прямої не дорівнюють нулю.

2.2. Натуральна величина відрізка прямої загального положення.

Сліди прямої

Оскільки проєкції відрізка прямої загального положення коротші за натуральну величину самого відрізка, визначити дійсну величину відрізка безпосередньо за епюром неможливо. Проте існує спосіб, який називається

the z , coordinates of two any non-identical points of this line have different numerical values. (Fig.2.5). Only a straight line of general position is characterized by the fact that the difference between all three coordinates of its two non-identical points of the line is not equal to zero. (Fig. 2.6).

Let's sum up project attributes and coordinate characteristics of a straight line of general position:

1) on the epure the projections of the line are neither parallel nor perpendicular to the axes of projections. It is a graphical characteristic of a straight line of general position only;

2) every projection of the line segment is shorter than its true size of the segment itself, since the line is not parallel to any plane of projections;

3) the difference between the x , y and the z coordinates of two non-identical points of the straight line is not equal to zero.

2.2. A true size of general position line segment. Traces of a straight line.

Since the projections of general position line segment are shorter than a true size of the segment itself, it is impossible to define its true size by the epure. However, there is a method, called the method of the right triangle, which allows us to

способом прямокутного трикутника, що дозволяє, виконавши деякі графічні побудови, визначити натуральну величину відрізка прямої загального положення. На рис. 2.7 дано наочне зображення відрізка АВ прямої загального положення та його проєкцій – горизонтальної A_1B_1 та фронтальної A_2B_2. Кут α – це кут нахилу прямої АВ, що проходить через відрізок АВ до горизонтальної площини проєкцій π_1. Він визначається як кут між самою прямою та її горизонтальною проєкцією. На рис. 2.7 також показано визначення натуральної величини відрізка прямої АВ та кута α її нахилу до площини проєкцій π_1, а на рис. 2.8 – знаходження цих величин на епюрі. На рис. 2.9 показано визначення натуральної величини відрізка АВ прямої загального положення та кута β її нахилу до площини проєкцій π_2, а на рис. 2.10 – побудова цих величин на епюрі. ВИСНОВКИ Натуральна величина відрізка прямої загального положення визначається гіпотенузою прямокутного трикутника, у якого один з катетів – проєкція відрізка прямої на одну з площин проєкцій, а другий катет дорівнює	determine a true size of general position line segment after drawing some graphs. In Fig. 2.7 a visual image of the segment АВ of a straight line of general position is given, as well as the segment's projections: the horizontal A_1B_1 and the frontal A_2B_2. The angle α is the angle of slope of the line that cuts the segment АВ to the horizontal plane of projection π_1. It is determined as the angle between the line itself and its horizontal projection. Fig. 2.7 also shows the determination of the true size of АВ line segment as well as the angle α of its slope to the plane of projection π_1, and Fig.2.8 shows the location of these values on the epure. Fig.2.9 shows the determination of a full size of the segment АВ of the line of general position and the angle β of its slope to the plane of projection π_2, and Fig. 2.10 shows the location of these values on epure. CONCLUSIONS The true size of the segment of general position line is defined by the hypotenuse of the right triangle. One of the legs of this triangle is the projection of the line segment in one of the planes of projection and the other leg is equal to
--	---

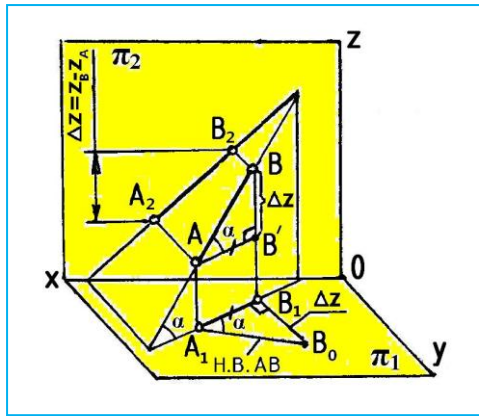


Рис. 2.7. Визначення на наочному зображенні натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу α прямої до площини проєкцій π_1
 Fig. 2.7. Determination of the true size of AB line segment of general position and the angle slope α of the line to the plane of projection π_1 on the visual image

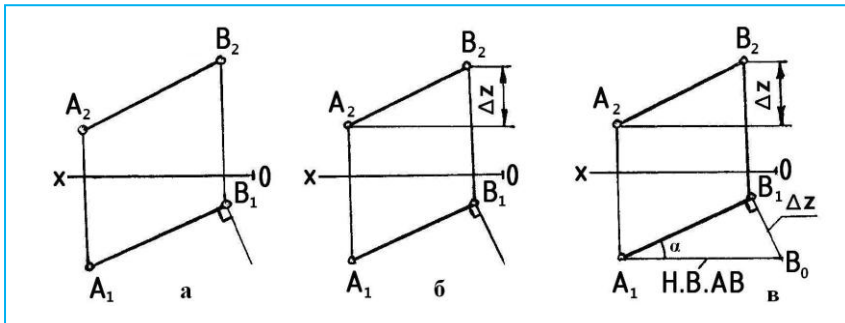


Рис. 2.8. Визначення на епюрі натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу α прямої до площини проєкцій π_1 (а - 1 дія, б - 2 дія, в - 3 дія)

Fig. 2.8. Determination of the true size of AB line segment of general position and the angle slope α of the line to the plane of projection π_1 (a - step 1, б - step 2, в - step 3) on the epure

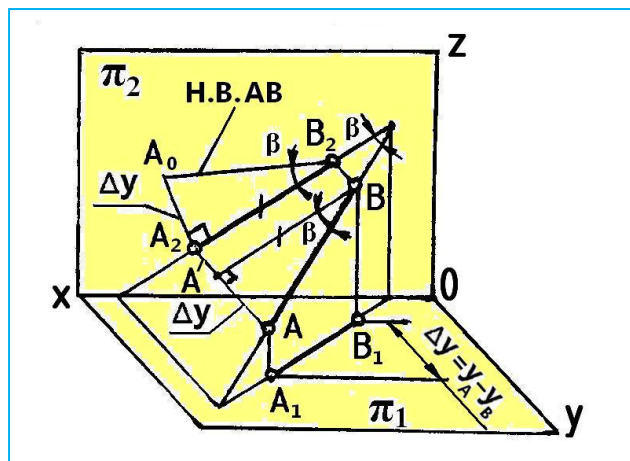


Рис. 2.9. Визначення на наочному зображенні натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу β прямої до площини проєкцій π_2

Fig. 29. Determination of the true size of AB line segment of general position and the angle slope β of the line to the plane of projection π_2 on the visual image

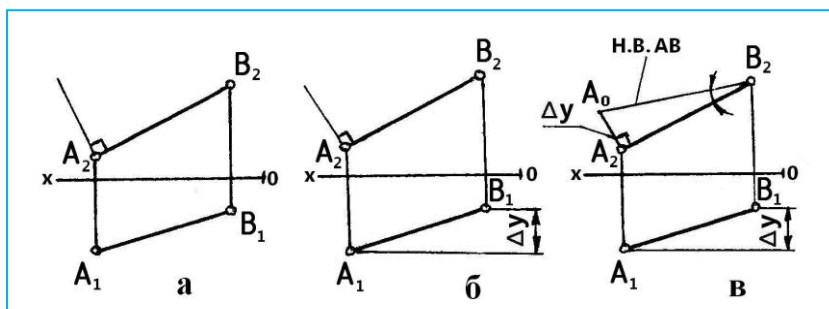


Рис. 2.10. Визначення на епюрі натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу β прямої до площини проєкцій π_2 (а - 1 дія, б - 2 дія, в - 3 дія)

Fig. 2.10. Determination of the true size of AB line segment of general position and the angle slope β of the line to the plane of projection π_2 (а - step 1, б - step 2, в - step 3) on the epure

різниці відстаней точок – кінців відрізка прямої – до тієї площини проєкцій, на якій побудований прямокутний трикутник. Із цього прямокутного трикутника визначають кут нахилу прямої до тієї площини проєкцій, на якій побудований прямокутний трикутник. Цей кут дорівнює куту між гіпотенузою та катетом – проєкцією. <u>Слідом прямої лінії</u> називається точка перетину прямої з площиною проєкцій. На рис. 2.11 точка М – точка перетину прямої АВ з горизонтальною площиною проєкцій π_1, а точка N – точка перетину прямої АВ з фронтальною площиною проєкцій π_2. Ці точки мають такі назви: - точка М – горизонтальний слід прямої (точка перетину прямої з площиною π_1); - точка N фронтальний слід прямої (точка перетину прямої з площиною π_2). На рис. 2.12 і 2.13 показано послідовність побудови слідів прямої відповідно на наочному зображенні та епюрі. <u>2.3. Прямі часткового положення</u> Прямі часткового положення – це прямі рівня та проєкціуючі прямі.	the difference of the points distance, i.e. the ends of the line segments, to that plane of projections in which the right angle is drawn. From this right angle we find the angle slope of the line to that plane of projections in which the right triangle is drawn. This angle is equal to the angle between the hypotenuse and the leg of the right triangle – projection. <u>The trace of the straight line</u> is the intersection point of the line and the plane of projections. In Fig. 2.11 the point M is the intersection point of the line AB and the horizontal plane of projection π_1, the point N is the intersection point of the line AB and the frontal plane of projection π_2. These points are called: - the point M is the horizontal trace of the line (the point of intersection of the line and plane π_1); - the point N is the frontal trace of the line (the point of intersection of the line and plane π_2). In Fig. 2.12 and 2.13 the construction sequence of the line traces is shown with respect to the visual image and the epure. <u>2.3. Lines of partial position.</u> The lines of partial position are the level lines and the project lines.
--	--

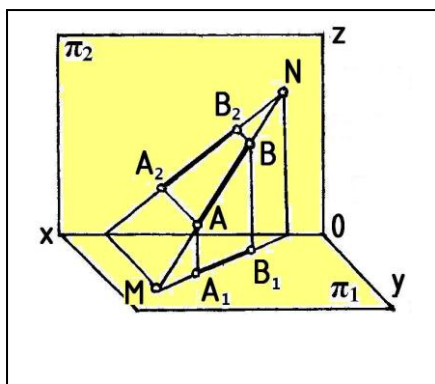


Рис. 2.11. Сліди прямої AB
(M – горизонтальний слід
прямої, $M = AB \cap \pi_1$;
N – фронтальний слід прямої,
 $N = AB \cap \pi_2$)

Fig. 2.11. The traces of the straight
line AB (M is the horizontal trace
of the line, $M = AB \cap \pi_1$; N is
the frontal trace of the line,
 $N = AB \cap \pi_2$)

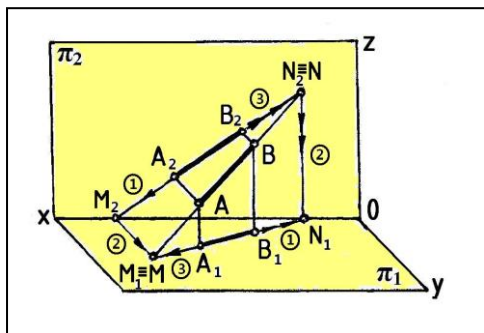


Рис.2.12. Послідовність
побудови слідів прямої

Fig. 2.12. The construction
sequence of the line traces

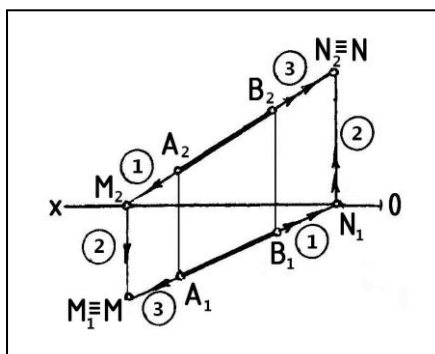


Рис.2.13. Послідовність
побудови слідів прямої на
епюрі

Fig. 2.13. The construction
sequence of the line traces on the
epure

Прямими рівня називають прямі, які паралельні до однієї з площин проєкцій, а проєкціюючими – прямі, які перпендикулярні до однієї з площин проєкцій. Слід зазначити, що проєкціюючі прямі, які перпендикулярні до однієї з площин проєкцій, паралельні водночас до двох інших площин проєкцій. Тобто, прямі часткового положення паралельні до однієї (прямі рівня) або до двох площин проєкцій (проєкціюючі прямі). Розглянемо прямі часткового положення в системі двох площин проєкцій. <u>Прямі рівня</u> 2.3.1. Пряма рівня, яка паралельна до горизонтальної площини проєкцій, називається горизонтальною прямою або горизонталлю і позначається буквою h. На рис.2.14 – 2.17 дано наочне зображення та епюр горизонтальної прямої АВ. Горизонтальна пряма має такі проєкційні властивості та координатні характеристики: 1) фронтальна проєкція паралельна до осі x. Це характерна графічна ознака, яка притаманна саме цій прямій (на рис. 2.14 -2.17 $A_2B_2 // x$);	The level lines are the lines that are parallel to one of the planes of projections, and the project lines are the lines that are perpendicular to one of the planes of projection. It should be noted that the project lines which are perpendicular to one of the planes of projections, are, at the same time, parallel to two other planes of projections. Thus, the lines in partial position are parallel either to one (level lines) or to two planes of projections (project lines). Let us now consider the lines of partial position in the system of two planes of projections. <u>Level lines</u> 2.3.1. The level line, which is parallel to horizontal plane of projection, is called a horizontal line or the horizontal and it is marked by the letter h. In Fig. 2.14 – 2.17 a visual image and the epure of the horizontal line AB is given. The horizontal line has the following attributes and coordinate characteristics: 1) the frontal projection is parallel to the axis x. It is a graphical attribute of this particular line (Fig. 2.14 – 2.17 $A_2B_2 // x$); 2) the coordinate z of all points
--	--

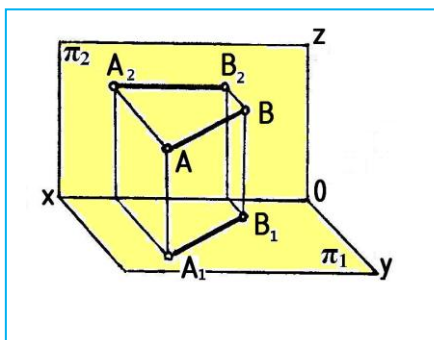


Рис. 2.14. Наочне зображення
горизонтальної прямої
AB ($AB \parallel \pi_1, A_2B_2 \parallel x$)

Fig. 2.14. A visual image of the horizontal
line AB ($AB \parallel \pi_1, A_1B_1 \parallel x$)

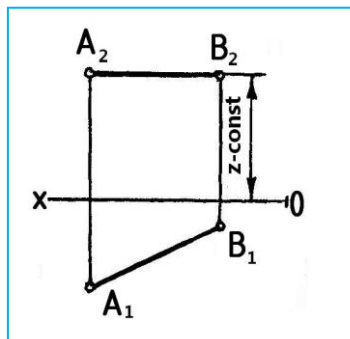


Рис. 2.15. Епюр
горизонтальної прямої AB

Fig. 2.15. The epure of the
horizontal line AB ($A_2B_2 \parallel x$)

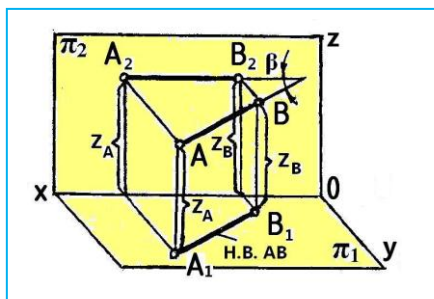


Рис. 2.16. Наочне зображення
горизонтальної прямої AB ($\angle \beta$ - кут
нахилу прямої до площини π_2 ,
 $A'B' = H.B. AB, z_A = z_B$)

Fig. 2.16. A visual image of the horizontal
line AB ($\angle \beta$ is the slope of line to the
plane $\pi_2, A'B' = H.B. AB, z_A = z_B$)

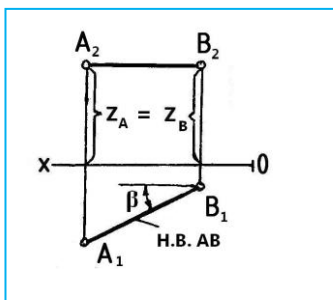


Рис. 2.17. Епюр горизонтальної
прямої AB ($\angle \beta$ - кут нахилу
прямої до площини π_2 ,
 $A'B' = H.B. AB, z_A = z_B$)

Fig. 2.17. The epure of the
horizontal line AB ($\angle \beta$ is the
slope of line to the plane $\pi_2, A'B' =$
H.B. AB, $z_A = z_B$)

2) координата z всіх точок прямої є сталою величиною (рис. 2.15 - 2.17); 3) горизонтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка прямої і паралельна до нього (на рис. 2.14 - 2.17 $A_1B_1 = H.B. AB, A_1B_1 // AB$); 4) $\angle \beta$ – кут нахилу горизонтальної прямої до площини π_2 і визначається безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов. 2.3.2. Пряма рівня, яка паралельна до фронтальної площини проєкції, називається фронтальною прямою або фронталлю і позначається буквою f. На рис. 2.18-2.21 дано наочне зображення та епюр фронтальної прямої CD. Фронтальна пряма має такі проєкційні властивості та координатні характеристики: 1) горизонтальна проєкція паралельна до осі x. Це характерна графічна ознака цієї прямої (на рис. 2.18-2.21 $C_1D_1 // x$); 2) координата y всіх точок прямої є сталою величиною (рис. 2.19-2.21); 3) фронтальна проєкція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка прямої і паралельна до нього (на рис. 2.18-2.21 $C_2D_2 = HB$	of the line is a constant value (Fig. 2.15 – 2.17); 3) the horizontal projection of the segment defines a true size of the segment itself and is parallel to it (Fig. 2.14 – 2.17 $A_1B_1 = H.B. AB, A_1B_1 // AB$); 4) $\angle \beta$ is the angle slope of the horizontal line to the plane π_2 and it is defined directly by the epure without any additional graphical constructions. 2.3.2. The level line, which is parallel to the frontal plane of projection, is called a frontal line or the frontal and it is marked by the letter f. In Fig. 2.18 – 2.21 a visual image and the epure of the frontal line CD is given. The frontal line has the following project attributes and coordinate characteristics: 1) the horizontal projection is parallel to the axis x. It is a graphical attribute of this particular line (Fig. 2.18 – 2.21 $C_1D_1 // x$); 2) the coordinate y of all points of the line is a constant value (Fig. 2.19 – 2.21); 3) the frontal projection of the segment defines a true size of the segment itself and is parallel to it (Fig. 2.18 – 2.21 $C_2D_2 = HB$
---	---

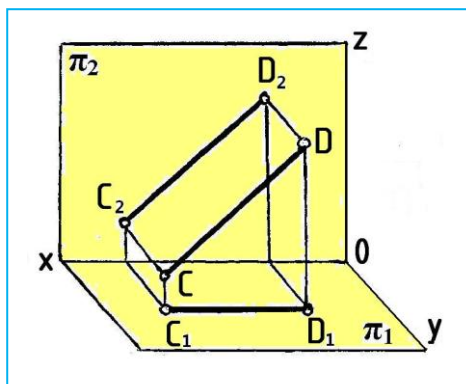


Рис. 2.18. Наочне зображення фронтальної прямої CD ($CD \parallel \pi_2, C_1D_1 \parallel x$)
Fig. 2.18. A visual image of the frontal line CD ($CD \parallel \pi_2, C_1D_1 \parallel x$)

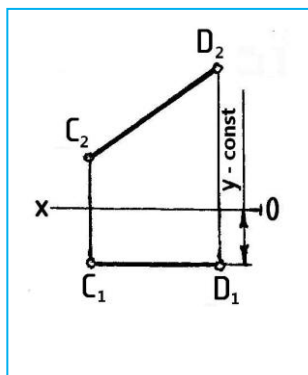


Рис. 2.19. Епюр фронтальної прямої CD ($C_1D_1 \parallel x$)
Fig. 2.19. The epure of the frontal line CD ($C_1D_1 \parallel x$)

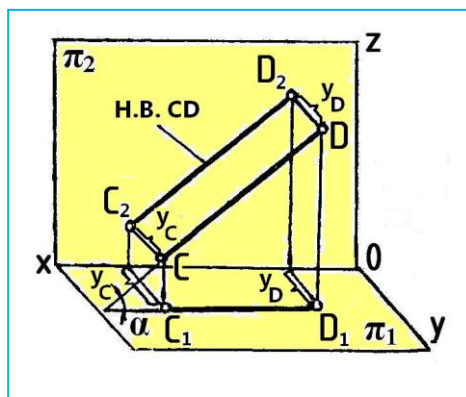


Рис. 2.16. Наочне зображення фронтальної прямої CD ($\angle \alpha$ - кут нахилу прямої до площини π_1 , $C_2D_2 = \text{H.B. CD}$, $y_c = y_D$)
Fig. 2.16. A visual image of the frontal line AB ($\angle \alpha$ is the angle slope of line to the plane π_1 , $C_2D_2 = \text{H.B. CD}$, $y_c = y_D$)

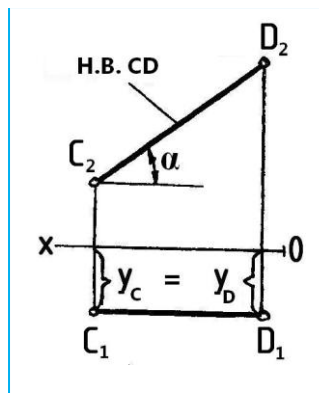


Рис. 2.17. Епюр фронтальної прямої CD ($\angle \alpha$ - кут нахилу прямої до площини π_1 , $C_2D_2 = \text{H.B. CD}$, $y_c = y_D$)
Fig. 2.17. The epure of the frontal line CD ($\angle \alpha$ is the angle slope of line to the plane π_1 , $C_2D_2 = \text{H.B. CD}$, $y_c = y_D$)

CD, $C_2D_2 // CD$); 4) $\angle \alpha$ – кут нахилу фронтальної прямої до площини π_1 і визначається безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов. ВИСНОВКИ На площину проєкцій, до якої пряма рівня паралельна, її відрізок проєкціюється в натуральну величину, а на іншу площину проєкцій – паралельно до осі проєкцій. За епюром без додаткових графічних побудов визначається величина кута нахилу прямої до цієї площини проєкцій, до якої пряма рівня не паралельна. <u>Проекціюючі прямі</u> 2.3.3. Проекціююча пряма, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проєкцій, називається горизонтально-проекціюючою прямою. На рис. 2.22 - 2.25 дано наочне зображення та епюр горизонтально-проекціюючої прямої АВ. Горизонтально-проекціююча пряма має такі проєкційні властивості та координатні характеристики: 1) горизонтальна проєкція прямої – точка, а фронтальна проєкція перпендикулярна осі x (на рис. 2.22-2.25 $A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$); 2) координати x і y всіх точок	CD, $C_2D_2 // CD$); 4) $\angle \alpha$ is the angle slope of the frontal line to the plane π_1 and it is defined directly by the epure without any additional graphical constructions. CONCLUSIONS. On the plane of projection, to which the level line is parallel, we project its segment of true size, and on the other plane of projection we project it in parallel with the axis of projection. By the epure and without any additional graphical constructions we define the degree of the angle slope of the line to the plane of projection which is not parallel to level line. <u>Project lines</u> 2.3.3. The project line which is perpendicular to the horizontal plane of projection is called horizontal and project line. In Fig. 2.22 – 2.25 a visual image and the epure of the horizontal and project line AB is given. The horizontal and project line has the following project attributes and coordinate characteristics: 1) the horizontal projection of the line is the point, and the frontal projection is perpendicular to the axis x (Fig. 2.22-2.25 $A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$); 2) the coordinates x and y of all
--	--

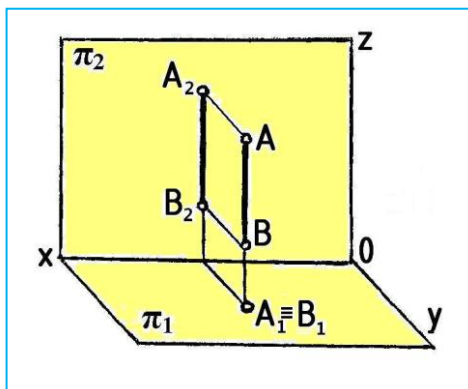


Рис. 2.22. Наочне зображення горизонтально-проекціуючої прямої AB ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, $A_2B_2 \parallel AB$)

Fig. 2.22. A visual image of horizontal and project line ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, $A_2B_2 \parallel AB$)

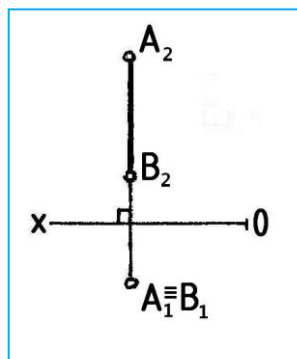


Рис. 2.23. Епюр горизонтально-проекціуючої прямої AB ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$)

Fig. 2.23. The epure of horizontal and project line ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$)

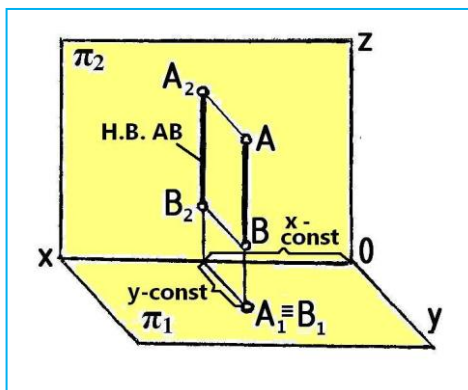


Рис. 2.24. Наочне зображення горизонтально-проекціуючої прямої AB ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, $A_2B_2 \parallel AB$, $A_2B_2 = H.B. AB$)

Fig. 2.24. A visual image of horizontal and project line ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, $A_2B_2 \parallel AB$, $A_2B_2 = H.B. AB$)

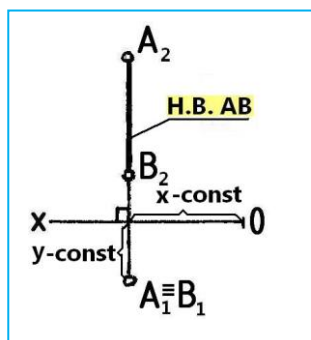


Рис. 2.25. Епюр горизонтально-проекціуючої прямої AB ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, $A_2B_2 = H.B. AB$)

Fig. 2.25. The epure of horizontal and project line ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, $A_2B_2 = H.B. AB$)

прямої – сталі величини (див. рис. 2.24, 2.25); 3) фронтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка і паралельна до нього (на рис. 2.22-2.25 $A_2B_2 = HB AB$, $A_2B_2 // AB$). 2.3.4. Проекціююча пряма, яка перпендикулярна до фронтальної площини проєкцій, називається фронтально-проекціюючою прямою. На рис. 2.26 - 2.29 дано наочне зображення та епюр фронтально-проекціюючої прямої CD. Фронтально-проекціююча пряма має такі проєкційні властивості та координатні характеристики: 1) фронтальна проекція прямої – точка, а горизонтальна проекція перпендикулярна осі x (на рис. 2.26 - 2.29 $C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$); 2) координати x і z всіх точок прямої – сталі величини (див. рис. 2.28, 2.29); 3) горизонтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка і паралельна до нього (на рис. 2.26-2.29 $C_1D_1 = H.B. CD$,). ВИСНОВКИ На площину проєкції, до якої проєкціююча пряма перпендикулярна, вона проєкціюється в точку, а на іншу площину	points of the line are constant values (see Fig. 2.24, 2.25); 3) the frontal projection of the segment defines a true size of the segment itself and is parallel to it (Fig. 2.22-2.25 $A_2B_2 = HB AB$, $A_2B_2 // AB$). 2.3.4. The project line, which is perpendicular to the frontal plane of projection, is called frontal and project line. In Fig. 2.26 – 2.29 a visual image and the epure of frontal and project line CD is given. The frontal and project line has the following project attributes and coordinate characteristics: 1) the frontal projection of the line is a point, and horizontal projection is perpendicular to the axis x (Fig.. 2.26 - 2.29 $C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$); 2) the coordinates x and z of all points of the line are constant values (see Fig. 2.28, 2.29); 3) the horizontal projection of the segment defines a true size of the segment itself and is parallel to it. (Fig. 2.22-2.25 $C_1D_1 = H.B. CD$, $C_1D_1 // CD$). CONCLUSIONS On the plane of projection to which the project line is perpendicular, we project the line on the point, and on the other plane
--	--

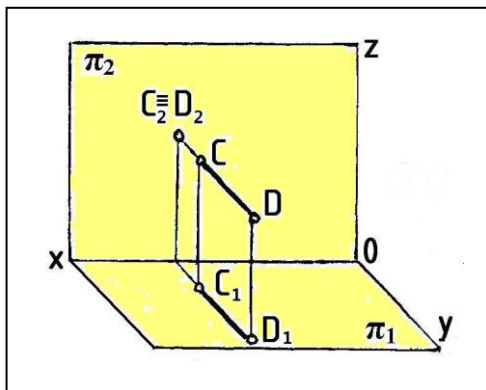


Рис. 2.26. Наочне зображення фронтально-проекціуючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, $C_1D_1 \parallel CD$)

Fig. 2.26. A visual image of the frontal and project line CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, $C_1D_1 \parallel CD$)

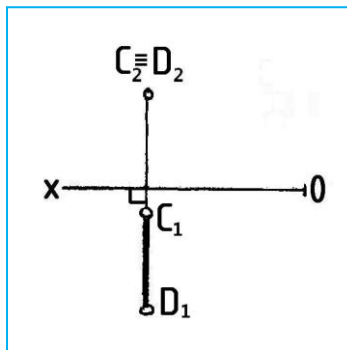


Рис. 2.27. Епюр фронтально-проекціуючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$)

Fig. 2.27. The epure of the frontal and project line CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$)

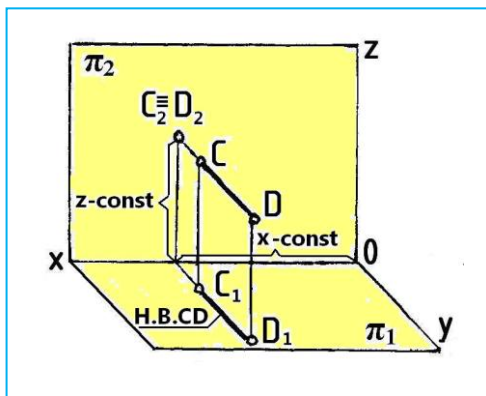


Рис. 2.28. Наочне зображення фронтально-проекціуючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, $C_1D_1 \parallel CD$, $C_1D_1 = \text{H.B. CD}$)

Fig. 2.28. A visual image of the frontal and project line CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, $C_1D_1 \parallel CD$, $C_1D_1 = \text{H.B. CD}$)

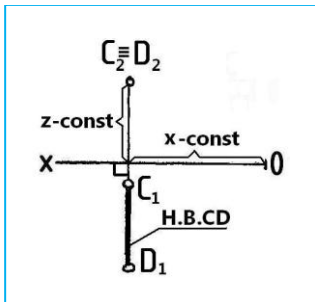


Рис. 2.29. Епюр фронтально-проекціуючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, $C_1D_1 = \text{H.B. CD}$)

Fig. 2.29. The epure of the frontal and project line CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, $C_1D_1 = \text{H.B. CD}$)

проекцій, до якої вона паралельна, – перпендикулярно до осі проекцій, а її відрізок – в натуральну величину. <u>2.4. Взаємне положення двох прямих</u> Точка належить прямій, якщо на епюрі проекції точки належать однойменним проекціям прямої. На рис. 2.30 тільки точка D належить прямій f, оскільки $D_1 \equiv f_1$ і $D_2 \equiv f_2$. Решта точок не належать прямій f. Прямі в просторі можуть бути: 1) паралельними; 2) прямими, що перетинаються (пересічними прямими); 3) мимобіжними, тобто прямими, що не паралельні і не перетинаються. 2.4.1. Проекції паралельних прямих на площини проекцій, до яких вони не перпендикулярні, паралельні між собою або паралельні та збігаються. На рис. 2.31, 2.32 дано епюри паралельних прямих ($l \parallel m$ і $k \parallel n$), оскільки $l_1 \parallel m_1$ і $l_2 \parallel m_2$, $k_2 \parallel n_2$ і $k_1 \equiv n_1$. 2.4.2. Проекції прямих, що перетинаються, проєкціюються на площини проекцій прямими лініями, що також перетинаються, або перетинаються та збігаються, причому точки перетину	of projections, to which it is parallel we project it perpendicularly to the axis of projection, and its segment is projected in true size. <u>2.4. Mutual alignment of two straight lines</u> The point belongs to the line if the points on the epure of projection belong to the analogous projections of the line. In Fig. 2.30 only point D belongs to the line f, since $D_1 \equiv f_1$ і $D_2 \equiv f_2$. The rest don't belong to the line f. The lines in the space can be: 1) parallel; 2) intersecting; 3) skew, i.e. lines that are neither parallel nor intersecting. 2.4.1. The projections of parallel lines on planes of projections, to which they are not perpendicular, are either parallel to each other or parallel and coincide. In Fig. 2.31, 2.32 the epures of the parallel lines are given ($l \parallel m$ і $k \parallel n$), since $l_1 \parallel m_1$ and $l_2 \parallel m_2$, $k_2 \parallel n_2$ and $k_1 \equiv n_1$. 2.4.2. The projections of intersecting lines are drawn on the planes of projections by straight lines that either intersect or intersect and coincide, whilst the intersection points of analogous lines projections
--	---

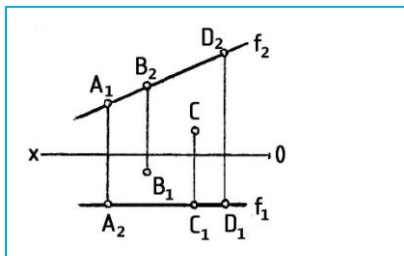


Рис. 2.30. Приналежність точки
прямій лінії
Fig. 2.30. Belonging of the point to the
line

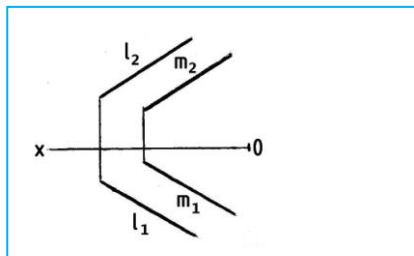


Рис. 2.31. Епюр паралельних прямих
 l і m
Fig. 2.31. The epure of the parallel lines l
and m

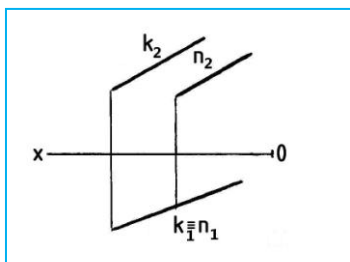


Рис. 2.31. Епюр паралельних
прямих k і n
Fig. 2.31. The epure of the parallel
lines k and n

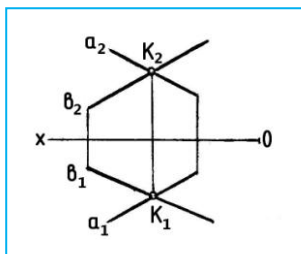


Рис. 2.32. Епюр прямих a і b , що
перетинаються
Fig. 2.32. The epure of intersecting lines
 a and b

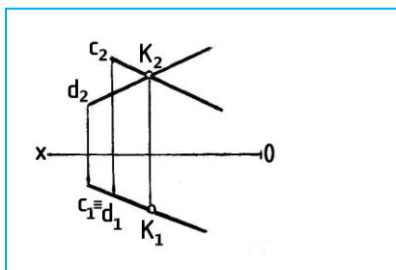


Рис. 2.33. Епюр прямих c і d , що
перетинаються
Fig. 2.33. The epure of intersecting lines
 c and d

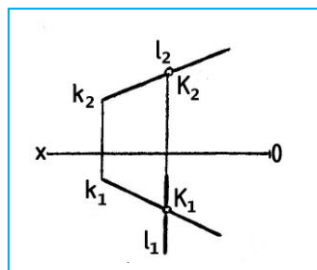


Рис. 2.34. Епюр прямих k і l ,
що перетинаються
Fig. 2.34. The epure of
intersecting lines k and l

однойменних проєкцій прямих лежать на одній лінії проєкційного зв'язку, оскільки є проєкціями однієї і тієї ж точки – точки перетину прямих.

На рис. 2.33 дано епюр прямих a і b , що перетинаються в точці K , оскільки $K' = a' \cap b'$, $K'' = a'' \cap b''$ (горизонтальна проєкція K' і фронтальна проєкція K'' точки K лежать на одній вертикальній лінії проєкційного зв'язку).

На рис. 2.34, 2.35 дано також епюри пересічних прямих c, d і k, l , що перетинаються в точці K . Прямі c, d і k, l лежать в одній площині, яка перпендикулярна до π_1 (рис. 2.34) і до π_2 (рис. 2.35). За проєкціями цих прямих, які не збігаються, видно, що це епюри не паралельних прямих, а саме пересічних прямих.

2.4.3. Якщо прямі мимобіжні, тобто не паралельні і не перетинаються, то точки перетину їх однойменних проєкцій не лежать на одній лінії проєкційного зв'язку, а проєкції ніколи не збігаються.

Через дві мимобіжні прямі неможливо провести одну площину, тобто мимобіжні прямі не можуть лежати в одній площині, на відміну від паралельних прямих та прямих, що перетинаються, а, отже, їх проєкції ніколи не збігаються.

are located on the common line of project connection, since they are the projections of the same point, i.e. the intersection point of lines.

In Fig. 2.33 the epure of the lines a and b is given, these lines intersect in the point K , since $K_1 = a_1 \cap b_1$, $K_2 = a_2 \cap b_2$ (the horizontal projection K_1 and the frontal projection K_2 of the point K lie on the common vertical line of project connection).

In Fig. 2.34, 2.35 the epures of the intersecting lines c, d and k, l are given, these lines intersect in the point K . The lines c, d and k, l lie on the common plane which is parallel to π_1 (Fig. 2.34) and π_2 (Fig. 2.35). By the projections of these lines that do not coincide, we can see that these are not the epures of the parallel lines but of intersecting lines.

2.4.3. If the lines are skew, i.e. neither parallel nor intersecting, then the points of intersection of their analogous projections do not lie on common line of project connection, and the projections never coincide.

It is impossible to draw one plane through two skew lines, i.e. skew lines cannot lie in the common plane unlike parallel lines and intersecting lines, thus their projections never coincide.

На рис. 2.36 і 2.37 дано епюр прямих a , b і c , d . Незважаючи на те, що проєкції прямих перетинаються, тільки на рис. 2.36 зображено епюр прямих, що перетинаються, оскільки 1_1 і 1_2 лежать на одній лінії проєкційного зв'язку. На рис. 2.37 зображено епюр мимобіжних прямих, оскільки 1_1 (точка перетину c_1 і d_1) і точка 1_2 (точка перетину c_2 і d_2) не лежать на одній лінії проєкційного зв'язку.

Можна іншим способом визначити, що прямі c і d – мимобіжні (рис. 2.38). З точки 1_2 проводимо вертикальну лінію проєкційного зв'язку, яка перетинає як c_1 , так і d_1 , тобто точка 1 може належати як прямій c , так і прямій d , а, отже, точка 1 не є точкою перетину прямих c і d . А на рис. 2.36 точка 1 належить як прямій a , так і прямій b , тобто є точкою перетину прямих a і b .

На рис. 2.39 дано наочне зображення мимобіжних прямих a і b , а на рис. 2.40 – їх епюр.

Для мимобіжних прямих характерна наявність конкуруючих точок, за допомогою яких визначають видимість елементів геометричних фігур на епюрі. Конкуруючими називаються точки, які лежать на одній лінії.

In Fig. 2.36 and 2.37 the epure of the lines a , b and c , d is given. Although the projections of the lines intersect, only in Fig. 2.36 we can see the epure of the lines that intersect, since 1_1 and 1_2 lie on the common line of the project connection. In Fig. 2.37 the epure of the skew lines is given, since 1_1 (the point of intersection c_1 and d_1) and the point 1_2 (the point of intersection c_2 and d_2) do not lie on the common line of project connection.

Another method can be used to define that lines c and d are skew lines (Fig. 2.38). From the point 1_2 we draw a vertical line of project connection which intersects c_1 as well as d_1 , i.e. the point 1 may belong to the line c , as well as to the line d , thus, the point 1 is not a point of intersection of the lines c and d . And in Fig. 2.36 the point 1 belongs to the line a as well as to the line b , consequently it is a point of intersection of the lines a and b .

In Fig. 2.39 a visual image of the skew lines a and b is given, and in Fig. 2.40 their epure is shown.

The skew lines are characterized by the presence of the collinear points which are helpful in defining the visibility of the geometric figure elements on the epure. Collinear points are the points that lie on the same line of the project connection

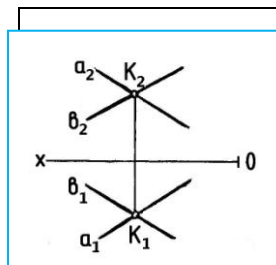


Рис. 2.36. Епюр
пересічних прямих a і b
Fig. 2.36. The epure of
intersecting lines a and b

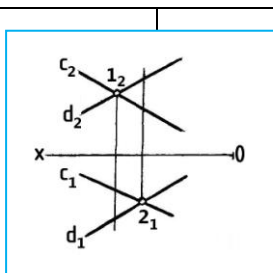


Рис. 2.37. Епюр
мимобіжних
прямих c і d
Fig. 2.37. The epure of
skew lines c and d

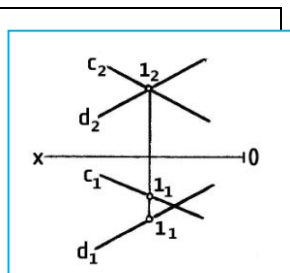


Рис. 2.38. Епюр
мимобіжних
прямих c і d
Fig. 2.38. The epure of
skew lines c and d

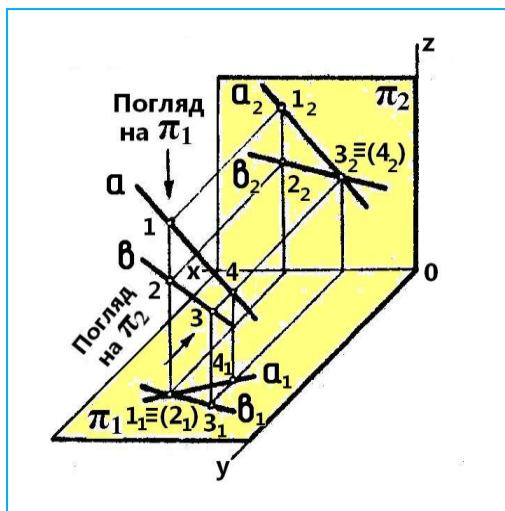


Рис. 2.39. Наочне зображення мимобіжних
прямих a і b (1, 2 і 3, 4 - пари конкуруючих
точок)
Fig. 2.39. A visual image of skew lines a and b (1, 2
and 3, 4 are the pairs of collinear points)

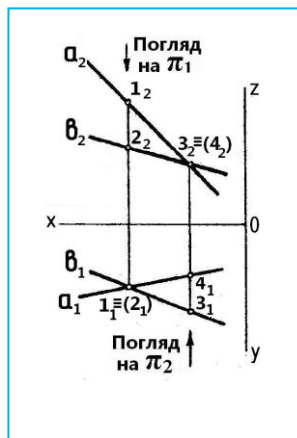


Рис. 2.40. Епюр
мимобіжних прямих a і b
(1, 2 і 3, 4 - пари
конкуруючих точок)
Fig. 2.40. The epure of skew
lines a and b (1, 2 and 3, 4
are the pairs of the collinear
points)

На рис. 2.39 пари точок 1, 2 і 3, 4 є конкуруючими точками. Точки 1 і 2 лежать на одній горизонтально-проекціуючій прямій, яка перпендикулярна до площини π_1, тому горизонтальні проекції цих точок збігаються ($1_1 \equiv 2_1$). Точки 3 і 4 лежать на одній фронтально-проекціуючій прямій, яка перпендикулярна до площини π_2, тому фронтальні проекції цих точок збігаються ($3_2 \equiv 4_2$). Отже, якщо проекції обох точок збігаються, то це означає, що ці точки є конкуруючими і лежать на одній проекціуючій прямій. З двох конкуруючих точок видимою відносно площин проекцій буде та, у якій проекція, що не збігається з проекцією іншої конкуруючої точки, розміщена далі від осі x, тобто ця точка буде знаходитися ближче до спостерігача. Видимість елемента фігури на епюрі розв'язується для кожної проекції елемента <u>окремо</u>, а саме для тієї проекції елемента, на якій проекції конкуруючих точок збігаються. Видимість елементів фігури зводиться до визначення видимості проекцій конкуруючих точок, що збігаються, і належать заданим елементам. На рис. 2.40 серед	In Fig. 2.39 the point pair 1, 2 and 3, 4 are collinear points. The points 1 and 2 lie on the same horizontal and project line which is perpendicular to the plane π_1, thus, the horizontal projections of these points coincide ($1_1 \equiv 2_1$). The points 3 and 4 lie on the same frontal and project line which is perpendicular to the plane π_2, thus, the frontal projections of these point coincide ($3_2 \equiv 4_2$). Therefore, if the projections of both points coincide it means that these points are collinear and lie on the same project line. Having two collinear points, the visible on the plane of projections will be the one whose projection doesn't coincide with the projection of another collinear point, located farther from the axis x, i.e. this point will be located closer to the observer. The visibility of the element on the epure is defined <u>individually</u> for every projection of the element, i.e. for that projection of the element on which the projections of collinear points coincide. The visibility of the elements amounts to the definition of the visibility of collinear points projections that coincide and belong to the given elements. In Fig. 2.40 from the collinear
--	---

конкуруючих точок 1 і 2 видимою на π_1 є точка 1, фронтальна проекція 1_2 якої розміщена далі від осі x , а сама точка 1 – ближче до спостерігача. Невидимою на π_1 буде точка 2, тому її горизонтальну проекцію 2_1 взяли в дужки. Серед конкуруючих точок 3 і 4 видимою є точка 3, горизонтальна проекція 3_1 якої розміщена далі від осі x , а сама точка 3 – ближче до спостерігача. Невидимою на π_2 буде точка 4, тому її фронтальну проекцію 4_2 взяли в дужки.

На рис. 2.41 показано, як за допомогою конкуруючих точок визначено видимість ребер піраміди ABCS.

Точки 1 і 2 є конкуруючими, що лежать на одній горизонтально-проекціуючій прямій, їх горизонтальні проекції збігаються ($1' \equiv 2'$). За допомогою цих точок визначено видимість горизонтальних проекцій A_1S_1 і B_1C_1 ребер AS і BC, які є мимобіжними прямими ($1 \in AS$, $2 \in BC$). Горизонтальна проекція 1_1 є видимою, а 2_1 – невидимою, оскільки точка 1_2 розміщена далі від осі x , ніж точка 2_2 . Точка 1 належить ребру AS, тому горизонтальна проекція A_1S_1 ребра AS буде видимою, а ребра BC – невидимою, оскільки точка 2_1 невидима.

points 1 and 2 the visible on π_1 is the point 1 whose frontal projection 1_2 is located farther from the axis x , and the point 1 itself is closer to the observer. The invisible point on π_1 will be the point 2 that is why its horizontal projection 2_1 is written in brackets. Among the collinear points 3 and 4 the visible is the point 3 whose horizontal projection 3_1 is located farther from the axis x , and the point 3 itself is situated closer to the observer. The invisible point on π_2 will be the point 4 that is why its frontal projection 4_2 is written in brackets.

In Fig. 2.41 you can see how to define the visibility of pyramid edges ABCS by means of collinear points.

The points 1 and 2 are collinear points that lie on the same horizontal and project line, their horizontal projections coincide ($1_1 \equiv 2_1$). By means of these points we define the visibility of horizontal projections A_1S_1 and B_1C_1 of the edges AS and BC that are the skew lines ($1 \in AS$, $2 \in BC$). The horizontal projection 1_1 is visible and the projection 2_1 is invisible since the point 1_2 is located farther from the axis x , than the point 2_2 . The point 1 belongs to the edge AS, that's why the horizontal projection A_1S_1 of the edge AS will be visible and of the edge BC invisible, since the point 2_1 is invisible.

The points 3 and 4 are collinear,

Точки 3 і 4 є також конкуруючими, вони лежать на одній фронтально-проекціюючій прямій, їх фронтальні проекції збігаються ($3_2 \equiv 4_2$). За допомогою цих точок визначено видимість фронтальних проекцій A_2C_2 і B_2S_2 ребер AC і BC, які є мимобіжними прямими ($3 \in BS$, $4 \in AC$). Фронтальна проекція 3_2 є видимою, а 4_2 – невидимою, оскільки точка 3_1 розміщена далі від осі x , ніж точка 4_1 . Точка 3 належить ребру BS, тому фронтальна проекція B_2S_2 ребра BS буде видимою, а ребра AC – невидимою, оскільки точка 4_1 невидима.

2.5. Проекціювання взаємно перпендикулярних прямих

Прямий кут, утворений взаємно перпендикулярними прямими, проекціюється у вигляді прямого кута на ту площину проекцій, до якої одна з прямих (сторона кута) паралельна, а друга перпендикулярна.

На рис. 2.42 показано наочне зображення прямого кута, утвореного сторонами AB і BC, які є відрізками прямих, що перетинаються, причому $BC \parallel \pi_1$, а $AB \perp \pi_1$. На площині проекцій π_1 побудовано горизонтальну проекцію $A_1B_1C_1$ прямого кута

they lie on the same frontal and project line, their frontal projections coincide ($3_2 \equiv 4_2$). By means of these points we define the visibility of the frontal projections A_2C_2 and B_2S_2 of the edges AC and BC, which are skew lines ($3 \in BS$, $4 \in AC$). The frontal projection 3_2 is visible and the projection 4_2 is invisible since the point 3_1 is located farther from the axis x , than the point 4_1 . The point 3 belongs to the edge BS, that's why the frontal projection B_2S_2 of the edge BS will be visible and of the edge AC invisible since the point 4_1 is invisible.

2.5. Projecting of mutually perpendicular lines

The right angle formed by mutually perpendicular lines is projected as the right angle on that plane of projections to which one of the lines (the side of an angle) is parallel, and the other is not perpendicular.

In Fig. 2.42 a visual image of the right angle is shown. It was formed by the sides AB and BC, which are intersecting segments whilst $BC \parallel \pi_1$, and $AB \perp \pi_1$. In the plane of projections π_1 a horizontal projection $A_1B_1C_1$ of the right angle ABC is formed, which considering the

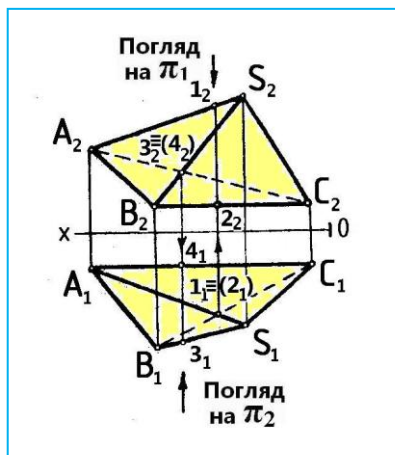


Рис. 2.41. Визначення видимості ребер піраміди ABCS
Fig. 2.41. Defining visibility of ABCS pyramid edges

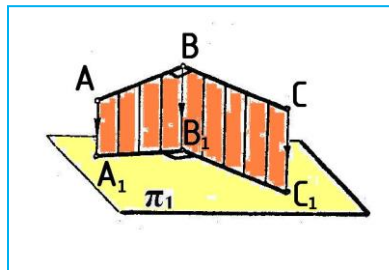


Рис. 2.42. Проекціювання прямого кута
Fig. 2.42. Projecting of the right angle

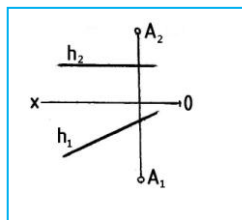


Рис. 2.43. Початкова умова задачі на визначення відстані від точки A до горизонтальної прямої h

Fig. 2.43. The initial condition of the problem for defining the distance from the point A to the horizontal line h

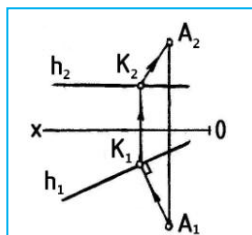


Рис. 2.44. Визначення відстані від точки A до горизонтальної прямої h (1 дія)

Fig. 2.43. Defining of the distance from the point A to the horizontal line h (step 1)

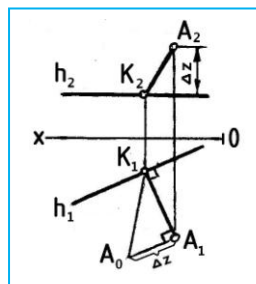


Рис. 2.45. Визначення відстані від точки A до горизонтальної прямої h (2 дія)

Fig. 2.45. Defining the distance from the point A to the horizontal line h (step 2)

властивість проєкціювання прямого кута, також утворює кут 90°. Іншими словами, якщо кут ABC прямий, тобто сторони кута AB і BC є взаємно перпендикулярними прямими, причому сторона BC цього кута паралельна площині π_1, а друга сторона AB не перпендикулярна до площини π_1, то ортогональна проєкція $A_1B_1C_1$ прямого кута на площині π_1 складає кут 90° (кут $A_1B_1C_1 = 90^\circ$) або горизонтальні проєкції сторін кута будуть взаємно перпендикулярними ($A_1B_1 \perp B_1C_1$). Навпаки, якщо ортогональна проєкція кута, який утворений двома прямими, що перетинаються, складає кут 90°, а одна сторона кута паралельна до тієї площини проєкцій, де розміщена ортогональна проєкція кута, а друга сторона кута не перпендикулярна до цієї ж площини проєкцій, то в просторі такий кут складає також 90°. На рис. 2.43 – 2.45 показано розв’язування задачі на визначення відстані від точки A до горизонтальної прямої h.	angle measured in 90°. Stated differently, if the angle ABC is right, i.e. the sides of the angle AB and BC are mutually perpendicular lines, whilst the side BC of this angle is parallel to the plane π_1, and the other side AB is not perpendicular to the plane π_1, then the orthogonal projection $A_1B_1C_1$ of the right angle on the plane π_1 forms the angle measured in 90° (the angle $A_1B_1C_1 = 90^\circ$) or horizontal projections of the sides of the angle will be mutually perpendicular ($A_1B_1 \perp B_1C_1$). On the contrary, if the orthogonal projection of the angle, which is constructed by two lines that intersect, forms the angle measured in 90°, and one side of an angle is parallel to that plane of projection where the orthogonal projection of the angle is located, whereas the other side of the angle is not perpendicular to the given plane of projections, then in space the measure of such angle is also 90°. In Fig. 2.43 – 2.45 the solution of the problem for defining the distance from the point A to the horizontal line h is given.
--	--

Нарисна геометрія. Розділ 3. Площина	Descriptive geometry. Chapter 3. The plane
<u>3.1. Задання площини на епюрі</u> Найчастіше на епюрі площину задають: 1) проекціями двох паралельних прямих (рис. 3.1); 2) проекціями двох прямих, що перетинаються (рис. 3.2); 3) проекціями трикутника – відсіка плоскої фігури (рис. 3.3). Площину позначають малими літерами грецького алфавіту. На рис. 3.1-3.3, крім позначення площини літерою, в дужках можна вказувати спосіб задання площини. Наприклад, запис α ($a \parallel b$) розшифровується таким чином: площина α задана двома паралельними прямими a і b (рис. 3.1). Площина може бути задана <u>слідами площини</u> (рис. 3.4, 3.5). Слід площини – це пряма лінія, по якій площина перетинає площину проєкцій. Розрізняють: 1. <u>Горизонтальний слід площини</u> – це лінія перетину площини з горизонтальною площиною проєкцій π_1. На рис. 3.4, 3.5 h^0_α – горизонтальний слід площини α (нульова горизонталь площини α, тобто горизонталь, яка знаходиться в площині α), $h^0_\alpha = \alpha \cap \pi_1$. 2. <u>Фронтальний слід площини</u> – це лінія перетину площини з	<u>3.1. Determining a plane on the epure</u> The plane on the epure is often determined by means of: 1) projections of two parallel lines (Fig. 3.1); 2) projections of two straight lines that intersect (Fig. 3.2); 3) projections of a triangle, i.e. a segment of a plane figure (Fig. 3.3). The plane is marked by low-case Greek letters. In Fig. 3.1- 3.3, except marking the plane by letter, in the brackets you can also indicate the method of determining the plane. For example, the formula α ($a \parallel b$) can be defined as follows: the plane α is determined by two parallel lines a and b (Fig. 3.1). The plane can be determined by <u>the traces of a plane</u>. (Fig. 3.4, 3.5). The trace of a plane is a straight line on which the plane intersects the plane of projections. There are: 1. <u>Horizontal trace of a plane</u>. It is a line of intersection between the plane and horizontal plane of projection π_1. In Fig. 3.4, 3.5 h^0_α we can see the horizontal trace of a plane α (the initial horizontal level of the plane α, i.e. the horizontal line which is located in the plane α), $h^0_\alpha = \alpha \cap \pi_1$. 2. <u>Frontal trace of a plane</u>. It is a line of intersection between the plane and

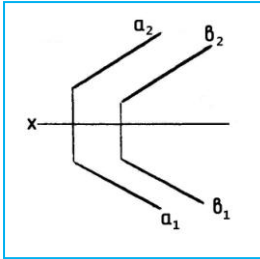


Рис. 3.1. Задання площини двома паралельними прямими

Fig. 3.1. Determining the plane by two parallel lines

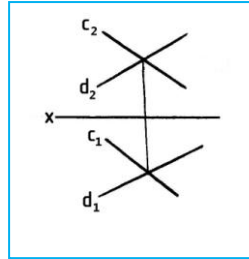


Рис. 3.2. Задання площини двома прямими, що перетинаються

Fig. 3.2. Determining the plane by two intersecting lines

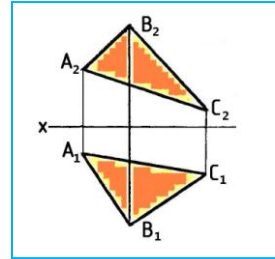


Рис. 3.3. Задання площини трикутником

Fig. 3.3. Determining the plane by triangle

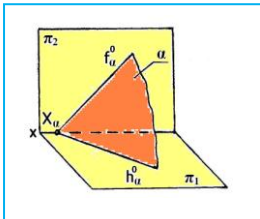


Рис. 3.4. Наочне зображення площини α , що задана слідами: h_a^0 і f_a^0 - горизонтальний і фронтальний сліди площини, X_a - точка сходу слідів

Fig. 3.4. A visual image of the plane α , determined by the traces: h_a^0 and f_a^0 , horizontal and frontal traces of a plane, X_a is the point of trace intersection

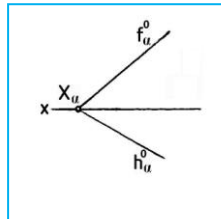


Рис. 3.5. Епюр площини α , що задана слідами: h_a^0 і f_a^0 - горизонтальний і фронтальний сліди площини, X_a - точка сходу слідів

Fig. 3.4. The epure of the plane α , determined by the traces: h_a^0 and f_a^0 , horizontal and frontal traces of the plane, X_a is the point of trace intersection

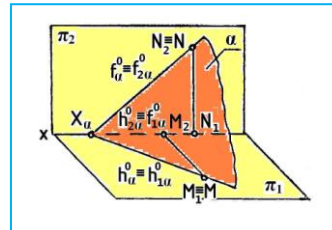


Рис. 3.6. Позначення на наочному зображенні проєкцій слідів площини α та точок M, N, що належать слідам ($M \in h_a^0$, $N \in f_a^0$)

Fig. 3.6. Notation on the visual image of projections for traces of the plane α and points M, N, that belong to the traces ($M \in h_a^0$, $N \in f_a^0$)

фронтальною площиною проєкцій π_2 .

На рис. 3.4. 3.5 f_a^0 – фронтальний слід площини α (нульова фронталь площини α), $f_a^0 = \alpha \cap \pi_2$.

3. Точка сходу слідів – точка, в якій перетинаються сліди площини, розміщена на осі проєкцій.

На рис. 3.4, 3.5 X_a – точка сходу слідів, $X_a = h_a^0 \cap f_a^0$.

На наочному зображенні (рис. 3.6) і епюрі (рис. 3.7) показано розміщення проєкцій слідів площини. Крім того, зображено проєкції точок M і N , що належать слідам площини ($M \in h_a^0, N \in f_a^0$).

Епюр площини, зображений на рис. 3.7 з позначенням всіх проєкцій слідів, на практиці не застосовують, а користуються для задання площини на епюрі зображенням, показаним на рис. 3.5, де позначені тільки самі сліди і немає позначень їх проєкцій. Проте, для розв'язування багатьох задач треба пам'ятати, де саме розміщені проєкції слідів площини, про що буде нагадувати епюр, зображений на рис. 3.7.

На наочному зображенні (рис. 3.8) і епюрі (рис. 3.9) показано побудову слідів площини β , що задана ΔABC .

the frontal plane of projections π_2 .

In Fig. 3.4. 3.5 f_a^0 we can see the frontal trace of a plane α (the initial frontal level of the plane α), $f_a^0 = \alpha \cap \pi_2$.

3. The point of trace intersection is the point where traces of the plane traverse, it is located on the axis of projections.

In Fig.3.4, 3.5 X_a the point of traces intersection is shown, $X_a = h_a^0 \cap f_a^0$.

On the visual image (Fig. 3.6) and the epure (Fig. 3.7) the location of projection of the traces of a plane is shown. Moreover, the projections of the points M and N are drawn, they belong to the traces of a plane ($M \in h_a^0, N \in f_a^0$).

The epure of the plane shown in Fig. 3.7, all notations for projections of the traces being given, is not used in practice. Instead, it is used for determining a plane on the epure by a drawing shown in Fig. 3.5 where only the traces are marked but not their projections. However, for multiple problems-solving we should remember where exactly the projections of the traces of a plane are located. The epure given in Fig. 3.7 will show this location.

On the visual image (Fig. 3.8) and the epure (Fig. 3.9) the construction of the traces of a plane β , which is determined ΔABC is shown.

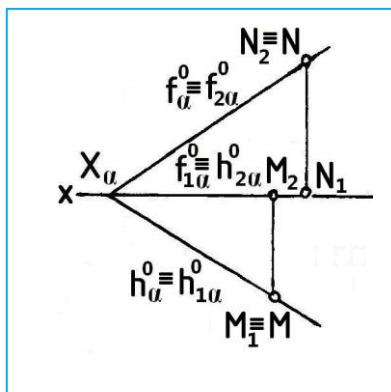


Рис. 3.7. Позначення на епюрі проєкцій слідів площини α та точок M, N , що належать слідам ($M \in h_\alpha^0, N \in f_\alpha^0$)

Fig. 3.7. Notation of projections for the traces of the plane α and points M, N , that belong to the traces ($M \in h_\alpha^0, N \in f_\alpha^0$) on the epure

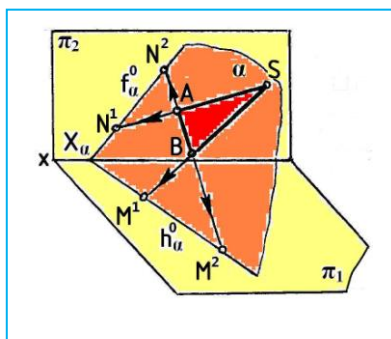


Рис.3.8. Побудова на наочному зображенні слідів площини α , що задана трикутником ABC

Fig. 3.8. The construction of the traces of the plane α , that is determined by triangle ABC on the visual image

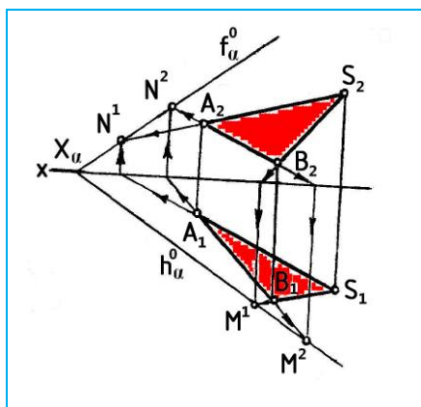


Рис.3.8. Побудова на епюрі слідів площини α , що задана трикутником ABC

Fig. 3.8. The construction of the traces of the plane α , that is determined by triangle ABC on the epure

3.2 Площини загального та часткового положення

Площини, як і прямі лінії, класифікують залежно від їх розміщення відносно площин проєкцій на площини загального та часткового положення.

3.2.1. Площина загального положення – це площина, яка не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проєкцій.

На епюрі у площини загального положення сліди не паралельні і не перпендикулярні до осі проєкцій. На рис. 3.5 показано епюр саме площини загального положення, оскільки $h_{0\alpha}$, $f_{0\alpha}$ не паралельні і не перпендикулярні до осі x . Це характерна графічна ознака площини загального положення, що задана слідами.

Площина загального положення не перпендикулярна до площин проєкцій, тому при заданні її іншими елементами, наприклад, трикутником, ці елементи на жодну з площин проєкцій не проєкціюються в одну спільну пряму лінію. На рис. 3.1-3.3 задано епюри площин загального положення.

Площини часткового положення поділяються на проєкціюючі та площини рівня. Проєкціюючі площини перпендикулярні до однієї з площин проєкцій, а площини рівня – паралельні.

3.2.2. Площина, яка перпендикулярна до горизон-

3.2. Planes of general and partial position

Planes as well as straight lines are classified according to their location in the planes of projections. There are planes of general and partial position.

3.2.1. Plane of general position is the plane which is neither parallel nor perpendicular to any of the planes of projections.

On the epure the plane of general position has the traces that are neither parallel nor perpendicular to the axis of projection. In Fig. 3.5 we can see the epure of the plane of general position, since $h_{0\alpha}$, $f_{0\alpha}$ are neither parallel nor perpendicular to the axis x . This is a graphical attribute of the plane of general position determined by the traces.

The plane of general position is not perpendicular to the planes of projections that is why when projecting it by means of other elements, such as triangle, these elements are not projected on either part of projections as one common straight line. In Fig. 3.1 – 3.3 the epures of the planes of general position are given.

The planes of partial position are divided into project planes and level planes. Project planes are perpendicular to one of the planes of projection and level planes are parallel.

3.2.2. The plane which is perpendicular to horizontal plane of

тальної площини проєкцій, називається <u>горизонтально-проєкціуючою площиною</u>. На рис. 3.10 дано наочне зображення горизонтально-проєкціуючої площини α. Вона перпендикулярна до площини π_1 і проєкціюється на цю площину прямою лінією α_1, тобто α_1 – проєкція площини α на площину π_1, до якої площина α перпендикулярна. Лінію α_1 називають <u>слідом-проєкцією</u> площини α. На рис. 3.11 наведено епюр горизонтально - проєкціуючої площини α у вигляді тільки однієї прямої лінії α_1. І таке зображення площини повністю визначає положення площини в просторі, оскільки на епюрі можна визначити сліди площини – горизонтальний і фронтальний (рис.3.12, 3.13). В горизонтально-проєкціуючій площині α (рис. 3.14) розмістимо трикутник ABC. Оскільки площина α перпендикулярна до π_1, горизонтальна проєкція ΔABC буде проєкціюватися на слід-проєкцію α_1 ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$). На рис. 3.15 показано епюр горизонтально-проєкціуючої площини, якій належить ΔABC. Отже, якщо проєкція трикутника збігається зі слідом-проєкцією площини, то сам трикутник належить цій площині (на рис. 3.15 $A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$). Дамо означення сліду-	projection is called <u>horizontal and project plane</u>. In Fig. 3.10 a visual image of horizontal and project plane α is given. It is perpendicular to the plane π_1 and is projected on the plane as a straight line α_1, i.e. α_1 is a projection of the plane α on the plane π_1, to which the plane α is perpendicular. The line α_1 is called <u>trace-projection</u> of the plane α. In Fig. 3.11 the epure of horizontal and project plane α is given in the form of only one straight line α_1. Such drawing of the plane fully determines the location of the plane in space since the traces of the plane (horizontal and frontal) can be determined in the epure (Fig. 3.12, 3.13). On the horizontal and project plane α (Fig. 3.14) we shall locate the triangle ABC. Since the plane α is perpendicular to π_1, the horizontal projection ΔABC will be projected on the trace-projection α_1 ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$). In Fig. 3.15 we can see the epure of horizontal and project plane to which ΔABC belongs. Thus, if the projection of triangle coincides the trace-projection of the plane then the triangle itself belongs to this plane (in Fig. 3.15 $A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$). Let's define trace-projection
--	---

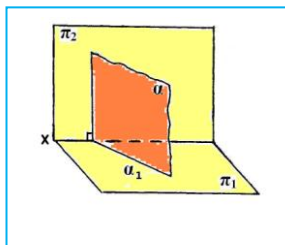


Рис. 3.10. Наочне зображення горизонтально-проекціуючої площини α (α_1 — слід-проекція площини α)

Fig. 3.10. A visual image of horizontal and project plane α (α_1 is the trace-projection of the plane α)

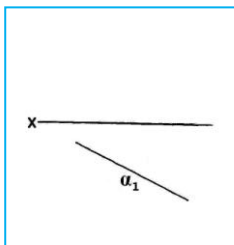


Рис. 3.11. Епюр горизонтально-проекціуючої площини α (α_1 — слід-проекція площини α)

Fig. 3.11. The epure of horizontal and project plane α (α_1 is the trace-projection of the plane α)

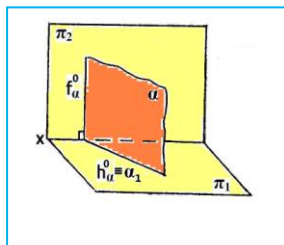


Рис. 3.12. Наочне зображення горизонтально-проекціуючої площини α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

Fig. 3.10. A visual image of horizontal and project plane α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

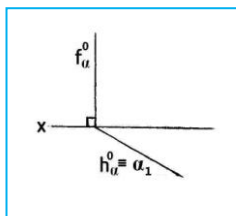


Рис. 3.13. Епюр горизонтально-проекціуючої площини α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

Fig. 3.13. The epure of horizontal and project plane α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

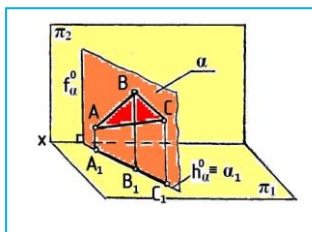


Рис. 3.14. Наочне зображення горизонтально-проекціуючої площини α з розміщенням в ній ΔABC ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)

Fig. 3.14. A visual image of horizontal and project plane α with ΔABC being located in it ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)

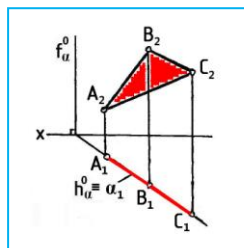


Рис. 3.15. Епюр горизонтально-проекціуючої площини α з розміщенням в ній ΔABC ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)

Fig. 3.15. The epure of horizontal and project plane α with ΔABC being located in it ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)

проекції: <u>Слід-проекція – це лінія перетину площини з площиною проекції, до якої ця площина перпендикулярна.</u> Всі площини часткового положення мають слід-проекцію, оскільки вони перпендикулярні хоча б до однієї з площин проекцій. <u>Слід-проекція має таку збірну властивість: проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що знаходяться в заданій площині часткового положення, проєкціюються саме на слід-проекцію (див. рис. 3.15).</u> На рис. 3.16 дано епюр горизонтально - проєкціуючої площини, що задана $\triangle ABC$, оскільки горизонтальна проєкція трикутника – пряма лінія. Ця пряма лінія є слідом-проекцією заданої площини, вона лежить в площині π_1, і по ній площина перетинає площину π_1, до якої перпендикулярна. На рис. 3.17 через точку А проведено горизонтально-проєкціуючу площину α, тобто точка А стала належати площині α. Можна сказати по-іншому: якщо горизонтальна проєкція A_1 збігається з α_1, то це означає, що сама точка А належить площині α. Горизонтально-проєкціуюча площина має такі властивості: 1. При заданні площини слідами горизонтальний слід h_α^0 площини є слідом-проекцією цієї	<u>Trace-projection is the line where the plane and plane of projection to which this plane is perpendicular intersect.</u> All planes of partial position have the trace-projection since they are perpendicular at least to one of the planes of projection. <u>The trace-projection possesses a common attribute which can be described as: the projections of points, straight lines, plane figures located in a given plane of partial position, are projected on the trace-projection. (see Fig. 3.15).</u> In Fig. 3.16 the epure of horizontal and project plane, given as $\triangle ABC$ is shown, since the horizontal projection of triangle is the straight line. This straight line is the trace-projection of a determined plane, it lies in the plane π_1, to which it is perpendicular. In Fig. 3.17 through the point A the horizontal and project plane α is drawn, i.e. the point A now belongs to the plane α. In other words, if the horizontal projection A_1 coincides α_1 then it means that the point A belongs to the plane α. Horizontal and project plane has the following attributes: 1. When determining the plane by traces the horizontal trace h_α^0 of the plane is the trace-projection of this
--	---

площини, а фронтальний слід f_a^0 перпендикулярний до осі x. 2. При заданні площини іншими елементами (трикутником, двома паралельними або прямими, що перетинаються) ці елементи на площину π_1 проєкціюються в одну пряму лінію, яка є слідом-проєкцією площини. 3. Горизонтальні проєкції точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать горизонтально-проєкціуючій площині, проєкціюються на горизонтальний слід площини, що є слідом-проєкцією, і навпаки, якщо горизонтальні проєкції точок, прямих ліній, плоских фігур збігаються зі слідом-проєкцією горизонтально-проєкціуючої площини, то це означає, що дані фігури або лежать в цій площині, або горизонтально-проєкціуюча площина проходить через дані фігури. 3.2.3. Площина, яка перпендикулярна до фронтальної площини проєкцій, називається <u>фронтально - проєкціуючою площиною</u>. На рис. 3.18 - 3.21 дано наочне зображення та епюр фронтально - проєкціуючої площини β, заданої слідами, а на рис. 3.22, 3.23 епюр - фронтально - проєкціуючої площини β, заданої трикутником DEF.	plane, and the frontal trace f_a^0 is perpendicular to the axis x. 2. When determining the plane by other elements (triangle, two parallel or straight lines that intersect) these elements are projected on the plane π_1 in the form of one straight line which is the trace-projection of the plane. 3. Horizontal projections of the points, straight lines, plane figures that belong to horizontal and project plane are projected on the horizontal trace of the plane which is the trace-projection and vice versa. If horizontal projections of the points, straight lines and plane figures coincide with trace-projection of the horizontal and project plane then these figures either lie in this plane or the horizontal and project plane traverses them. 3.2.3. The plane that is perpendicular to the frontal plane of projection is called <u>frontal and project plane</u>. In Fig. 3.18 - 3.21 a visual image and the epure of the frontal and project plane β is shown, it is determined by the traces. In Fig. 3.22, 3.23 the epure of the frontal and project plane β is shown, it is determined by the triangle DEF.
--	--

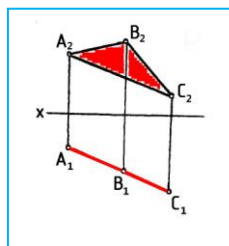


Рис. 3.16. Епюр горизонтально-проекціуючої площини, заданої $\triangle ABC$

Fig. 3.16. The epure of horizontal and project plane determined by $\triangle ABC$

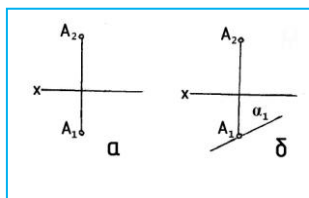


Рис. 3.17. Проведення через точку A горизонтально-проекціуючої площини α (а – початкова умова, б – через точку A проведена площина α)

Fig. 3.17. Drawing the horizontal and project plane α through the point A (a shows the initial condition, б shows the plane α drawn through the point A)

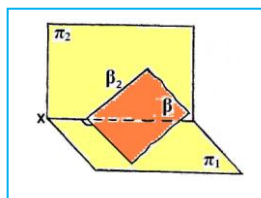


Рис. 3.18. Наочне зображення фронтально-проекціуючої площини β (β_2 – слід-проекція площини β)

Fig. 3.18. A visual image of frontal and project plane β (β_2 is the trace-projection of the plane β)

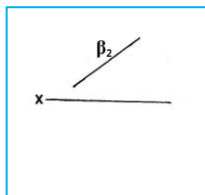


Рис. 3.19. Епюр фронтально-проекціуючої площини β (β_2 – слід-проекція площини β)

Fig. 3.19. The epure of the frontal and project plane β (β_2 is the trace-projection of the plane β)

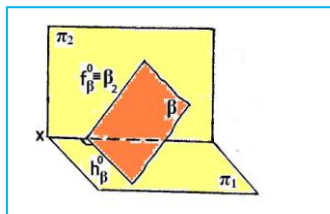


Рис. 3.20. Наочне зображення фронтально-проекціуючої площини β ($f_\beta^0 \equiv \beta_2$, $h_\beta^0 \perp x$)

Fig. 3.18. A visual image of the frontal and project plane β ($f_\beta^0 \equiv \beta_2$, $h_\beta^0 \perp x$)

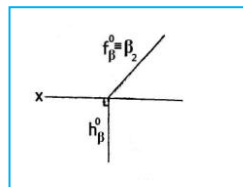


Рис. 3.21. Епюр фронтально-проекціуючої площини β ($f_\beta^0 \equiv \beta_2$, $h_\beta^0 \perp x$)

Fig. 3.18. The epure of the frontal and project plane β ($f_\beta^0 \equiv \beta_2$, $h_\beta^0 \perp x$)

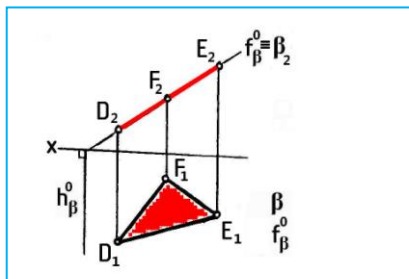


Рис. 3.22. Епюр фронтально-проекціуючої площини β з розміщенням в ній $\triangle DEF$ ($D_2E_2F_2 \equiv \beta_2$)

Fig. 3.22. The epure of the frontal and project plane β with $\triangle DEF$ being located in it ($(D_2E_2F_2 \equiv \beta_2)$)

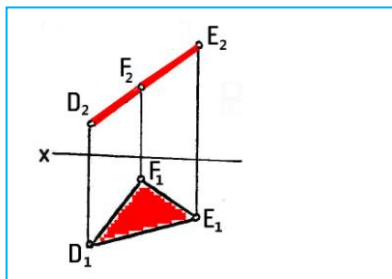


Рис. 3.23. Епюр фронтально-проекціуючої площини β , заданої $\triangle DEF$

Fig. 3.23. The epure of the frontal and project plane β determined by $\triangle DEF$

Фронтально - проекціуюча площина має такі властивості:

1. При заданні площини слідами фронтальний слід площини є слідом-проекцією цієї площини, а горизонтальний слід перпендикулярний до осі x .

2. При заданні площини іншими елементами (трикутником, двома паралельними або прямими, що перетинаються) ці елементи на площину π_2 проєкціюються в одну пряму лінію, яка є слідом-проекцією площини.

3. Фронтальні проєкції всіх точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать фронтально-проекціуючій площині, проєкціюються на фронтальний слід площини, що є слідом-проекцією, і навпаки, якщо

The frontal and project plane has the the following attributes:

1. When determining a plane by the traces, the frontal trace f_{β}^0 of the plane is the trace-projection of this plane and the horizontal trace h_{β}^0 is perpendicular to the axis x .

2. When determining a plane by other elements (triangle, two parallel or straight lines that intersect) these elements are projected on the plane π_2 in the form of one straight line which is the trace-projection of the plane.

3. Frontal projections of all points, straight lines, plane figures that belong to frontal and project plane are projected on the frontal trace of the plane which is the trace-projection and vice versa. If frontal projections of the points, straight

фронтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур збігаються зі слідом-проекцією фронтально - проекціуючої площини, то це означає, що дані фігури або лежать в цій площині, або фронтально - проекціуюча площина проходить через дані фігури.

3.2.4. Площина, яка паралельна до горизонтальної площини проєкцій, називається горизонтальною площиною або горизонтальною площиною рівня.

На рис. 3.24 дано наочне зображення горизонтальної площини α , а на рис. 3.25, 3.26 – епюр горизонтальної площини α зображений своїм слідом-проекцією α_2 , який паралельний до осі x .

На рис. 3.27 в горизонтальній площині α розміщено $\triangle ABC$, який на площину π_2 проєкціюється на слід-проекцію α_2 ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$), а на площину π_1 – в натуральну величину ($A'B'C' = H.B. \triangle ABC$).

На рис. 3.28 дано епюр горизонтальної площини, що задана $\triangle ABC$, оскільки $A'B'C' // x$.

Горизонтальна площина має такі властивості:

1. При заданні площини слідами фронтальний слід площини є слідом-проекцією цієї площини і розміщений паралельно до осі x .

lines, plane figures coincide with the trace-projection of frontal and project plane then the given figures either lie in this plane or the frontal and project plane traverses them.

3.2.4. The plane that is parallel to the horizontal plane of projection is called horizontal plane or horizontal level plane.

In Fig. 3.24 a visual image of horizontal plane α is given, and in Fig. 3.25, 3.26 the epure of the horizontal plane α is shown determined by its trace-projection α_2 which is parallel to the axis x .

In Fig. 3.27 $\triangle ABC$ is located in the horizontal plane α , it is projected on the plane π_2 on the trace-projection α_2 ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$), and on the plane π_1 it is projected in its true size ($A_1B_1C_1 = H.B. \triangle ABC$).

In Fig. 3.28 the epure of the horizontal plane that is determined by $\triangle ABC$ is given, since $A_2B_2C_2 // x$.

Horizontal plane has the following attributes:

1. When determining the plane by the traces, the frontal trace of the plane is the trace-projection of this plane and it is parallel to the axis x .

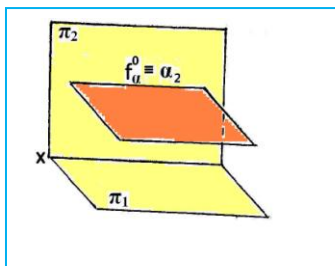


Рис. 3.24. Наочне зображення горизонтальної площини α (α_2 - слід-проекція, $\alpha_2 // x$, f_α^0 - фронтальний слід, горизонтальний слід відсутній)

Fig. 3.24. A visual image of the horizontal plane α (α_2 is the trace-projection, $\alpha_2 // x$, f_α^0 is the frontal trace, the horizontal trace is missing)

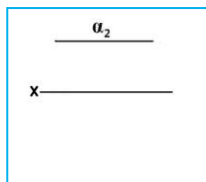


Рис. 3.25. Епюр горизонтальної площини α (α_2 - слід-проекція, $\alpha_2 // x$)

Fig. 3.25. The epure of the horizontal plane α (α_2 is the trace-projection, $\alpha_2 // x$)

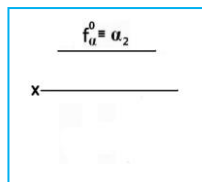


Рис. 3.26. Епюр горизонтальної площини α (α_2 - слід-проекція, $\alpha_2 // x$, $f_\alpha^0 \equiv \alpha_2$)

Fig. 3.26. The epure of the horizontal plane α (α_2 is the trace-projection, $\alpha_2 // x$, $f_\alpha^0 \equiv \alpha_2$)

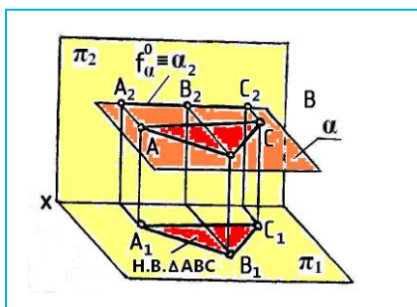


Рис. 3.27. Наочне зображення горизонтальної площини α з розміщенням в ній ΔABC ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$)

Fig. 3.27. A visual image of the horizontal plane α with ΔABC being located in it ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$)

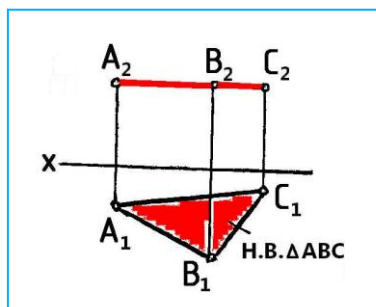


Рис. 3.28. Епюр горизонтальної площини α з розміщенням в ній ΔABC ($A_2B_2C_2 // x$)

Fig. 3.28. The epure of the horizontal plane α with ΔABC being located in it ($A_2B_2C_2 // x$)

Горизонтальний слід відсутній. 2. При заданні площини іншими елементами, наприклад трикутником, ці елементи на площину π_2 проєкціюються в одну спільну пряму лінію, яка є слідом-проєкцією і паралельна до осі x, а на площину π_1, до якої площина паралельна, - в свою натуральну величину. 3. Фронтальні проєкції точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать горизонтальній площині, проєкціюються на фронтальний слід площини, що є слідом-проєкцією. 3.2.5. Площина, яка паралельна до фронтальної площини проєкцій, називається <u>фронтальною площиною або фронтальною площиною рівня</u>. На рис. 3.29 дано наочне зображення фронтальної площини β, а на рис. 3.30, 3.31 епюр фронтальної площини β, зображений своїм слідом-проєкцією β_2, який паралельний до осі x. На рис. 3.32 у фронтальній площині β розміщено $\triangle DEF$, який на площину π_1 проєкціюється на слід-проєкцію β_1 ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$), а на площину π_2 - в натуральну величину ($\triangle D_2E_2F_2 = H.B. \triangle DEF$). На рис. 3.33 дано епюр фронтальної площини, що задана $\triangle DEF$, оскільки $D_1E_1F_1 \parallel x$.	There is no horizontal trace. 2. When determining the plane by other elements, such as triangle, these elements are projected on the plane π_2 in the form of one common straight line which is the trace-projection and is parallel to the axis x, and on the plane π_1, to which the plane is parallel they are projected in their true size. 3. Frontal projections of the points, straight lines, plane figures that belong to horizontal plane are projected on the frontal trace of the plane which is the trace-projection. 3.2.5. The plane that is parallel to the frontal plane of projection is called <u>frontal plane or frontal level plane</u>. In Fig. 3.29 a visual image of the frontal plane β is given, and in Fig. 3.30, 3.31 the epure of frontal plane β is given, determined by its trace-projection β_2 which is parallel to the axis x. In Fig. 3.32 $\triangle DEF$ is located in the frontal plane β, it is projected on the plane π_1, on the trace-projection β_1 ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$), and on the plane π_2 it is projected in its true size ($D_2E_2F_2 = H.B. \triangle DEF$). In Fig. 3.33 the epure of the frontal plane is given, it is determined by $\triangle DEF$ since $D_1E_1F_1 \parallel x$.
---	---

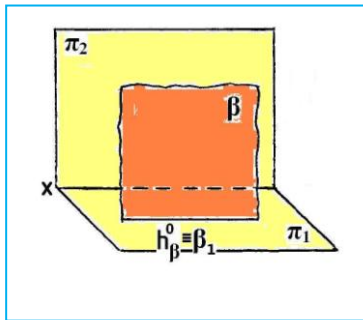


Рис. 3.29. Наочне зображення фронтальної площини β (β_1 - слід-проекція, $\beta_1 // x$, h_{β}^0 - горизонтальний слід, фронтальний слід відсутній)
 Fig. 3.29. A visual image of the frontal plane β (β_1 is the trace-projection, $\beta_1 // x$, h_{β}^0 is the horizontal trace, the frontal trace is missing)

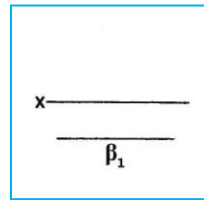


Рис. 3.30. Епюр фронтальної площини β (β_1 - слід-проекція, $\beta_1 // x$)
 Fig. 3.30. The epure of the frontal plane β (β_1 is the trace-projection $\beta_1 // x$)

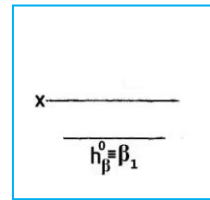


Рис. 3.31. Епюр фронтальної площини β (β_1 - слід-проекція, $\beta_1 // x$, $h_{\beta}^0 \equiv \beta_1$)
 Fig. 3.31. The epure of the frontal plane β (β_1 is the trace-projection, $\beta_1 // x$, $h_{\beta}^0 \equiv \beta_1$)

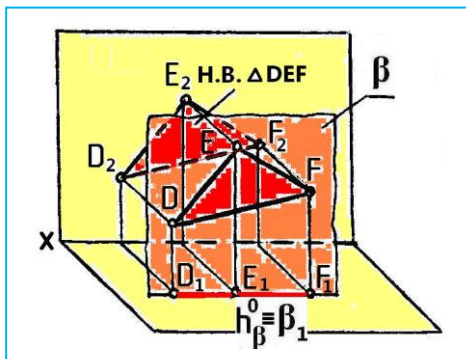


Рис. 3.32. Наочне зображення фронтальної площини β з розміщенням в ній ΔDEF ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$)
 Fig. 3.32. A visual image of the frontal plane β with ΔDEF being located in it ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$)

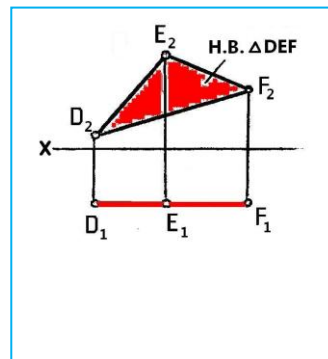


Рис. 3.33. Епюр фронтальної площини β , заданої ΔDEF ($D_1E_1F_1 // x$)
 Fig. 3.33. The epure of the frontal plane β determined by ΔDEF ($D_1E_1F_1 // x$)

Фронтальна площина має такі властивості: 1. При заданні площини слідами горизонтальний слід площини є слідом-проекцією цієї площини і розміщений паралельно до осі x. Фронтальний слід відсутній. 2. При заданні площини іншими елементами, наприклад трикутником, ці елементи на площину π_1 проєкціюються в одну спільну пряму лінію, яка є слідом-проекцією і яка паралельна осі x, а на площину π_2, до якої фронтальна площина паралельна, вона проєкціюється в свою натуральну величину. 3. Горизонтальні проєкції точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать фронтальній площині, проєкціюються на горизонтальний слід площини, що є слідом-проекцією. <u>3.3. Точка і пряма в площині</u> Точка належить площині, якщо вона лежить на прямій лінії цієї площини. Пряма лінія належить площині, якщо вона: 1) проходить через дві точки цієї площини або 2) проходить через одну точку і паралельна до прямої цієї площини. На рис. 3.34 дано площину α ($AB \cap BC$). Побудуємо в ній прямі, використовуючи зазна-	Frontal plane has the following attributes: 1. When determining the plane by the traces, the horizontal trace of the plane is the trace-projection of this plane and is parallel to the axis x. There is no frontal trace. 2. When determining the plane by other elements, such as triangle, these elements are projected on the plane π_1 in the form of one common straight line, which is the trace-projection and is parallel to the axis x, and on the plane π_2, to which the frontal plane is parallel it is projected in its true size. 3. Horizontal projections of the points, straight lines, plane figures that belong to the frontal plane are projected on the horizontal trace of the plane, which is the trace-projection. <u>3.3. The point and the straight line in the plane</u> The point belongs to the plane if it lies on the straight line of this plane. The straight line belongs to the plane if it: 1) cuts through two points of this plane or 2) cuts through one point and is parallel to the straight line of this plane. In Fig. 3.34 a plane α is given ($AB \cap BC$). Let's construct lines in it, using the following two methods.
---	---

чені два способи.

1 спосіб. Візьмемо дві точки 1 і 2 (рис. 3.35) на прямих АВ і ВС площини α . Пряма 12, що проходить через ці точки, є прямою, що належить площині α . В свою чергу, точка 3, що лежить на прямій 12, буде належати площині α , оскільки пряма 12 належить площині α .

2 спосіб. Через точку С (рис. 3.36) площини α проводимо пряму l паралельно до прямої АВ. Пряма l належить площині α і точка 4, яка лежить на ній, також буде належати площині α .

Задача. Побудувати відсутню на епюрі горизонтальну проекцію D_1 точки D, що належить площині $\alpha(\triangle ABC)$, рис. 3.37.

Оскільки через точку D не проходить будь-яка пряма площини α , то для розв'язання задачі потрібно через цю точку провести пряму, що буде належати площині, заданій трикутником.

На рис. 3.38,а,б показано розв'язування задачі 1 способом.

Якщо площина задана слідами, то принципової різниці в проведенні прямої, що лежить в цій площині, або у визначенні точки, яка належить площині, немає, оскільки задання площини слідами це не що інше, як задання площини двома

1st method. Let's take two points 1 2 (Fig. 3.35) on the lines AB and BC of the plane α . The line 12, that cuts through these points, is the line that belongs to the plane α . The point 3 which, in its turn, lies on the straight line 12, will belong to the plane α , since the line 12 belongs to the plane α .

2nd method. Draw a line l parallel to the line AB through the point C (Fig. 3.36) The line l belongs to the plane α and the point 4, which lies on it, also belongs to the plane α .

Problem. Build the missing on the epure horizontal projection D_1 of the point D, which belongs to the plane $\alpha(\triangle ABC)$, Fig. 3.37.

Since no line of the plane α crosses the point D, then, to solve the task, we need to draw a line through this point. The line will belong to the plane determined by triangle.

In Fig. 3.38,а,б the solution of the problem by the 1st method is given.

If the plane is determined by the traces, then there is no significant difference in drawing the line that lies in this plane or in defining the point that belongs to the plane, since determining the plane by the traces is nothing else but determining the plane by two intersecting lines. Their

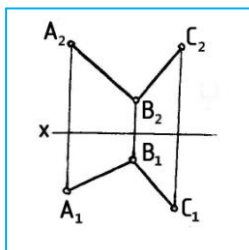


Рис. 3.34. Епюр площини α ($AB \cap BC$) – початкова умова задачі

Fig. 3.34. The epure of the plane α ($AB \cap BC$) is the initial condition of the problem

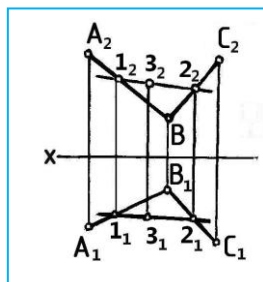


Рис. 3.35. Епюр площини α ($AB \cap BC$), якій належить пряма 12 і точка 3

Fig. 3.35. The epure of the plane α ($AB \cap BC$) to which the line 12 and the point 3 belong

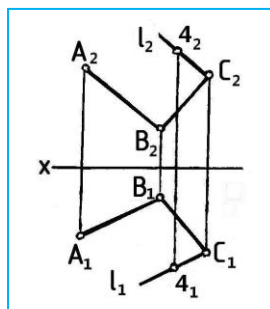


Рис. 3.36. Епюр площини α ($AB \cap BC$), якій належить пряма l і точка 4

Fig. 3.36. The epure of the plane α ($AB \cap BC$) to which the line l and the point 4 belong

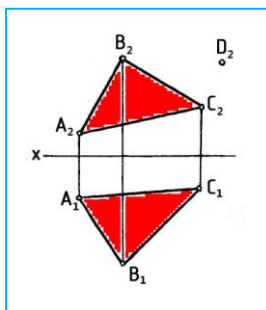


Рис. 3.37. Епюр площини α (ΔABC) – початкова умова задачі

Fig. 3.37. The epure of the plane α (ΔABC) is the initial condition of the problem

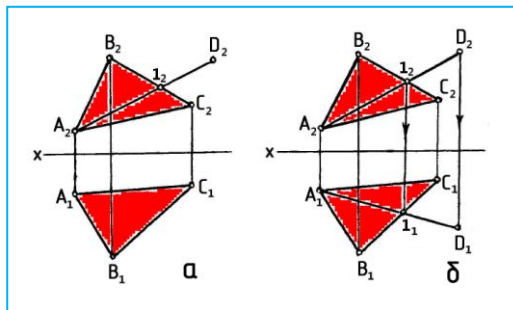


Рис. 3.38. Розв'язування задачі з початковою умовою на рис. 3.37: а – 1 дія, б – 2 дія

Fig. 3.38. Solution of the problem with the initial condition in Fig. 3.37: а – step 1, б – step 2

прямими, що перетинаються, точка перетину яких лежить на осі проєкцій. Таким чином, у разі задання площини слідами, пряма належить площині, якщо: 1) сліди прямої (тобто її дві точки) належать однойменним слідам площини або 2) пряма паралельна одному із слідів площини і має спільну точку з іншим слідом. На рис. 3.39 дано наочне зображення, а на рис. 3.40 – епюр площини α, що задана слідами, де пряма MN за <u>1 способом</u> належить площині α, оскільки дві її точки M і N лежать відповідно на слідах h_α^0 і f_α^0 площини α. Пряма h_α^1 за <u>2 способом</u> належить площині α, оскільки має спільну точку N^1 з фронтальним слідом f_α^0 і паралельна до іншого – горизонтального сліду h_α^0 площини α. Пряма h_α^1 паралельна до горизонтальної площини проєкцій π_1 і є горизонтальною прямою площини α. <u>Задача.</u> Побудувати відсутню фронтальну проєкцію K_2 точки K, що належить площині α, заданої слідами, якщо відома горизонтальна проєкція K_1 точки K (рис. 3.41). Розв'язування <u>1 способом</u> показано на рис. 3.42.	point of intersection lies on the axis of projection. Therefore, when determining the plane by the traces, the straight line belongs to the plane if: 1) the traces of the line (i.e. its two points) belong to analogous traces of the plane or 2) the line is parallel to one of the traces of the plane and has a common point with another trace. In Fig. 3.39 a visual image is given and in Fig. 3.40 the epure of the plane α is given. It is determined by the traces, where the line MN by the <u>1st method</u> belongs to the plane α, since its two points M and N lie on the traces h_α^0 and f_α^0 of the plane α. The line h_α^1 by the <u>2nd method</u> belongs to the plane α, since it has a common point N^1 with the frontal trace f_α^0 and it is parallel to the horizontal trace h_α^0 of the plane α. The line h_α^1 is parallel to the horizontal plane of projection π_1 and is a horizontal line of the plane α. <u>Problem.</u> Build the missing frontal projection K_2 of the point K, that belongs to the plane α, determined by the traces if the horizontal projection K_1 of the point K is given (Fig. 3.41). Solution by the <u>1st method</u> is given in Fig. 3.42.
---	---

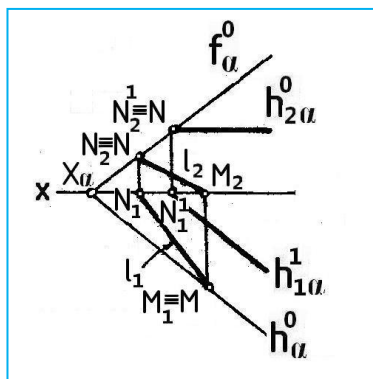


Рис. 3.40. Епюр площини $\alpha(h_a^0 \cap f_a^0)$, якій належить пряма l і пряма h_a^1

Fig. 3.40. The epure of the plane $\alpha(h_a^0 \cap f_a^0)$ to which the line l and the line h_a^1 belong

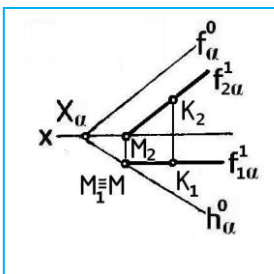


Рис. 3.43. Розв'язування задачі з початковою умовою на рис. 3.41 2 способом

Fig. 3.43. Solution of the problem with the initial condition in Fig. 3.41 by the 2nd method

Розв'язування <u>2</u> способом показано на рис. 3.43. Якщо проєкціююча площина або площина рівня задана своїм слідом-проєкцією, то цим площинам буде належати будь-яка точка і пряма лінія, відповідні проєкції яких збігаються зі слідом-проєкцією проєкціюючої або площини рівня. На рис. 3.44 точка А належить фронтально - проєкціюючій площині β, оскільки її фронтальна проєкція A_2 збігається зі слідом-проєкцією β_2 площини β. На рис. 3.45 пряма b належить горизонтально-проєкціюючій площині α, тому що її горизонтальна проєкція b_1 збігається зі слідом-проєкцією α_1 площини α. На рис. 3.46 пряма h_ω належить горизонтальній площині рівня ω, оскільки її фронтальна проєкція $h_{2\omega}$ збігається зі слідом-проєкцією ω_2 площини ω. Пряма h_ω є горизонтальною прямою, що належить площині ω. <u>3.4. Головні лінії площини</u> Головні лінії площини – це лінії рівня та лінія найбільшого схилу площини. Лінії рівня площини – прямі, що лежать в площині і паралельні одній з площин проєкцій. Це горизонталі та фронталі площини.	Solution by the <u>2nd method</u> if given in Fig. 3.43. If the project plane or the level plane is determined by its trace-projection, then any point or straight line whose projections coincide with the trace-projection of the project or the level plane will belong to these planes. In Fig. 3.44 the point A belongs to the frontal and project plane β, since its frontal projection A_2 coincides with the trace-projection β_2 of the plane β. In Fig. 3.45 the line b belongs to the horizontal and project plane α, because its horizontal projection b_1 coincides with the trace-projection α_1 of the plane α. In Fig. 3.46 the line h_ω belongs to the horizontal level plane ω, since its frontal projection $h_{2\omega}$ coincides with the trace-projection ω_2 of the plane ω. The line h_ω is a horizontal line that belongs to the plane ω. <u>3.4. The main lines of the plane</u> The main lines of the plane are the level lines and the highest slope line of the plane. The level lines of the plane are the lines that lie in the plane and are parallel to one of the planes of projection. These are horizontals and frontals of the plane.
--	---

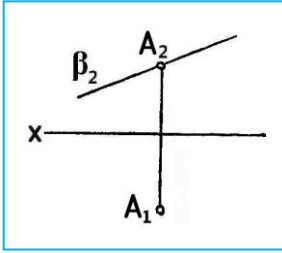


Рис. 3.44. Епюр фронтально-проекціуючої площини β , якій належить точка А
Fig. 3.44. The epure of the frontal and project plane β to which the point А belongs

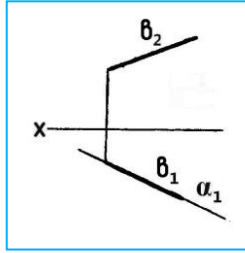


Рис. 3.45. Епюр горизонтально-проекціуючої площини α , якій належить пряма В
Fig. 3.45. The epure of the horizontal and project plane α to which the line В belongs

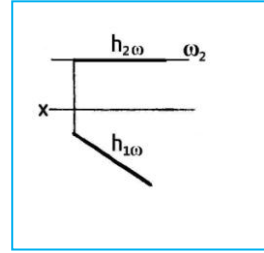


Рис. 3.46. Епюр горизонтальної площини ω , якій належить пряма h_ω
Fig. 3.46. The epure of the horizontal plane ω to which the line h_ω belongs

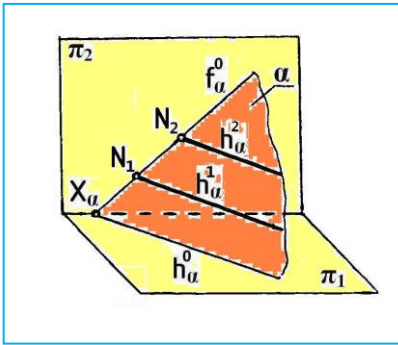


Рис. 3.47. Наочне зображення площини $\alpha(h_a^0 \cap f_a^0)$, в якій проведено горизонтальні прямі h_a^1 і h_a^2 ($h_a^1 \parallel h_a^2 \parallel h_a^0$)
Fig. 3.47. A visual image of the plane $\alpha(h_a^0 \cap f_a^0)$, horizontal lines h_a^1 and h_a^2 being drawn in it ($h_a^1 \parallel h_a^2 \parallel h_a^0$)

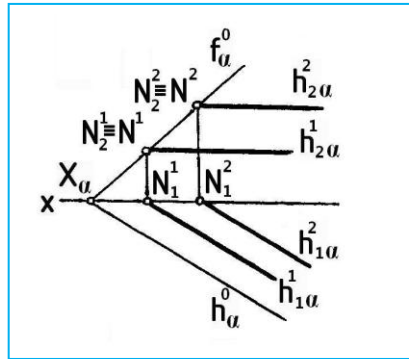


Рис. 3.48. Епюр площини $\alpha(h_a^0 \cap f_a^0)$, в якій проведено горизонтальні прямі h_a^1 і h_a^2
Fig. 3.48. The epure of the plane $\alpha(h_a^0 \cap f_a^0)$, horizontal lines h_a^1 and h_a^2 being drawn in it

3.4.1. Горизонталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до горизонтальної площини проєкцій π_1 .

На рис. 3.47 дано наочне зображення, а на рис. 3.48 – епюр площини α , що задана слідами і в якій проведені горизонталі h_α^1 і h_α^2 . Вони належать площині, оскільки мають спільні точки N^1 , N^2 з фронтальним слідом f_α^0 площини і паралельні до горизонтального сліду h_α^0 (див. рис. 3.39, 3.40). Прямі h_α^1 і h_α^2 також паралельні до площини π_1 , тому що паралельні до горизонтального сліду h_α^0 , який лежить в площині π_1 .

Таким чином, горизонталі площини мають такі властивості:

1. Всі горизонталі площини паралельні між собою і до горизонтального сліду площини $h_{0\alpha}$ ($h_{1\alpha} // h_{2\alpha} // h_{0\alpha}$).

2. Мають спільні точки з фронтальним слідом f_α^0 (точки N^1 , N^2) і паралельні до горизонтального сліду h_α^0 площини.

На рис. 3.50 за допомогою горизонтальної прямої h_α побудовано відсутню горизонтальну проєкцію точки К (див. рис. 3.49), причому спочатку проведено фронтальну проєкцію $h_{2\alpha}$ горизонталі h_α паралельно до осі x , а потім і горизонтальну $h_{1\alpha}$ паралельно до h_α^0 .

3.4.1. Horizontals of the plane are the lines that belong to the plane and are parallel to the horizontal plane of projections π_1 .

In Fig. 3.47 a visual image is given and in Fig. 3.48 the epure of the plane α determined by the traces and graphed with the horizontals h_α^1 and h_α^2 is drawn. They belong to the plane, since they have a common points N^1 , N^2 with the frontal trace f_α^0 of the plane and are parallel to the horizontal trace h_α^0 (see Fig. 3.39, 3.40). The lines h_α^1 and h_α^2 are also parallel to the plane π_1 , because they are parallel to the horizontal trace h_α^0 , that lies in the plane π_1 .

Therefore, the horizontals of the plane have the following attributes:

1. All horizontals of the plane are parallel to each other and to the horizontal trace of the plane h_α^0 ($h_\alpha^1 // h_\alpha^2 // h_\alpha^0$).

2. They have common points with the frontal trace f_α^0 (the points N^1 , N^2) and are parallel to the horizontal trace h_α^0 of the plane.

In Fig. 3.50 by means of horizontal line h_α the missing horizontal projection of the point K is constructed (see Fig. 3.49). At first a frontal projection $h_{2\alpha}$ of the horizontal h_α is drawn, it is parallel to the axis x , and then, a horizontal projection $h_{1\alpha}$ is constructed, it is parallel to h_α^0 .

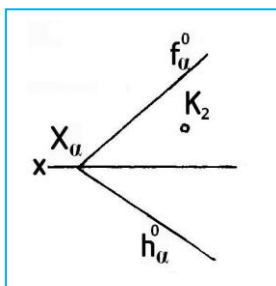


Рис. 3.49. Початкова умова задачі
Fig. 3.49. The initial condition of the problem

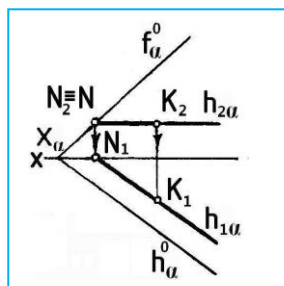


Рис. 3.50. Розв'язування задачі (рис. 3.49) за допомогою горизонтальної прямої h_a
Fig. 3.50. Solution of the problem (Fig. 3.49) by means of the horizontal line h_a

При побудові на епюрі горизонталі площини спочатку проводять її фронтальну проекцію паралельно до осі проєкцій x . На рис. 3.51 в площині ΔABC спочатку проведено фронтальну проекцію h_{2a} , а потім горизонтальну h_{1a} горизонталі h_a .

3.4.2. Фронталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до фронтальної площини проєкцій π_2 .

На рис. 3.52 дано наочне зображення, а на рис. 3.53 – епюр площини β , що задана слідами, і в якій проведені фронталі площини f_β^1 і f_β^2 .

Фронталі площини мають такі властивості:

1. Всі фронталі площини паралельні між собою і до

When constructing a horizontal of the plane on the epure, at first, its frontal projection is drawn. It should be parallel to the axis x . In Fig. 3.51 in the plane ΔABC a frontal projection h_{2a} is drawn first and then a horizontal projection h_{1a} of the horizontal h_a .

3.4.2. Frontals of the plane are the lines that belong to the plane and are parallel to the frontal plane of projections π_2 .

In Fig. 3.52 a visual image is given and in Fig. 3.53 the epure of the plane β determined by the traces and graphed with the frontals of the plane f_β^1 and f_β^2 is drawn.

The frontals of the plane have the following attributes:

1. All frontals of the plane are parallel to each other and to

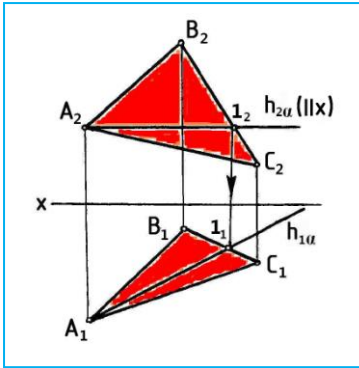


Рис. 3.51. Проведення в площині ΔABC горизонтальної прямої h_a
Fig. 3.51. Drawing of the horizontal line h_a in the plane ΔABC

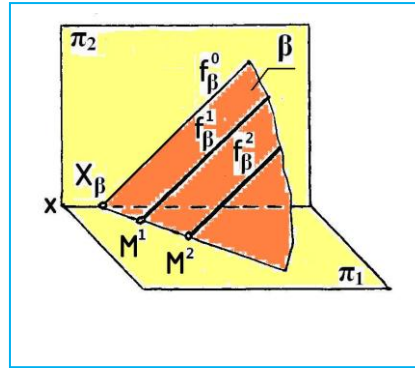


Рис. 3.52. Наочне зображення площини $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, в якій проведено фронтальні прямі f_β^1 і f_β^2 ($f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_\beta^0$)
Fig. 3.52. A visual image of the plane $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, frontal lines f_β^1 and f_β^2 being drawn in it ($f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_\beta^0$)

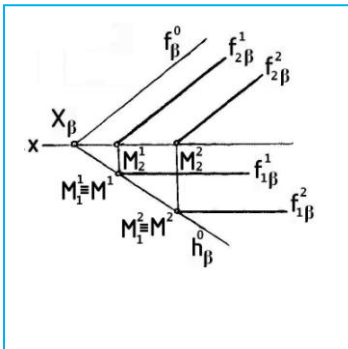


Рис. 3.53. Епюра площини $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, в якій проведено фронтальні прямі f_β^1 і f_β^2
Fig. 3.53. The epure of the plane $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, frontal lines f_β^1 and f_β^2 being drawn in it

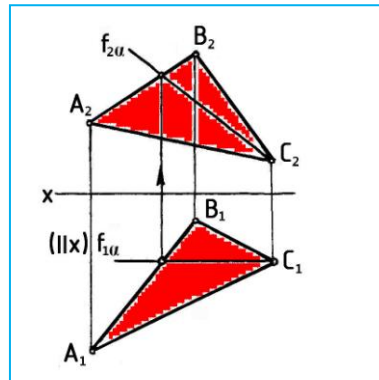


Рис. 3.54. Проведення в площині ΔABC горизонтальної прямої f_a
Fig. 3.54. Drawing of the horizontal line f_a in the plane ΔABC

фронтального сліду площини $f_{0\beta}$ ($f_{\beta}^1 // f_{\beta}^2 // f_{0\beta}$).

2. Мають спільні точки з горизонтальним слідом h_{β}^0 (точки M^1, M^2) і паралельні до фронтального сліду f_{β}^0 площини.

На рис. 3.43 за допомогою фронтальної прямої f_a^1 побудовано відсутню фронтальну проекцію K_2 точки K (рис. 3.41).

На рис. 3.54 в площині ΔABC проведено фронталь f_a , причому спочатку проведено її горизонтальну проекцію f_{1a} паралельно осі x , а потім фронтальну проекцію f_{2a} .

3.4.3. Лінія найбільшого схилу площини – пряма площини, яка перпендикулярна до горизонталей площини або до горизонтального сліду площини, при цьому кут її нахилу до площини π_1 визначає кут нахилу самої площини до тієї ж площини π_1 .

На рис. 3.55 пряма MN – лінія найбільшого схилу площини $\alpha(h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha})$, оскільки $MN \perp h_a^0, h_a^1$.

Побудову лінії найбільшого схилу площини починають з її горизонтальної проекції, яку проводять перпендикулярно (під прямими кутами) до горизонтальної проекції горизонталі площини або до її горизонтального сліду.

На рис. 3.56 побудовано епюр прямої MN – лінії найбільшого схилу, оскільки $M_1N_1 \perp h_a^0$, тобто

the frontal trace of the plane $f_{0\beta}$ ($f_{\beta}^1 // f_{\beta}^2 // f_{0\beta}$).

2. They have common points with the horizontal trace h_{β}^0 (points M^1, M^2) and are parallel to the frontal trace f_{β}^0 of the plane.

In Fig. 3.43 by means of the frontal line f_a^1 the missing frontal projection K_2 of the point K is constructed (Fig. 3.41).

In Fig. 3.54 in the plane ΔABC the frontal f_a is drawn, whilst at first its horizontal projection f_{1a} has been drawn parallel to the axis x , and then the frontal projection f_{2a} .

3.4.3. The highest slope line is the line of the plane which is perpendicular to the horizontals of the plane or to the horizontal trace of the plane. Its angle slope to the plane π_1 defines the angle slope of the plane itself to the same plane π_1 .

In Fig. 3.55 the line MN is the highest slope line of the plane α ($h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha}$), since $MN \perp h_a^0, h_a^1$.

The construction of the highest slope line begins from its horizontal projection which is drawn perpendicularly (at right angle) to the horizontal projection of the horizontal of the plane or to its horizontal trace.

In Fig. 3.56 the epure of the straight line MN is drawn, the highest slope line, since $M_1N_1 \perp h_a^0$, then

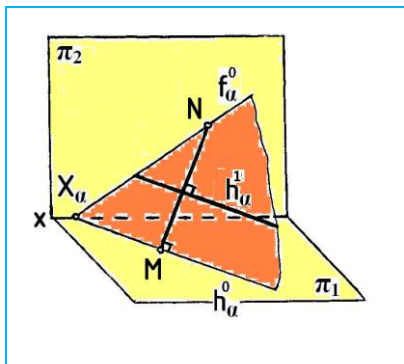


Рис. 3.55. Наочне зображення площини $\alpha(h_a^0 \cap f_a^0)$, в якій розміщено лінію найбільшого схилу MN ($MN \perp h_a^0, h_a^1$)

Fig. 3.55. A visual image of the plane $\alpha(h_a^0 \cap f_a^0)$, the highest slope line MN being located in it ($MN \perp h_a^0, h_a^1$)

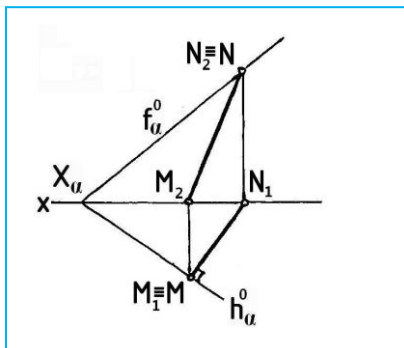


Рис. 3.56. Епюр площини $\alpha(h_a^0 \cap f_a^0)$, в якій розміщено лінію найбільшого схилу MN ($M_1 N_1 \perp h_a^0$)

Fig. 3.56. The epure of the plane $\alpha(h_a^0 \cap f_a^0)$, the highest slope line MN being located in it ($M_1 N_1 \perp h_a^0$)

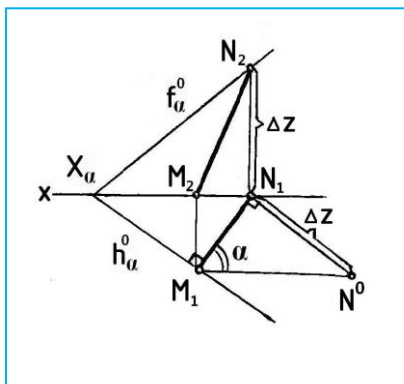


Рис. 3.57. Визначення кута нахилу α площини $\alpha(h_a^0 \cap f_a^0)$ до горизонтальної площини проєкцій π_1 (MN – лінія найбільшого схилу площини)

Fig. 3.57. Defining the the angle slope α of the plane $\alpha(h_a^0 \cap f_a^0)$ to the horizontal plane of projections π_1 (MN is the highest slope line)

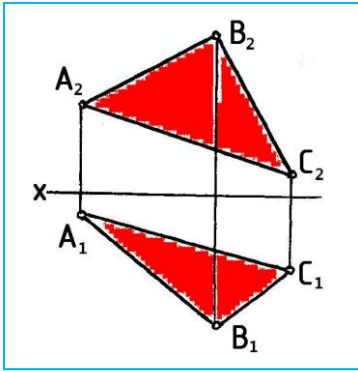


Рис. 3.58. Початкова умова задачі на визначення кута нахилу α площини β ($\triangle ABC$) до горизонтальної площини проєкцій π_1

Fig. 3.58. The initial condition of the problem for defining the angle slope α of the plane β ($\triangle ABC$) to the horizontal plane of projections π_1

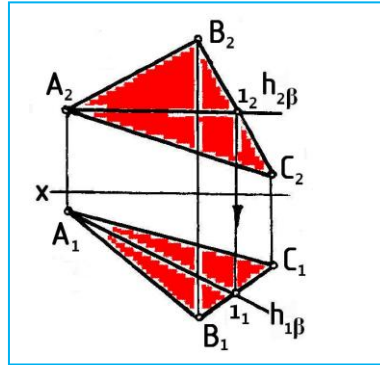


Рис. 3.59. Проведення в площині β ($\triangle ABC$) горизонтальної прямої h_β (1 дія)

Fig. 3.59. Drawing of the horizontal line h_β in the plane β ($\triangle ABC$) (step 1)

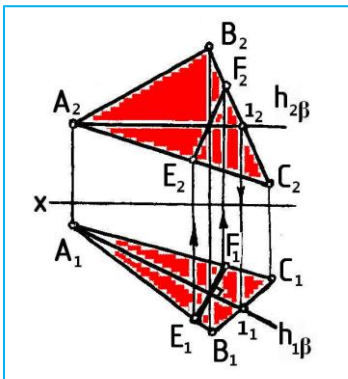


Рис. 3.60. Проведення в площині β ($\triangle ABC$) відрізка EF лінії найбільшого схилу (2 дія)

Fig. 3.60. Drawing of the segment EF of the highest slope line in the plane β ($\triangle ABC$) (step 2)

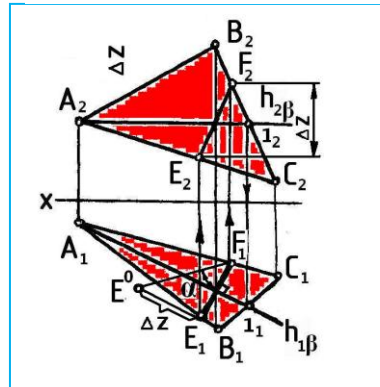


Рис. 3.61. Визначення способом прямокутного трикутника кута нахилу α площини β ($\triangle ABC$) до площини π_1

Fig. 3.61. Defining the angle slope α of the plane β ($\triangle ABC$) to the plane π_1 using the method of the right triangle

в просторі $MN \perp h_{0\alpha}$, а точки М і N належать слідам площини $\alpha(h_{\alpha}^0 \cap f_{\alpha}^0)$. На рис. 3.57 способом прямокутного трикутника визначено кут нахилу лінії найбільшого схилу MN до площини π_1 , а, отже, і кут нахилу самої площини $\alpha(h_{\alpha}^0 \cap f_{\alpha}^0)$ до площини π_1 .

На рис. 3.58 дано початкову умову задачі на визначення кута нахилу α площини β ($\triangle ABC$) до площини π_1 . На рис. 3.59-3.61 наведено графічне розв'язування цієї задачі.

the space $MN \perp h_{0\alpha}$ and the points M and N belong to the traces of the plane $\alpha(h_{\alpha}^0 \cap f_{\alpha}^0)$. In Fig. 3.57 the angle slope of the highest slope line MN to the plane π_1 is defined using the method of the right triangle, thus is the angle slope of the plane α itself ($h_{\alpha}^0 \cap f_{\alpha}^0$) to the plane π_1 .

In Fig. 3.58 the initial condition of the problem for defining the angle slope α of the plane β ($\triangle ABC$) to the plane π_1 is given. In Fig. 3.59-3.61 we can see graphical solution of this problem.

Нарисна геометрія. Розділ 4. Взаємне положення двох площин, прямої лінії та площини

4.1. Паралельність ліній та площин

Лінія паралельна до площини, якщо вона паралельна до деякої лінії цієї площини. Зворотно, площина паралельна до лінії, якщо площина містить лінію, паралельну заданій лінії.

На рис. 4.1 пряма лінія m паралельна до площини, що задана трикутником ABC , оскільки лінія m паралельна до лінії h , яка належить площині ABC . На рис. 4.2 пряма лінія m паралельна до площини, що задана слідами $h^{0\alpha}$ та $f^{0\alpha}$, оскільки лінія m паралельна до лінії 12 , яка належить площині $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$.

Descriptive geometry. Chapter 4. Mutual location of two planes, straight line and plane

4.1.Parallel relation between lines and planes

A line is parallel to a plane if it is parallel to some line in the plane. Converse, a plane is parallel to a line if the plane contains a line parallel to the given line.

In Fig. 4.1 the straight line m is parallel to the plane determined by triangle ABC since the line m is parallel to the line h which belongs to the plane ABC . In Fig. 4.2 the straight line m is parallel to the plane determined by the traces $h^{0\alpha}$ and $f^{0\alpha}$ since the line m is parallel to the line 12 which belongs to the plane $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$.

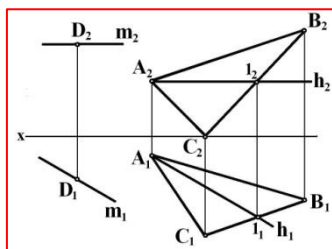


Рис. 4.1. Лінія m паралельна до площини, заданої трикутником ABC

Fig. 4.1. The straight line m is parallel to the plane determined by triangle ABC

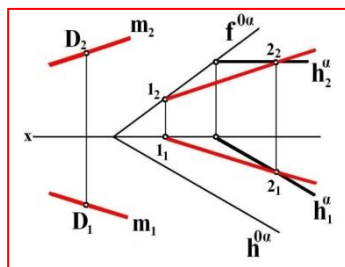


Рис. 4.2. Лінія m паралельна до площини, заданої слідами $h^{0\alpha}$ та $f^{0\alpha}$

Fig. 4.1. The straight line m is parallel to the plane determined by the traces $h^{0\alpha}$ and $f^{0\alpha}$

4.2. Паралельні площини

Дві площини паралельні, якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні до двох прямих, що перетинаються, іншої площини (рис. 4.3, 4.4). Якщо дві площини паралельні, то їх відповідні сліди паралельні (рис. 4.5, 4.6).

Якщо дві паралельні площини розтинати третьою площиною, то лінії перетину будуть паралельними.

4.2. Parallel planes

Two planes are parallel if two intersecting lines in one plane are parallel to two intersecting lines of other plane (Fig. 4.3, 4.4). If two planes are parallel their respective traces are parallel (Fig. 4.5, 4.6).

If two parallel planes cut by a third plane, the lines of intersection will be parallel.

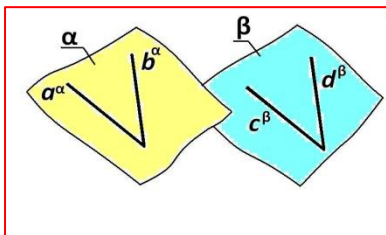


Рис. 4.3. Наочне зображення паралельних площин α і β , заданих прямими, що перетинаються

Fig. 4.3. A visual image of the parallel planes α і β , determined by two intersecting lines

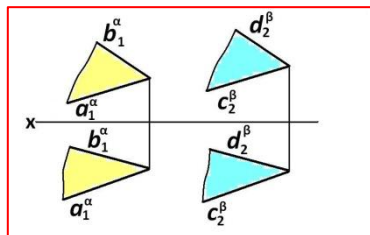


Рис. 4.4. Епюр паралельних площин α і β , заданих прямими, що перетинаються

Fig. 4.4. The epure of the parallel planes α і β , determined by two intersecting lines

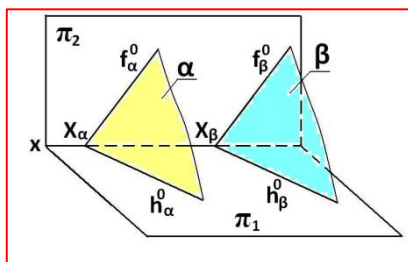


Рис. 4,5. Наочне зображення паралельних площин α і β , заданих слідами

Fig. 4. 5. A visual image of the parallel planes α і β , determined by the traces

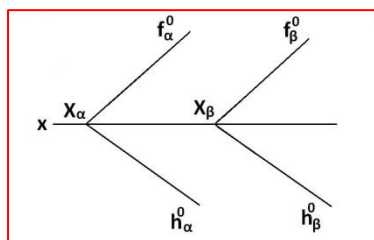


Рис. 4. 6. Епюр паралельних площин α і β , заданих слідами

Fig. 4. 6. The epure of the parallel planes α і β , determined by the traces

4.3. Площини, що перетинаються

Лінія перетину двох площин є лінією, що належить обом площинам. Тому її горизонтальний слід лежить на горизонтальних слідах кожної площини, отже, є їх точкою перетину. Фронтальний слід лінії перетину лежить в перетині фронтальних слідів. Лінія, що з'єднає ці два сліди є шуканою лінією перетину (рис. 4.7).

Яка-небудь пара слідів не перетинається в межах креслення

Проведемо допоміжну площину паралельно до площин проєкцій. Ця площина перетне задані площини по лініях. Ці лінії перетнуться в точці шуканої лінії перетину. Друга така ж допоміжна площина буде подібним чином визначати другу точку шуканої лінії. Лінія, що проходить через ці дві точки є шуканою лінією перетину двох площин.

4.3. Intersecting planes

The line of intersections of two planes is a line to both planes. Therefore its horizontal piercing point (the horizontal trace of the common line) lies in the horizontal traces of each plane, hence there is a their point of intersection. The frontal piercing point of the line of intersection (the frontal trace of the common line) lies at the intersection of frontal traces. The line joining these two piercing points is the required line of intersection (fig. 4.7, 4.8).

Either pair of traces do not intersect on limits of drawing

Draw an auxiliary plane parallel to the plane of projections. This plane will cut from the given planes along lines. These lines will intersect at the point of the required line of intersection. A second such auxiliary plane will be the same manner to determine a second point on the required line. The line passing through these two points is required line of intersection of two planes.

На рис. 4.9 допоміжна площина паралельна δ до горизонтальної площини проєкцій.

Два сліди площин, що перетинаються, паралельні

В цьому випадку лінія перетину паралельна до пари паралельних слідів. Отже, відповідні проєкції лінії перетину паралельні до них (рис. 4.10).

In Fig. 4.9 auxiliary plane δ is parallel to the horizontal plane of projections.

Two traces of intersecting planes are parallel

In this case the line of intersection is parallel to the pair of parallel traces. Hence respective projections of the line of intersection is parallel to their (Fig. 4.10).

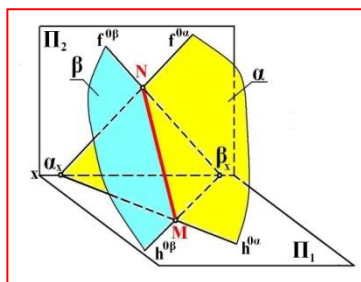


Рис. 4.7. Побудова лінії перетину двох площин α і β на наочному зображенні (сліди двох площин перетинаються в межах креслення)

Fig. 4.7. The construction of the line of intersection of two planes α and β on the visual image (traces of two planes intersect on limits of drawing)

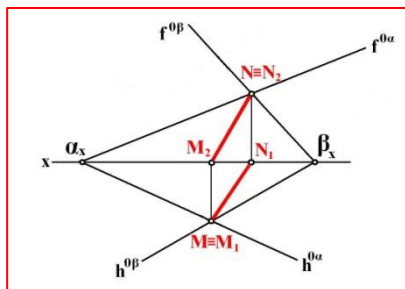


Рис. 4.8. Побудова лінії перетину двох площин α і β на епюрі (сліди двох площин перетинаються в межах креслення)

Fig. 4.7. The construction of the line of intersection of two planes α and β on the epure (traces of two planes intersect on limits of drawing)

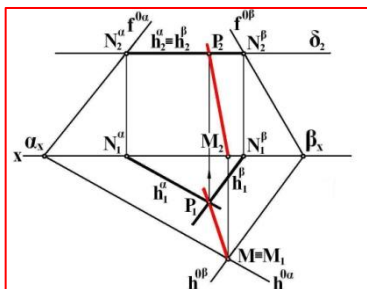


Рис. 4.9. Побудова лінії перетину двох площин α і β на епюрі (фронтальні сліди не перетинаються в межах креслення)

Fig. 4.9. The construction of the line of intersection of two planes α and β on the epure (frontal traces do not intersect on limits of drawing)

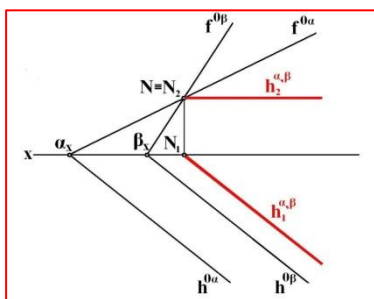


Рис. 4.10. Побудова лінії перетину двох площин α і β (горизонтальні сліди площин паралельні)

Fig. 4.10. The construction of the line of intersection of two planes α and β (horizontal traces of planes are parallel)

4.4. Перетин лінії та площини

Нехай лінія l перетинає площину α (рис. 4.11). Точку перетину буде визначено, якщо буде знайдено, де лінія l перетинає яку-небудь лінію площини α . Ця лінія не може, проте, бути будь-якою, випадково вибраною, в площині α , оскільки така лінія, можливо, не перетинається з лінією l . Нехай допоміжну площину β проведено через лінію l . Площина β перетне площину α по лінії m . Ця лінія m є лінією площини α , з якою в точці

4.4. The intersection a line and a plane

Let a line l intersects a plane α (fig. 4.11). The point intersection will be determined if we find where line l intersects a either line in plane α . This line cannot, however, be any line chosen random in plane α , for such a line will probably not intersect by the line l . Let a auxiliary plane β be passed through the line l . The plane β will intersect the plane α in a line m . This line m is a line in the plane α which is intersected by the line l

К перетинається лінія l . Отже, точка К є шуканою точкою, в якій лінія l перетинає площину α .

Горизонтально-проекціююча або фронтально-проекціююча площина є найбільш зручною як допоміжна площина β для розв'язання такої задачі.

Точку перетину прямої лінії з площиною загального положення можна визначити, використовуючи горизонтально-проекціюючу або фронтально-проекціюючу січну допоміжну площину, яку проведено через лінію l . Лінія перетину 12 січної площини β із заданою площиною загального положення α та задана лінія l повинні перетинатися або бути паралельними тому, що вони лежать в одній горизонтально-проекціюючій січній площині β (рис. 4.12). Оскільки січна площина з'являється як лінія розрізу на горизонтальній площині проєкцій, то зв'язок між лінією перетину 12 та заданою лінією l не є очевидним на горизонтальній проєкції. Фронтальна площина проєкцій, проте, виявляє цей зв'язок. Фронтальні проєкції ліній 12 та l перетинаються на фронтальній площині проєкцій. Це є доказом того, що точка К

at the point K. Hence the point K is the required point in which the line l intersects the plane α .

Horizontal and project plane (horizontal – projecting plane) or frontal and project plane (frontal – projecting plane) is the most convenient as a auxiliary plane β for such task solution.

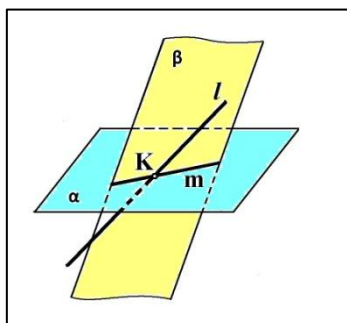
The point of intersection of a line with a plane of general position (oblique plane) can be determined by using a horizontal – projecting or frontal – projecting cutting auxiliary plane which be passed through the line l . The line of intersection of the cutting plane with the given oblique plane and the given line must intersect or be parallel because they both lie in the common horizontal – projecting (vertical) cutting plane (Fig. 4.12). Since the cutting plane appears as an edge in the plan view (in the horizontal plane of projections), the relationship between the line of intersection and the given line is not apparent in the plane view (horizontal projection). The related view (the frontal plane of projections), however, reveals this relationship. Should the frontal projections of the two lines 12 and l intersect in the related view, it is evident that

є спільною точкою заданої площини α та лінії l і тому визначає слід заданої лінії l на заданій площині α .

На рис. 4.13 задано горизонтальну та фронтальну проекції площини загального положення та прямої l . Горизонтально-проекціююча січна площина β , яку проведено через задану пряму l , з'являється як лінія розрізу β_1 на горизонтальній проекції. Площина β містить лінію l . Перетином заданої площини ABC та горизонтально-проекціюючої січної площини β , що містить l , є лінія 12. І лінія l , і лінія 12 лежать у горизонтально-проекціюючій січній площині β . Їх фронтальні проекції перетинають одна одну в точці K_2 на фронтальній проекції. Точка K знаходиться на лінії l , вона також знаходиться в площині ABC тому, що лінія 12 перебуває у площині ABC. Отже, точка K є шуканою точкою, спільною для лінії l та площини ABC. Вона зараз може бути спроекційована на горизонтальну проекцію. Використовуємо спостерегаючи візуалізацію, щоб визначити, яка частина лінії l є видимою на кожній проекції.

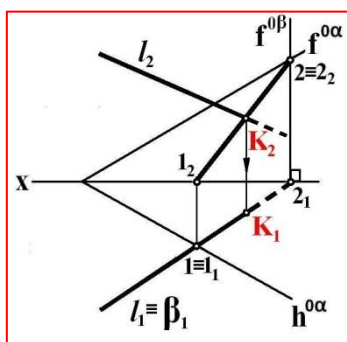
the point K of intersection is common to both the given plane α and given line l and therefore determines the pierce point of the given line l and the given plane α .

In Fig. 4.13 the oblique plane ABC and the line l are given in both the horizontal and frontal projections. A horizontal-projecting cutting plane β is passed through the given line l , appears as an edge β_1 in the horizontal projection. The plane β coincidental with and containing the line l . The intersection of the given plane ABC and the horizontal-projecting cutting plane β containing l is the line 12. The lines l and 12 both lie in the horizontal-projecting cutting plane β . Their frontal projections intersect each other at point K_2 in the frontal projection. Since point K is on line l , it is also on plane ABC because line 12 is on plane ABC. Therefore point K is the required point, being common to both the line l and the given plane ABC. It can now be projected to the horizontal projection. Use careful visualization (method of collinear points) to determine what portion of the line should be visible in each projection.



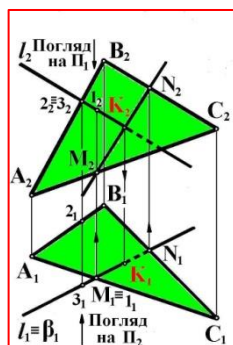
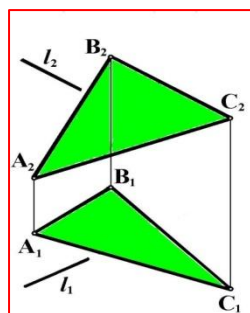
**Рис. 4.11. Визначення на
наочному зображенні точки K
перетину прямої l з
площиною α**

Fig. 4.11. Determination of the
point K of the intersection of the
line l with the given plane α
on the visual image



**Рис. 4.12. Визначення на
епюрі точки K перетину
прямої l з площиною α**

Fig. 4.11. Determination of
the point K of the
intersection of the line l with
the given plane α on the
epure



**Рис. 4.13. Визначення на епюрі точки K перетину прямої l з
площиною, що задана трикутником ABC**

Fig. 4.13. Determination of the point K of the intersection of the line l with
the plane determined by triangle ABC on the epure

4.5. Перетин двох відсіків площин загального положення

Лінією перетину двох площин є пряма лінія, для побудови якої достатньо визначити дві точки, спільні для двох площин, або одну точку і напрям лінії перетину площин.

Нехай потрібно визначити лінію перетину трикутника ABC з площиною, яка не визначена у довжину, проте обмежена у ширину паралельними лініями k і s (рис. 4.14). Перетин може бути знайдено без знаходження слідів якої-небудь площини, застосовуючи попередній метод таким чином. Використовуємо допоміжну площину α , яка проходить через лінію s і є перпендикулярною до Π_1 (горизонтальної площини проєкцій). Знаходимо, що лінія s перетинає площину трикутника ABC в точці N (лінія 12 є лінією перетину допоміжної площини α з площиною трикутника ABC). Використовуємо допоміжну площину γ , яка проходить через лінію k і є перпендикулярною до Π_1 і Знаходимо, що лінія k перетинає площину трикутника ABC в точці M (лінія 34 є лінією перетину допоміжної площини γ з площиною трикутника ABC).

Якщо обидві площини на рис. 4.14 вважаються непрозорими, кожна з них повинна закривати

4.5. The intersection of two limited planes of general position

The line of intersection of two planes is a straight line, for the construction of which it is sufficient to determine two points that are common to the two planes, or one point and the direction of the line of intersection of the planes.

Let it be required to find the line of intersection of the triangle ABC with the plane, indefinite in length, but limited in width by the parallel lines k and s (Fig. 4.14). The intersection can be found, without finding the traces of either plane, by applying the preceding method, as follows. Using the auxiliary plane α which passes through the line s and is perpendicular to Π_1 (horizontal plane of projection). We find that the line s intersects the plane of the triangle ABC in the point N (line 12 is the line of intersection of auxiliary plane γ with the plane of the triangle ABC). Using the auxiliary plane γ which passes through the line k and is perpendicular to Π_1 , we find that the line k intersects the plane of the triangle ABC in the point M (line 34 is the line of intersection of auxiliary plane γ with the plane of the triangle ABC).

If both the planes of Fig. 4.14 are considered to be opaque, each of them must hide a portion of the

частину іншої. Видимість будь-якої проекції повинна визначатися за допомогою інформації, отриманої з іншої проекції.

Таким чином, щоб визначити видимість горизонтальної проекції, візьмемо будь-яку точку, в якій перетинаються проекції двох ліній, що не знаходяться в одній і тій самій площині. Наприклад, розглянемо точку, де k перетинає A_1B_1 (k_1 перетинає A_1B_1). В дійсності це проекція двох точок: 3 на лінії AB (3_1 на лінії A_1B_1), and 5 іна k : (5_1 на k_1). Проекціюємо ці точки на Π_2 , отримуємо 3_2 і 5_2 . Завдяки цим проекціям на Π_2 побачимо, що точка 3 (3_2) вище, ніж точка 5 (5_2), отже, AB проходить вище k . Тому на горизонтальній проекції A_1B_1 , яка містить 3_1 є видимою лінією.

Аналогічно визначається видимість на фронтальній проекції. Почніть з будь-якої точки, де дві проекції ліній, що не знаходяться в одній площині, перетинають одна одну, наприклад, де s_2 перетинає A_2B_2 . Спроекуйте горизонтальну проекцію цих точок, щоб знайти, яка лінія знаходиться перед іншою. У даному випадку точка 7 в s знаходиться перед точкою 6 в AB , тому s_2 видно. І так далі, поки не буде знайдена повна видимість.

them must hide a portion of the other. The visibility of either projection must be determined by means of information obtained from the other projection.

Thus, to determine the visibility of the horizontal-projection, take any point which intersect the projections of two lines in is not in the same plane. For example, consider the point where k intersects AB (k_1 intersects A_1B_1). This is actually the projection of two points, 3 in the line AB (3_1 in the line A_1B_1), and 5 in k : (5_1 in k_1). Project these points to the Π_2 , obtaining 3_2 and 5_2 . From these projections we see that the point 3 (3_2) is higher than the point 5 (5_2); that is, AB passes above k . Therefore, in the Π_1 -projection, A_1B_1 which contains 3_1 , is the visible line.

The visibility of the frontal projection is similarly determined. Begin at any point where the two projections of lines not in the same plane cross each other, as for instance where s_2 intersects A_2B_2 . Project the horizontal projection of these points to find which line is in front of the other. In this case, point 7 in s in front of point 6 in AB , therefore s_2 is visible. And so on until the complete visibility is found.

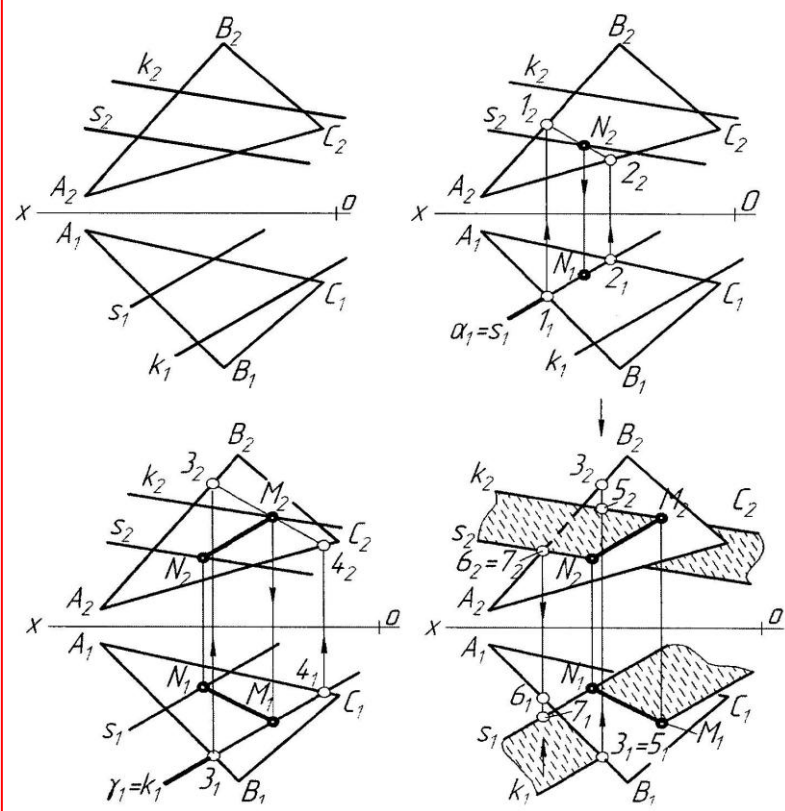


Рис. 4.14. Побудова лінії перетину двох відсіків площин загального положення

Fig. 4.14. The construction of the line of intersection of two limited planes of general position

4.6. Перпендикулярність прямої та площини, двох площин

Ознака перпендикулярності прямої до площини: пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, цієї площини. На рис. 4.15 точка K – точка перетину прямої n з площиною Σ . В цій точці перетинаються прямі a і b площини Σ . Пряма n перпендикулярна до площини Σ , оскільки вона перпендикулярна до двох прямих a і b , що перетинаються. Площину Σ (рис. 4.16) можна розглядати як геометричне місце прямих, перпендикулярних до прямої n .

Оскільки $n \perp \Sigma$, то, можна сказати, що задана площина Σ перпендикулярна до прямої n . Це означає, що довільна пряма, наприклад c , площини Σ , що проходить через точку K , буде перпендикулярною до прямої n . Пряма m , яка не проходить через точку K , також буде перпендикулярною до прямої n , незважаючи на те, що m і n є мимобіжними прямими, оскільки кут між мимобіжними прямими дорівнює куту між паралельними до них прямими, що перетинаються.

При проведенні на епюрі прямої, перпендикулярної до площини, в останній вибирають не будь-які дві прямі, що перетинаються, а прямі рівня. Це

4.6. Perpendicularity of the straight line and the plane, two planes

The sign of the perpendicularity of the straight line to the plane: straight line is perpendicular to the plane, if it is perpendicular to two intersecting straight lines of this plane. In fig. 4.15 the point K is the point of intersection of the line n with the plane Σ . At this point the straight lines a and b belonging to the plane Σ intersect. The straight line n is perpendicular to the plane Σ , since it is perpendicular to two intersecting straight lines a and b . The plane Σ (fig. 4.16) can be regarded as a geometric space of lines perpendicular to the line n .

Since $n \perp \Sigma$, then we can say that the given plane Σ is perpendicular to the line n . This means that an arbitrary straight line, for example c , of a plane Σ passing through a point K , will be perpendicular to the line n . A straight line m , which does not pass through the point K , will also be perpendicular to the line n , despite the fact that m and n are skew straight lines, since the angle between the skew straight lines is equal to the angle between the intersecting lines parallel to them.

When passing a straight line perpendicular to the plane in the epure, in the latter, not any two intersecting straight lines are chosen, but a level lines. This is due

обумовлено тим, що за правилом проєкціювання прямого кута (див. 2.7), прямий кут, утворений двома прямими, одна з яких є прямою рівня, проєкціюється на площину проєкцій, до якої пряма рівня паралельна, також прямим кутом.

Пряма n перпендикулярна до площини α , яку задано слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$, оскільки вона перпендикулярна до прямих рівня цієї площини – горизонталі h^α і фронталі f^α , які перетинаються в точці K : $n \perp h^\alpha, f^\alpha$; $K = h^\alpha \cap f^\alpha \Rightarrow n \perp \alpha (h^\alpha \cap f^\alpha)$, рис. 4.17.

to the fact that, according to the rule of projection of a right angle, a right angle formed by two straight lines, one of which is a level line, is projected in the projection plane to which the level line is parallel, also at right angle.

The straight line n is perpendicular to the plane α given by the traces $h^{0\alpha}$ and $f^{0\alpha}$, since it is perpendicular to the level lines of this plane, namely to the horizontal h^α and frontal f^α , which intersect at the point K : $n \perp h^\alpha, f^\alpha$; $K = h^\alpha \cap f^\alpha \Rightarrow n \perp \alpha (h^\alpha \cap f^\alpha)$, fig. 4.17.

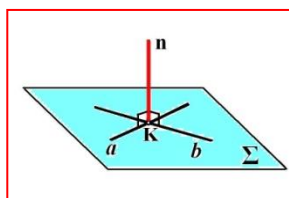


Рис. 4.15. Пряма n перпендикулярна до площини Σ

Fig. 4.15. The straight line n is perpendicular to the plane Σ

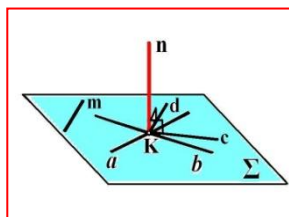


Рис. 4.16. Площина Σ як геометричне місце прямих, перпендикулярних до прямої n

Рис. 4.16. The plane Σ as a geometric space of lines perpendicular to the line n

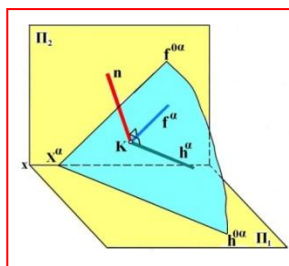


Рис. 4.17. Пряма n перпендикулярна до площини α

Fig. 4.17. The straight line n is perpendicular to the plane α

Горизонтальна проекція n_1 прямої n перпендикулярна до горизонтальної проекції h_1^α горизонталі h^α або до горизонтального сліду $h^{0\alpha}$ площини α: $n_1 \perp h_1^\alpha, h^{0\alpha}$ (hbc/ 4.18). Фронтальна проекція n_2 прямої n перпендикулярна до фронтальної проекції f_2^α фронталі f^α або до фронтального сліду $f^{0\alpha}$ площини α: $n_2 \perp f_2^\alpha, f^{0\alpha}$ (рис. 4.19). На епюрі проекції прямої, перпендикулярної до площини, проводять: горизонтальну – перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі площини або до її горизонтального сліду; фронтальну – перпендикулярно до фронтальної проекції фронталі площини або до її фронтального сліду: $n_1 \perp h_1^\alpha, h^{0\alpha}; n_2 \perp f_2^\alpha, f^{0\alpha}$ Пряма n перпендикулярна до площини α, оскільки $n_1 \perp h^{0\alpha}$ і $n_2 \perp f^{0\alpha}$ (рис. 4.20). Пряма n перпендикулярна до площини α, оскільки $n_1 \perp h_1^\alpha$ і $n_2 \perp f_2^\alpha$ (рис. 4.21). Ознака перпендикулярності двох площин: <i>дві площини перпендикулярні, якщо одна з них містить пряму, перпендикулярну до іншої площини.</i> Можна сказати і таким чином: дві площини перпендикулярні, якщо одна з них проходить через пряму, перпендикулярну до іншої площини.	The horizontal projection n_1 of the straight line n is perpendicular to the horizontal projection h_1^α of the horizontal line h^α or to the horizontal trace $h^{0\alpha}$ of the plane α: $n_1 \perp h_1^\alpha, h^{0\alpha}$ (fig. 4.18). The frontal projection n_2 of the straight line n is perpendicular to the frontal projection f_2^α of the frontal line f^α or to the frontal trace $f^{0\alpha}$ of the plane α: $n_2 \perp f_2^\alpha, f^{0\alpha}$ (fig. 4.19). In the epure the projections of the line perpendicular to the plane, carry out: the horizontal - perpendicular to the horizontal projection of the horizontal line or to the horizontal trace of the plane; frontal - perpendicular to the frontal projection of the frontal line or to the frontal trace of the plane: $n_2 \perp f_2^\alpha, f^{0\alpha}; n_1 \perp h_1^\alpha, h^{0\alpha}; n_2 \perp f_2^\alpha, f^{0\alpha}$. The line n is perpendicular to the plane α, since $n_1 \perp h^{0\alpha}$ and $n_2 \perp f^{0\alpha}$ (fig. 4.20). The line n is perpendicular to the plane α, since $n_1 \perp h_1^\alpha$ and $n_2 \perp f_2^\alpha$ (fig. 4.21). The sign of perpendicularity of two planes: two planes perpendicular, if one of them contains a straight line perpendicular to another plane. One can say this: two planes are perpendicular, if one of them passes through a straight line, perpendicular to another plane.
--	--

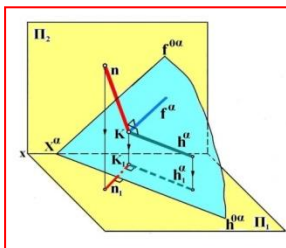


Рис. 4.18. Проведення горизонтальної проекції n_1 прямої n

Fig. 4.18. Drawing a horizontal projection n_1 of the straight line n

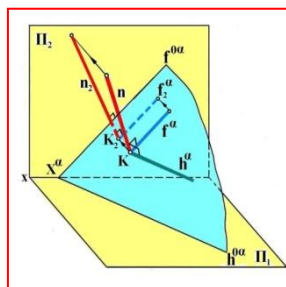


Рис. 4.19. Проведення фронтальної проекції n_2 прямої n

Fig. 4.19. Drawing a frontal projection n_2 of the straight line n

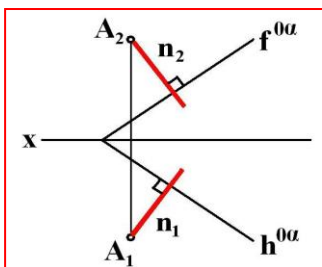


Рис. 4.20. Пряма n перпендикулярна до площини α ($h^{0a} \cap f^{0a}$)

Fig. 4.20. The line n is perpendicular to the plane α ($h^{0a} \cap f^{0a}$)

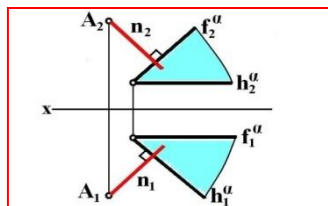


Рис. 4.21. Пряма n перпендикулярна до площини α ($h^a \cap f^a$)

Fig. 4.21. The line n is perpendicular to the plane α ($h^a \cap f^a$)

Нарисна геометрія. Розділ 5. Способи перетворення проєкцій <u>5.1. Мета застосування способів перетворення проєкцій</u> Трудомісткість графічного розв'язування задачі багато в чому залежить від того, яке положення відносно площин проєкцій займають геометричні фігури, що входять в початкову умову задачі. Орієнтуючись на вісь проєкцій, можна за розміщенням проєкцій геометричних фігур відносно осі проєкцій судити про їх положення в просторі. Приклади епюрів геометричних фігур, коли розміщення їх проєкцій відносно осі проєкцій або самих фігур відносно площин проєкцій, <u>дозволяє</u> без графічних побудов або з мінімальною їх кількістю дати відповідь на поставлену задачу: Н.В. трикутника ABC, площина якого паралельна до Π_1, визначено без графічних побудов: $A_1B_1C_1 = \text{Н.В. } \triangle ABC$ (рис. 5.1); лінію 12 перетину горизонтально-проєкціюючої площини α з площиною загального положення, заданої трикутником ABC, визначено за мінімальною кількістю графічних побудов (рис. 5.2). Приклади епюрів геометричних	Descriptive geometry. Chapter 5. Methods of transformation of projections <u>5.1. The purpose of applying methods of transformation of projections</u> The complexity of the graphical solution of a problem largely depends on the position of geometric figures that are included in the initial condition of the problem in relation to projection planes. Focusing on the projection axis, it is possible to judge the position of the geometric figures relative to the projection axis for their location in space. Examples of epures of geometric figures, when the location of their projections relative to the axis of projections or the figures themselves with respect to projection planes, <u>allows</u> graphic constructions, or with a minimum number of them, to give an answer to the problem: true size of triangle ABC, whose plane is parallel to Π_1, is defined without graphical constructions: $A_1B_1C_1 = \text{true size (natural value – N.V.) } \triangle ABC$ (fig. 5.1); the line 12 of intersection of the horizontal projection plane α with the plane of the general position given by the triangle ABC is determined by the minimum number of graphic constructions (fig. 5.2). Examples of epures of geometric
--	---

фігур, коли розміщення їх проєкцій відносно осі проєкцій або самих фігур відносно площин проєкцій, **не дозволяє** без значних графічних побудов дати відповідь на поставлену задачу:

визначення безпосередньо за епюром Н.В. трикутника ABC, який займає загальне положення відносно Π_1 і Π_2 , не є можливим, оскільки площина трикутника не паралельна до Π_1 і Π_2 , тому його проєкції мають спотворений вигляд порівняно з Н.В. самого трикутника. Для визначення його Н.В. потрібно виконати додаткові графічні побудови, наприклад, визначити Н.В. кожної сторони, а потім за трьома сторонами побудувати Н.В. трикутника ABC (рис. 5.3);

визначення лінії перетину двох площин загального положення, заданих паралельними прямими a і b та прямими c і d , що перетинаються, можливе лише за допомогою додаткових графічних побудов, зокрема за відомим алгоритмом проведення допоміжних січних площин (рис. 5.4).

figures, when the location of their projections relative to the axis of projections or the figures themselves relative to the projection planes, **does not allow**, without significant graphic constructions, to give an answer to the problem:

determination directly behind the epure N.V. of the triangle ABC, which occupies the general position relative to Π_1 and Π_2 , is not possible, since the plane of the triangle is not parallel to Π_1 and Π_2 , so its projections have a distorted appearance compared to N.V. of the triangle itself. To determine his N.V. it is necessary to perform additional graphic constructions, for example, to determine N.V. on each side, and then on the three sides to construct N.V. of the triangle ABC (fig. 5.3);

determination of the line of intersection of two planes of general position given by parallel intersecting lines a, b and c, d . This is possible only with the help of additional graphic constructions, in particular, for the well-known algorithm for supporting secondary planes (fig. 5.4).

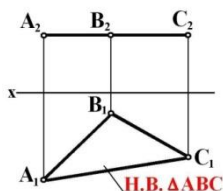


Рис. 5.1. Визначення натуральної величини трикутника ABC

Fig. 5.1. Determination of the natural value of a triangle ABC

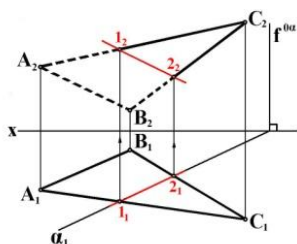


Рис. 5.2. Визначення лінії перетину двох площин
Fig. 5.2. Determination of the line of intersection of two planes

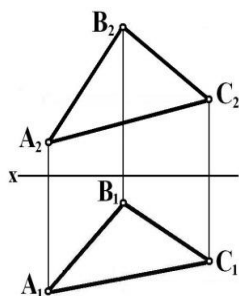


Рис. 5.3. Визначення натуральної величини трикутника ABC
Fig. 5.3. Determination of the natural value of a triangle ABC

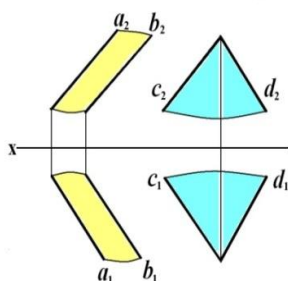


Рис. 5.4. Визначення лінії перетину двох площин
Fig. 5.4. Determination of the line of intersection of two planes

Наведені приклади (рис. 5.1-5.4) показують, що проекції геометричних фігур можуть бути зручними та забезпечувати просте розв'язування задачі. Це має місце за частковим розміщенням прямих та плоских геометричних фігур відносно площин проекцій, коли фігури перпендикулярні або паралельні до площин проекцій. Проекції геометричних фігур можуть бути незручними, вони потребують для розв'язування тієї ж задачі додаткових, часом громіздких, графічних побудов. Це зазвичай буває за загальним розміщенням геометричних фігур відносно площин проекцій.

Метою способів перетворення проекцій є перехід від загального положення, незручного для розв'язування задач, за яким геометричні фігури проєкціюються у спотвореному вигляді, до часткового положення, зручного, який забезпечує простий розв'язок задачі, коли величина та форма геометричної фігури проєкціюються без спотворення. Крім того, при переході від загального до часткового положення полегшується розв'язування задач, пов'язаних з побудовою точок та ліній перетину геометричних фігур. При цьому кінцевий результат перетворень повинен давати відповідь на розв'язування задачі.

The examples (fig. 5.1–5.4) given show that projections of geometric figures can be convenient and provide a simple solution to the problem. This occurs in the partial position of straight and plain geometric figures relative to the projection planes, when the figures are perpendicular or parallel to the projection planes. Projections of geometric figures can be uncomfortable, they require solving the same problem of additional, sometimes cumbersome, graphic constructions. This is usually the general position of geometric figures relative to projection planes.

The purpose of the methods of transformation of projections is the transition from the general position, which is uncomfortable for the solution of problems by which geometric figures are projected in a distorted form, to a partial position, convenient, which provides a simple solution of the problem, when the size and shape of the geometric figure are projected without distortion. In addition, the transition from general to partial position makes it easier to solve problems related to the construction of points and lines of intersection of geometric shapes. In this case, the final result of the transformations should give an answer to the problem solving.

5.2. Спосіб заміни площин проєкцій

Суть способу заміни площин проєкцій полягає у тому, що геометричні фігури не змінюють в просторі свого положення, а система площин проєкцій Π_2/Π_1 (стара система) доповнюється новими площинами проєкцій Π_4, Π_5 , що утворюють з Π_2, Π_1 або між собою нову систему площин проєкцій, відносно якої геометричні фігури займають часткове положення, зручне для розв'язування даної задачі.

Розглянемо графічну сутність способу на прикладі проєкціювання точки (рис. 5.5).

Уводимо нову площину проєкцій Π_4 , розмішуючи її перпендикулярно до Π_1 . Π_4 з Π_1 перетинаються по новій осі проєкцій x_1 , яку можна розглядати як слід-проєкцію Π_4 на Π_1 . Утворилася нова система площин проєкцій $x_1\Pi_4/\Pi_1$, в якій збереглася проєкція A_1 на Π_1 (задана проєкція) та побудована проєкція A_4 на Π_4 (нова проєкція). Відстань точки A до Π_1 дорівнює відстані A_2 до осі x , а також дорівнює відстані A_4 до нової осі x_1 . Зазначені відстані дорівнюють z_A . Це дозволяє, маючи задані проєкції A_1 і A_2 в системі $x\Pi_2/\Pi_1$, побудувати нову проєкцію A_4 точки A на площині Π_4 .

5.2. Method of replacement of planes of projections

The essence of the method of replacement of planes of projections is that the geometric figures do not change in the space of its position, and the system of planes of projections Π_2 / Π_1 (the old system) is supplemented by new planes of projections Π_4, Π_5 , forming from Π_2, Π_1 or between them a new system of planes of projections, in relation to which geometrical figures locate a partial position, convenient for solving this problem.

Consider the graphical essence of the method in the example of projecting a point (fig. 5.5).

We introduce a new plane of projections Π_4 , placing it perpendicular to Π_1 . Π_4 of Π_1 intersect along a new axis of projections x_1 , which can be considered as a trace-projection of Π_4 to Π_1 . A new system of planes of projections $x_1 \Pi_4 / \Pi_1$ was formed, in which the projection A_1 on Π_1 (projection given) was preserved, and the projection of A_4 to Π_4 (new projection) was constructed. The distance from A to Π_1 is equal to the distance A_2 to the axis x , and is equal to the distance A_4 to the new axis x_1 . The indicated distances are equal to z . This allows, with given projections A_1 and A_2 in the system $x \Pi_2 / \Pi_1$, to construct a new projection A_4 of point A on plane Π_4 .

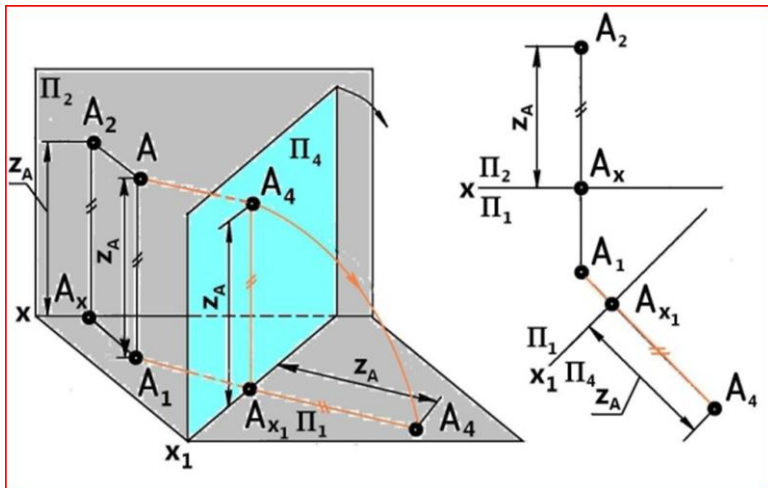


Рис. 5.5. Побудова проекції точки A на новій площині проєкцій Π4

Fig. 5.5. Construction of projection of a point A on a new plane of projections Π4

Основні положення способу:

1. При переході до нової системи одна з площин проєкцій старої системи зберігається як одна з площин проєкцій нової системи, а другу площину проєкцій старої системи замінюють на нову площину проєкцій, яку розміщують перпендикулярно до тієї старої площини проєкцій, яку зберігають.

2. Проекції точки в новій системі площин проєкцій розміщені, як і в старій, на одній лінії проєкційного зв'язку, яка перпендикулярна до нової осі проєкцій.

3. Відстань від нової проекції

Main principles of the method:

1. Upon transition to a new system, one of the projection planes of the old system is preserved as one of the projection planes of the new system, and the second plane of the projection of the old system is replaced by a new plane of projection, which is positioned perpendicular to the old plane of projections stored.

2. Projection points in a new system of planes of projections are located, as in the old, on one line of projection, which is perpendicular to a new axis of projections.

3. The distance from the new projection of a point to a new axis of projections is equal to the distance

точки до нової осі проєкцій дорівнює відстані від проєкції точки, що замінюється, до старої осі проєкцій.

5.2.1. Виконання перетворень шляхом заміни однієї площини проєкцій

5.2.1.1. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня

Умова задачі: перетворити пряму загального положення АВ в пряму рівня (рис. 5.6).

Послідовність побудов:

1. Проводимо $x_1 // A_1B_1$.
2. Будуємо A_4 і B_4 на Π_4 .

В результаті побудов пряма АВ, яка в системі $x\Pi_2/\Pi_1$ займає загальне положення, перетворилася в системі $x_1\Pi_4/\Pi_1$ на пряму рівня, паралельну Π_4 .

$\Pi_4 // AB$, оскільки $x_1 // A_1B_1$; $\Pi_4 \perp \Pi_1$; Кут α^0 – кут нахилу прямої АВ до Π_1 ; $A_4B_4 = N.V. AB$.

from the projection of the replaced point to the old axis of projections.

5.2.1. Carrying out of transformations by replacement of one plane of projections

5.2.1.1. Transformation a straight line of general position to a level line

Condition of the problem: to transform the straight line of general position AB to the level line.

Sequence of constructions (fig.5.6):

1. Draw $x_1 // A_1B_1$.
2. Construct A_4 and B_4 on Π_4 .

As a result of the constructions, the line AB, which in the system $x\Pi_2/\Pi_1$ occupies the general position, transformed into a system $x_1\Pi_4/\Pi_1$ on a level line parallel to Π_4 . $\Pi_4 // AB$, since $x_1 // A_1B_1$; $\Pi_4 \perp \Pi_1$; Angle α^0 - angle of inclination of straight line AB to Π_1 ; $A_4B_4 = N.V. AB$.

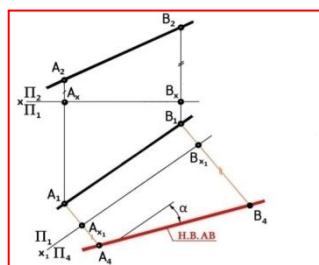
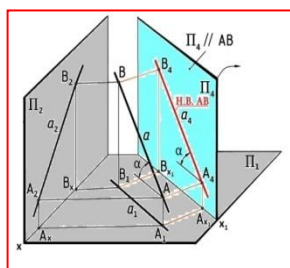


Рис. 5.6. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня

Fig. 5.6. Transformation the straight line of general position to the level line

5.2.1.2. Перетворення прямої рівня в проєкціючу пряму

Умова задачі: перетворити горизонтальну пряму AB в проєкціючу (рис. 5.7).

Послідовність побудов:

1. Проводимо $x_1 \perp A_1B_1$.
2. Будуємо A_4 і B_4 на Π_4 : $A_4 \equiv B_4$.

В результаті побудов пряма AB , яка в системі $x\Pi_2/\Pi_1$ є горизонтальною прямою, перетворилася в системі $x_1\Pi_4/\Pi_1$ на проєкціючу пряму, перпендикулярну до Π_4 . $\Pi_4 \perp AB$, оскільки $x_1 \perp A_1B_1$; $\Pi_4 \perp \Pi_1$.

5.2.1.2. Transformation a level line to a project line

Condition of the problem: to transform the horizontal line to the project line (fig.5.7).

Sequence of constructions:

1. Draw $x_1 \perp A_1B_1$.
2. Construct A_4 and B_4 on Π_4 : $A_4 \equiv B_4$.

As a result of the constructions, the line AB , which in the system $x\Pi_2/\Pi_1$ is the horizontal line, transformed into a system $x_1\Pi_4/\Pi_1$ on a project line perpendicular to Π_4 . $\Pi_4 \perp AB$ since $x_1 \perp A_1B_1$; $\Pi_4 \perp \Pi_1$.

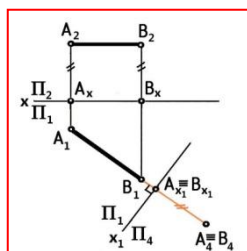
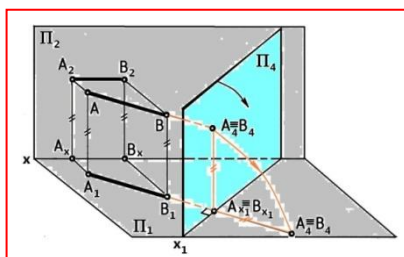


Рис. 5.7. Перетворення прямої рівня в проєкціючу пряму

Fig. 5.7. Transformation a level line to a project line

5.2.1.3. Перетворення площини загального положення в проєкціючу

Умова задачі: перетворити площину загального положення, яку задано трикутником ABC , в проєкціючу (рис. 5.8).

Послідовність побудов:

1. В площині трикутника ABC

5.2.1.3. Transformation a plane of general position to a project plane

Condition of the problem: to transform the plane of the general position, which is given by the triangle ABC , into the projection plane (рис. 5.8).

Sequence of constructions:

проводимо горизонтальну пряму h .

2. Проводимо вісь $x_1 \perp h_1$.

3. Будуємо проєкції вершин трикутника на Π_4 : A_4 , B_4 , C_4 розміщені на одній прямій, яка є слідом-проєкцією площини трикутника на Π_4 .

В результаті побудов площина трикутника ABC , яка в системі $x\Pi_2/\Pi_1$ займає загальне положення, перетворилася на проєкціюючу площину в системі $x_1\Pi_4/\Pi_1$, перпендикулярну до Π_4 . $\Pi_4 \perp \Delta ABC$, оскільки $x_1 \perp h_1$; $\Pi_4 \perp \Pi_1$; кут α – кут нахилу площини трикутника ABC до Π_1 .

1. In the plane of the triangle ABC we draw a horizontal straight line h .

2. We draw the axis $x_1 \perp h_1$.

3. We construct the projections of vertexes of a triangle on Π_4 : A_4 , B_4 , and C_4 are located on a one and the same line, which is a trace-projection of the plane of the triangle on Π_4 .

As a result of construction, the plane of the triangle ABC , which in the system $x\Pi_2/\Pi_1$ occupies the general position, transformed into a projection plane in the system $x_1\Pi_4/\Pi_1$, perpendicular to Π_4 . $\Pi_4 \perp \Delta ABC$, since $x_1 \perp h_1$; $\Pi_4 \perp \Pi_1$; angle α is the angle of the slope of the plane of the triangle ABC to Π_1 .

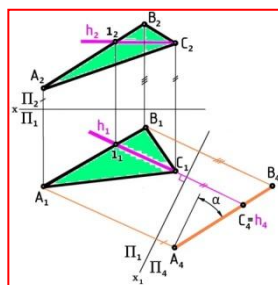
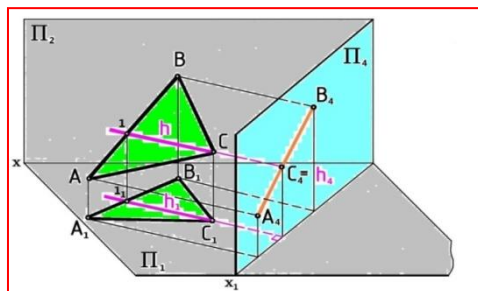


Рис. 5.8. Перетворення площини загального положення в проєкціюючу

Fig. 5.8. Transformation a plane of general position to a project plane

5.2.1.4. Перетворення
проекціуючої площини в
площину рівня

Умова задачі: перетворити проекціуючу площину, яку задано трикутником ABC , на площину рівня (рис. 5.9).

Послідовність побудов:

1. Проводимо $x_1 // A_1B_1C_1$.
2. Будуємо A_4, B_4, C_4 на Π_4 .

В результаті побудов площина трикутника ABC , яка в системі $x\Pi_2/\Pi_1$ займає проекціуюче положення, перетворилася на площину рівня в системі $x_1\Pi_4/\Pi_1$, паралельну до Π_4 : $A_4B_4C_4 = H.V.$ трикутника ABC .

5.2.1.4. Transformation a project
plane to a level plane

Condition of the problem: to transform the projection plane, which is given by the triangle ABC , on the level plane (fig.5.9).

Sequence of constructions:

1. We draw $x_1 // A_1B_1C_1$.
2. We construct A_4, B_4, C_4 on Π_4 .

As a result of construction, the plane of the triangle ABC , which occupies a projection position in the system $x\Pi_2/\Pi_1$, transformed into a level plane in the system $x_1\Pi_4/\Pi_1$, parallel to Π_4 : $A_4B_4C_4 = H.V.$ triangle ABC .

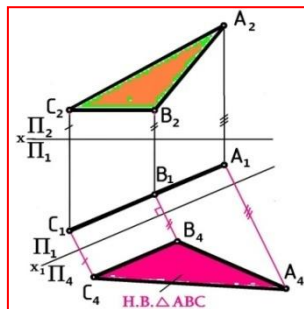
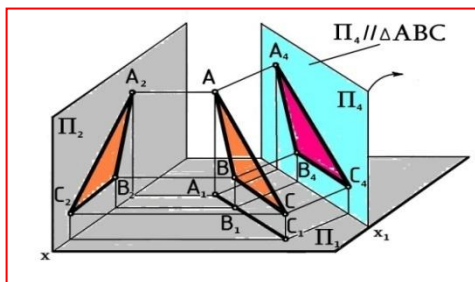


Рис. 5.9_Перетворення проекціуючої площини в площину рівня

Fig. 5.9.Transformation a project plane to a level plane

5.2.2. Виконання перетворень шляхом заміни двох площин проєкцій

5.2.2.1. Перетворення прямої загального положення в проєкцію

Умова задачі: перетворити пряму загального положення АВ в проєкцію (рис. 5.10).

Послідовність побудов:

1. Проводимо $x_1 \parallel A_1B_1$, розміщуючи тим самим площину Π_4 паралельно до АВ.
2. Будуємо A_4 і B_4 на Π_4 . В системі $x_1\Pi_4/\Pi_1$ пряма АВ стала прямою рівня, паралельною до Π_4 .
3. Проводимо $x_2 \perp A_4B_4$, розміщуючи другу нову площину проєкцій Π_5 перпендикулярно до нерухомої прямої АВ.
4. Будуємо A_5, B_5 на Π_5 : $A_5 \equiv B_5$.

В системі $x_2\Pi_5/\Pi_4$ пряма АВ стала проєкцією, перпендикулярною до Π_5 .

5.2.2. Carrying out of transformations by replacement of two planes of projections

5.2.2.1. Transformation a straight line of general position to a project line

Condition of the problem: to transform the straight line of general position АВ to the project line (fig.5.10).

Sequence of constructions:

1. We draw $x_1 \parallel A_1B_1$, thus placing the plane Π_4 in parallel with АВ.
2. We construct A_4 and B_4 on Π_4 . In the system $x_1\Pi_4/\Pi_1$ the straight line АВ became a level line, parallel to Π_4 .
3. We draw $x_2 \perp A_4B_4$, placing the second new plane of projection Π_5 perpendicular to the fixed straight line АВ.
4. We construct A_5, B_5 on Π_5 : $A_5 \equiv B_5$.

In the system $x_2\Pi_5/\Pi_4$ straight line АВ became a project line, perpendicular to Π_5 .

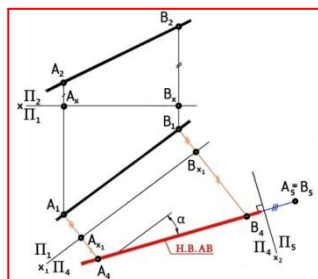


Рис. 5.10. Перетворення прямої загального положення в проєкцію

Fig. 5.10. Transformation a straight line of general position to a project line

5.2.2.2. Перетворення площини загального положення в площину рівня

Умова задачі: перетворити площину загального положення, яку задано трикутником ABC, в проекціюючу (рис. 5.11).

Послідовність побудов:

1. В площині трикутника ABC проводимо горизонтальну пряму h.

5.2.2.2. Transformation a plane of general position to a level plane

Condition of the problem: to transform the plane of the general position, which is given by the triangle ABC, into the projection plane (fig.5.11).

Sequence of constructions:

1. In the plane of the triangle ABC we draw a horizontal straight line h.

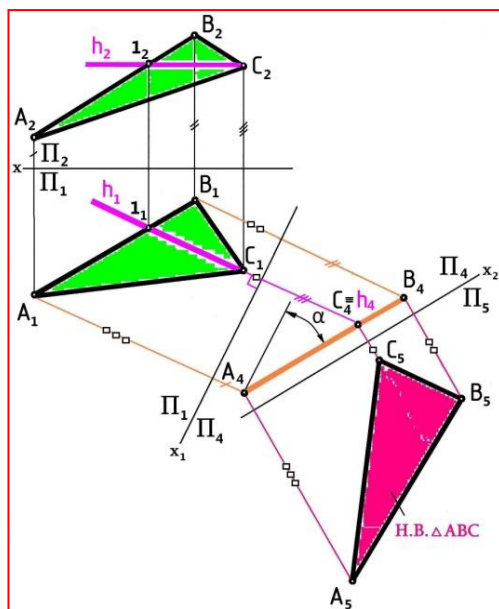


Рис. 5.11. Перетворення площини загального положення в площину рівня

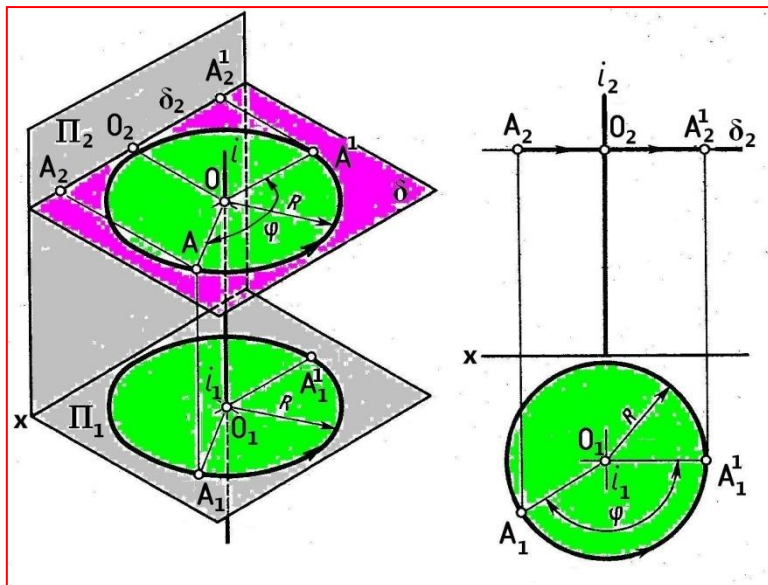
Fig. 5.11. Transformation a plane of general position to a level plane

2. Проводимо $x_1 \perp h_1$, розміщуючи тим самим площину Π_4 перпендикулярно до площини трикутника ABC. 3. Будуємо проекції вершин трикутника на Π_4. В системі $x_1\Pi_4/\Pi_1$ площина трикутника ABC стала проекційною, перпендикулярною до Π_4. 4. Проводимо $x_2 // A_4B_4C_4$, розміщуючи тим самим площину Π_4 паралельно до площини трикутника ABC. 5. Будуємо проекції вершин трикутника на Π_5. В системі $x_2\Pi_5/\Pi_4$ площина трикутника ABC стала площиною рівня, паралельною до Π_5: $A_5B_5C_5 = N.V.$ трикутника ABC.	2. We draw $x_1 \perp h_1$, thus placing the plane Π_4 perpendicular to the plane of the triangle ABC. 3. We construct the projections of vertexes of a triangle on Π_4: In the system $x_1\Pi_4/\Pi_1$, the plane of the triangle ABC became project plane, perpendicular to Π_4. 4. We draw $x_2 // A_4B_4C_4$, thus placing the plane Π_4 in parallel with the plane of the triangle ABC. 5. We consiruct the projection of vertexes of the triangle on Π_5. In the system $x_2\Pi_5/\Pi_4$, the plane of the triangle ABC became the level plane parallel to Π_5: $A_5B_5C_5 = N.V.$ triangle ABC.
<u>5.3. Спосіб плоско-паралельного переміщення</u> Суть способу полягає у тому, що геометричні фігури (прямі та плоскі фігури) обертаються навколо осі, яка перпендикулярна до однієї з нерухомих площин проєкцій Π_1 або Π_2, розміщують таким чином, щоб вони відносно нерухомої системи площин проєкцій Π_2/Π_1 займали часткове положення, зручне для розв'язування задачі. Саме при такому обертанні точки фігури переміщуються в площинах, паралельних до тієї площини проєкцій, до якої перпендикулярна вісь обертання	<u>5.3. Method of flat-parallel movement</u> The essence of the method is that the geometrical figures (straight lines and flat figures) rotate around an axis that is perpendicular to one of the fixed planes of the projections Π_1 or Π_2, so that they occupy a partial position, relative to the fixed plane of the planes of projections Π_2/Π_1. Such a partial position of geometric shapes is convenient for solution the problem.. It is precisely at such a rotation that the points of the figure are moved in planes parallel to that plane of projection, to which the axis of rotation of the figure is

фігури. Під час обертання геометричної фігури її проекція на площину проєкцій, до якої вісь обертання перпендикулярна, не змінює своєї форми і розмірів, при цьому проєкції точок фігури на площину проєкцій, до якої вісь обертання паралельна, переміщуються по прямих, паралельних до осі проєкцій x або за її відсутності - по прямих, перпендикулярних до вертикальних ліній проєкційного зв'язку. Незмінність форми і розмірів однієї з проєкцій фігури при її обертанні спрощує побудову нових положень цієї проєкції фігури. Розглянемо графічну сутність способу на прикладі обертання точки (рис. 5.12). Точка A обертається навколо осі i, яка перпендикулярна до Π_1. Траєкторія обертання точки A – коло радіуса R, площина δ якого перпендикулярна до осі i та паралельна до Π_1. Площина δ кола обертання точки A проєкціюється на Π_2 в пряму δ_2, яка є слідом-проєкцією площини δ, причому $\delta_2 \parallel x$. Точка O – центр кола обертання точки A – розміщена на осі i. Точка A з свого початкового положення перемістилася на кут обертання φ^0 в положення A^1. При цьому горизонтальна проєкція A_1 перемістилася по колу радіуса R на кут φ^0 в положення A_1^1, а фронтальна проєкція A_2	perpendicular to the figure. During the rotation of a geometric figure, its projection on the plane of projections to which the axis of rotation is perpendicular does not change its shape and sizes, while the projections of the points of the figure on the projection plane to which the axis of rotation is parallel, are displaced in straight lines parallel to the axis of projections x or its absence - in straight lines, perpendicular to the vertical lines of the project connection. The invariability of the shape and sizes of one of the projections of the figure during its rotation simplifies the construction of new positions of this projection of the figure. Consider the graphical essence of the method on the example of the point rotation (fig. 5.12). Point A rotate around the axis and which is perpendicular to Π_1. The trajectory of rotation of point A is the circle of radius R, whose plane δ is perpendicular to the axis and is parallel to Π_1. The plane δ of the rotational circle of point A is projected onto Π_2 in the straight line δ_2, which is the trace-projection of the plane δ, with $\delta_2 \parallel x$. Point O is the center of the circle of rotation of point A - is placed on the axis and. Point A moved from its original position to the angle of rotation φ^0 to position A^1. In this case, the horizontal projection A_1 moved in a circle of radius R at an angle φ^0 to position A_1^1, and the front projection A_2 moved along a straight line δ_2,
--	---

перемістилася по прямій δ_2 ,
паралельній осі x , в положення
 A_2^1 .

parallel to the x -axis, to position
 A_2^1 .



**Рис. 5.12. Графічна сутність способу на прикладі обертання
точки**

**Fig. 5.12. Graphical essence of the method on the example of the
point rotation**

5.3.1. Обертання навколо уявної осі обертання

5.3.1.1. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня

Умова задачі: перетворити пряму загального положення AB у фронтальну пряму рівня (рис. 5.13).

Розв'язування:

Горизонтальна проекція фронтальної прямої паралельна до осі x , тому відрізок A_1B_1 розміщуємо, не змінюючи його розмірів, в положення $A_1^1B_1^1 \parallel x$. При цьому $A_1^1B_1^1$ розміщуємо в будь-якому зручному місці поля креслення. Це означає, що обертання AB відбувається навколо осі, яка перпендикулярна до Π_1 , хоча ця вісь на епюрі не показують.

$A_2^1B_2^1 = N.V. AB$; $\angle \alpha$ – кут нахилу прямої AB до площини Π_1 .

5.3.1. Rotate around one imaginary axis of rotation

5.3.1.1. Transformation a straight line of general position to a level line

Condition of the problem: to transform the straight line of general position AB into the front straight line (fig. 5.13).

Solution:

The horizontal projection of the front straight line is parallel to the x -axis, so we occupy the segment A_1B_1 , without changing its size, to the position $A_1^1B_1^1 \parallel x$. In this case, $A_1^1B_1^1$ occupy in any convenient place of the drawing field. This means that the rotation of AB occurs around an axis that is perpendicular to Π_1 , although this axis does not appear on the epure.

$A_2^1B_2^1 = N.V. AB$; $\angle \alpha$ is the angle of inclination (slope) of the straight line AB to the plane Π_1 .

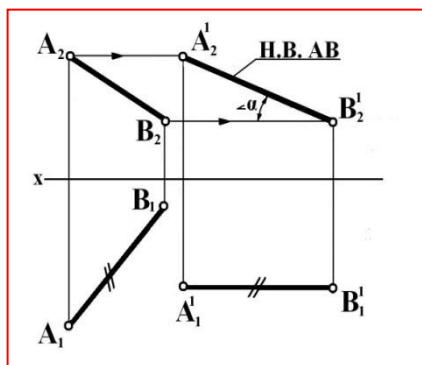
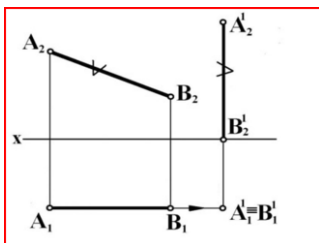


Рис. 5.13. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня

Fig. 5.13. Transformation a straight line of general position to a level line

<u>5.3.1.2. Перетворення прямої рівня в проєкціюючу пряму</u> Умова задачі: перетворити фронтальну пряму рівня АВ у проєкціюючу (рис. 5.14). Пояснення до розв'язування: Фронтальна пряма перетворюється у горизонтально-проєкціюючу при обертанні навколо осі $i \perp \Pi_2$, оскільки до Π_2 паралельна фронтальна пряма. Якщо обертати фронтальну пряму навколо $i \perp \Pi_1$, то вона не перетвориться в проєкціюючу. Так, у випадку розміщення горизонтальної проєкції фронтальної прямої перпендикулярно до осі x, вона перетвориться у пряму рівня, паралельну до Π_3. Таким чином, фронтальна пряма при своєму обертанні може перетворитися тільки у горизонтально-проєкціюючу. Розв'язування: Розміщуємо фронтальну проєкцію A_2B_2 відрізка АВ, не змінюючи його розмірів, у положення $A_2^1B_2^1 \perp x$. Отримаємо, що фронтальна пряма АВ перетворилася в результаті обертання навколо уявної осі, перпендикулярної до Π_2, у горизонтально-проєкціюючу пряму A^1B^1.	<u>5.3.1.2. Transformation a level line to a project line</u> Condition of the problem: to convert the front frontal level AB into the projection (fig.5.14). Explanation to the solution: The front straight line transforms into a horizontal and project line when rotated around the axis $i \perp \Pi_2$, since up to Π_2 is a parallel frontal straight line. If you rotate the front line around $i \perp \Pi_1$, then it does not transform into a projection. Thus, in the case of a horizontal projection of the frontal straight line perpendicular to the x-axis, it will be converted to a straight line parallel to Π_3. Thus, the frontal straight line in its rotation can only transform into a horizontal projection. Solution: We place the front projection of A_2B_2 segment AB, without changing its size, to the position $A_2^1B_2^1 \perp x$. We obtain that the front line AB transformed as a result of rotation around the imaginary axis perpendicular to Π_2 to the horizontal and project straight line A^1B^1.
---	--



**Рис. 5.14. Перетворення
прямої загального
положення в пряму рівня**
Fig. 5.14. Transformation a
straight line of general position
to a level line

5.3.1.3. Перетворення площини загального положення в проекціюючу

Умова задачі: перетворити площину трикутника ABC у фронтально- проекціюючу .

Розв'язування (рис. 5.15):

В площині трикутника ABC проводимо горизонтальну пряму h і розміщуємо її горизонтальну проекцію h_1 разом з горизонтальною проекцією трикутника ABC, не змінюючи початкових форм і розмірів, у положення $h_1 \perp x$.

В результаті обертання отримаємо, що трикутник $A_1B_1C_1$ займає фронтально-проекціююче положення, перпендикулярне до Π_2 , де $\angle \alpha$ – кут нахилу площини трикутника ABC до Π_1 .

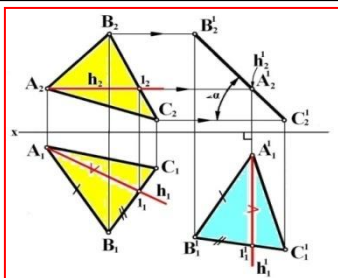
5.3.1.3.Transformation a plane of general position to a project plane

Condition of the problem: to transform the plane of the triangle ABC into the frontal projection.

Solution (fig. 5.15):

In the plane of the triangle ABC, we draw a horizontal straight line h and place its horizontal projection h_1 together with the horizontal projection of the triangle ABC, without changing the initial forms and sizes, to the position $h_1 \perp x$.

As a result of rotation, we obtain that the triangle $A_1B_1C_1$ occupies a frontal-projection position perpendicular to Π_2 , where $\angle \alpha$ is the angle of inclination of the plane of the triangle ABC to Π_1 .



**Рис. 5.15. Перетворення площини
загального положення в
проекціюючу**

Fig. 5.15. Transformation a plane of
general position to a project plane

5.3.1.4. Перетворення
проекціюючої площини в
площину рівня

Умова задачі: перетворити фронтально-проекціюючу площину трикутника ABC у площину рівня (рис. 5.16).

Розв'язування:

Оскільки задана площина перпендикулярна до Π_2 , то її можна обертати для отримання положення площини рівня навколо осі, перпендикулярної до Π_2 , розміщуючи слід-проекцію $B_2A_2C_2$, не змінюючи її розмірів, у положення $B_2^1A_2^1C_2^1 \parallel x$.

В результаті обертання площини трикутника ABC, який займав початкове положення фронтально-проекціюючої площини, він перетворився в трикутник $A^1B^1C^1$, який займає положення горизонтальної площини рівня. $A_1^1B_1^1C_1^1 = H.V. \Delta ABC$.

5.3.1.4. Transformation a project
plane to a level plane

Condition of the problem: to transform the frontal and project plane of the triangle ABC into a level plane (fig.5.16).

Solution:

Since the given plane is perpendicular to Π_2 , it can be rotated to obtain the position of the level plane around the axis perpendicular to Π_2 , placing the trace- projection $B_2A_2C_2$, without changing its size, to position $B_2^1A_2^1C_2^1 \parallel x$.

As a result of the rotation of the plane of the triangle ABC, which occupied the initial position of the frontal and project plane, it transformed into a triangle $A^1B^1C^1$, which occupies the position of the horizontal level plane. $A_1^1B_1^1C_1^1 = N.V. \Delta ABC$.

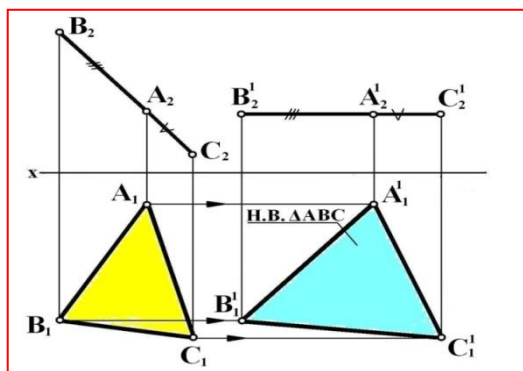


Рис. 5.16.
Перетворення
проекціюючої
площини в
площину рівня
Fig. 5.16.
Transformation a
project plane to a
level plane

<u>5.3.2. Обертання навколо двох уявних осей обертання</u> <u>5.3.2.1. Перетворення прямої загального положення в проєкціюючу пряму</u> Умова задачі: перетворити пряму загального положення АВ у горизонтально-проєкціюючу. Розв'язування: Задача розв'язується в результаті 2 обертань. Оскільки у горизонтально-проєкціюючу пряму може перетворитися фронтальна пряма рівня в результаті її одного обертання, то спочатку потрібно перетворити пряму загального положення у фронтальну пряму рівня 1 обертання: розміщуємо A_1B_1, не змінюючи розмірів, в положення $A_1^1B_1^1 // x$. В результаті 1 обертання пряма загального положення АВ перетворилася у фронтальну пряму рівня A^1B^1. Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до Π_1. 2 обертання: розміщуємо $A_2^1B_2^1$, не змінюючи розмірів, у положення $A_2^2B_2^2 \perp x$. В результаті обертання фронтальна пряма A^1B^1 перетворилася у горизонтально-проєкціюючу пряму A^2B^2. Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до Π_2.	<u>5.3.2.Rotate around two imaginary axis of rotation</u> <u>5.3.2.1.Transformation a straight line of general position to a project line</u> Condition of the problem: to transform the straight line of general position AB into the horizontal and project line. Solution: The problem is solved as a result of 2 rotations. Since the front straight level can be transformed in the horizontal and project straight line as a result of its single rotation, then it is first necessary to transform straight line of general position to the frontal straight line 1 rotation: place A_1B_1, without changing the size, in the position $A_1^1B_1^1 // x$. As a result of 1 rotation of the straight line of general position AB transformed into a frontal level line A^1B^1. The rotation is made around an imaginary axis perpendicular to Π_1. 2 rotation: place $A_2^1B_2^1$, without changing the sizes, to position $A_2^2B_2^2 \perp x$. As a result of rotation, the front straight line A^1B^1 transformed into a horizontal and project straight line A^2B^2. The rotation is made around an imaginary axis perpendicular to Π_2.
---	--

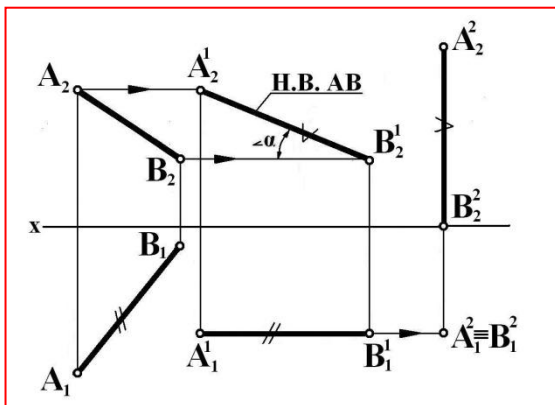


Рис. 5.17. Перетворення прямої загального положення в проєкціюючу пряму

Fig. 5.17. Transformation a straight line of general position to a project line

5.3.2.2. Перетворення площини загального положення в площину рівня

Умова задачі: перетворити площину трикутника ABC, що займає загальне положення, у горизонтальну площину рівня.

Розв'язування (рис. 5.18):

Задача розв'язується в результаті 2 обертань. Оскільки у горизонтальну площину рівня може перетворитися фронтально-проєкціююча площина в результаті одного її обертання, то спочатку потрібно перетворити площину загального положення у фронтально-проєкціюючу.

1 обертання: в площині трикутника ABC проводимо горизонтальну пряму h і обертаємо її разом з трикутником до положення, коли $h \perp \Pi_2$. Для

5.3.2.2. Transformation a plane of general position to a level plane

Condition of the problem: to transform the plane of the triangle ABC, which occupies the general position, into the horizontal level plane.

Solution (fig. 5.18):

The problem is solved as a result of 2 rotations. Since frontal and project plane can be transformed in the horizontal level plane the as a result of one of its rotation, it is first necessary to transform the plane of the general position to the frontal and project plane..

1 rotation: in the plane of the triangle ABC we draw a horizontal straight line h and rotate it together with the triangle to the position when $h \perp \Pi_2$. To do this, in the

цього на епюрі h_1 разом з $A_1B_1C_1$ розміщуємо у положення $h_1^1 \perp x$.

В результаті 1 обертання трикутник ABC зайняв положення трикутника $A^1B^1C^1$, площина якого перпендикулярна до Π_2 . $\angle \alpha$ – кут нахилу площини трикутника ABC до Π_1 . Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до Π_1 .

2 обертання: розміщуємо слід-проекцію $B_2^1A_2^1C_2^1$ у положення $B_2^2A_2^2C_2^2 \parallel x$. В результаті обертання трикутник $A^1B^1C^1$, площина якого займала фронтально-проекціююче положення, перетворився у трикутник $A^2B^2C^2$, площина якого займає положення горизонтальної площини рівня. $\Delta A_2^1B_2^1C_2^1 = N.V.$ ΔABC . Обертання здійснено навколо уявної осі, перпендикулярної до Π_2 .

epure h_1 , together with $A_1B_1C_1$, place in position $h_1^1 \perp x$. As a result of 1 rotation, the triangle ABC occupied the position of the triangle $A^1B^1C^1$, whose plane is perpendicular to Π_2 . $\angle \alpha$ is the angle of inclination of the plane of the triangle ABC to Π_1 . The rotation is carried out around an imaginary axis perpendicular to Π_1 .

2 rotations: place the trace-projection $B_2^1A_2^1C_2^1$ in position $B_2^2A_2^2C_2^2 \parallel x$. As a result of the rotation of the triangle $A^1B^1C^1$, whose plane occupied the frontal and project position, transformed into a triangle $A^2B^2C^2$, whose plane occupies the position of the horizontal level plane. $\Delta A_2^1B_2^1C_2^1 = N.V.$ ΔABC . The rotation is made around an imaginary axis perpendicular to Π_2 .

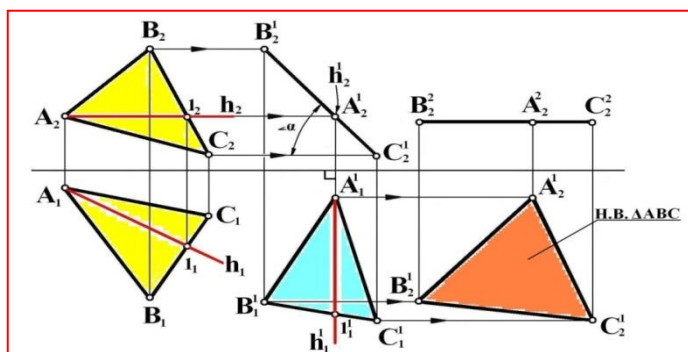


Рис. 5.18. Перетворення площини загального положення в площину рівня

Fig. 5.18. Transformation a plane of general position to a level plane

Нарисна геометрія. Розділ 6. Поверхні. Точка на поверхні

6.1. Багатогранники та їх зображення

Багатогранниками називаються геометричні тіла, які обмежені плоскими багатокутниками – гранями (рис. 6.1, 6.2).

Елементи багатогранника: ребра – лінії перетину граней та вершини – точки перетину ребер.

З великої кількості багатогранників практичний інтерес становлять піраміди (рис.6.1) та призми (рис.6.2).

Зображення багатогранника зводиться до зображення його ребер та вершин.

Лінія, яка обмежує проекцію багатогранника, називається обрисом поверхні багатогранника. Обрис поверхні – завжди видима лінія, вона позначається суцільною основною лінією.

На рис. 6.3 зображено піраміду ABCS, де на горизонтальній проекції обрисом є лінія $A_1B_1C_1A_1$, а на фронтальній проекції – лінія $A_2B_2S_2A_2$.

Точка і пряма лінія на поверхні багатогранника визначається так, як і в площині.

На рис. 6.3 точка 1 належить ребру AS, де горизонтальну

Descriptive geometry. Chapter 6. The point on the surface

6.1. Polygons and their forms

Polygons are geometrical figures that are closed by the plane polyhedrons – faces. (Fig. 6.1, 6.2).

Elements of the polygon are: edges are intersections of the faces, and vertices are intersections of the edges.

From the huge amount of polygons, the most interesting in practice are pyramids (Fig. 6.1) and prisms (Fig. 6.2).

Drawing of a polygon implies drawing its edges and vertices.

The line that closes the projection of the polygon is called the contour of the polygon surface. The contour of the surface is always a visible line, it is marked by a solid base-line.

In Fig. 6.3 a pyramid ABCS is shown, where the contour is the line $A_1B_1C_1A_1$ on the horizontal projection, and the line $A_2B_2S_2A_2$ on the frontal projection.

The point and the rectilinear line on the surface of the polygon is determined in the same way as in the plane.

In Fig. 6.3 the point 1 belongs to the edge AS, where the horizontal

проекцію точки знайдено за допомогою лінії проєкційного зв'язку.

Точка 2 належить ребру SC, проте горизонтальну проєкцію точки визначити за допомогою лінії проєкційного зв'язку неможливо, оскільки SC – відрізок профільної прямої, паралельної до площини π_3 (у цієї прямої проєкції розміщені на одній лінії, перпендикулярній до осі x). В даному випадку горизонтальну проєкцію 2_1 знайдено за допомогою прямої 23, яку проведено в грані ASC піраміди паралельно до сторони AC основи і тому є горизонталлю h .

Точка K лежить у середині грані BCS і її фронтальну проєкцію K_2 знайдено за допомогою прямої S6, проведеної в грані BCS. Точка K розміщена на прямій S6 грані BCS і тому належить поверхні піраміди.

На рис. 6.6 зображено трикутну призму, нижня основа якої паралельна до горизонтальної площини проєкцій, а верхню основу не показано. Відома фронтальна проєкція K_2 точки K, що знаходиться на поверхні призми. Оскільки K_2 є видимою, то точка K знаходиться в грані призми, що примикає до сторони AC. Горизонтальну проєкцію K_1 знайдено за допомогою прямої K1, що проведено паралельно до

projection of the point was determined by the line of the project connection.

The point 2 belongs to the edge SC, however, the horizontal projection of the point cannot be determined by the line of the project connection because SC is the line segment of the lateral line which is parallel to the plane π_3 (this line has projections located on one line which is perpendicular to the axis x). In this particular case we determine the horizontal projection 2_1 by means of the straight line 23 which is drawn on the face ASC of the pyramid parallel to the side AC of the base and thus it is horizontal h .

The point K lies inside the edge BCS and its frontal projection K_2 has been determined by the line S6 drawn on the face BCS. The point K is located on the line S6 of the face BCS thus it belongs to the surface of the pyramid.

In Fig. 6.6 triangular prism is shown, its lower base is parallel to the horizontal plane of projections and its upper base is not shown. The frontal projection K_2 of the point K is given. It is located on the surface of the prism. Since K_2 is visible, then the point K is located on the face of the prism that is adjacent to the side AC. Horizontal projection K_1 has been determined by the line K1 which is parallel to lateral edges of the prism.



Рис. 6.1. Наочне зображення піраміди
Fig. 6.1. A visual image of the pyramid

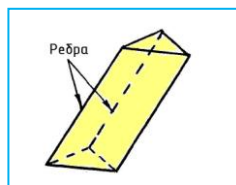


Рис. 6.2. Наочне зображення призми
Fig. 6.2. A visual image of the prism

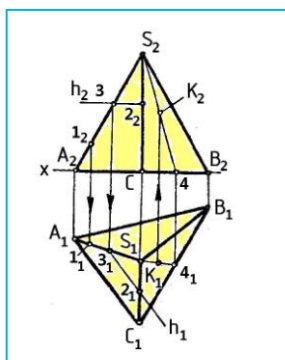


Рис. 6.6. Епюр піраміди
Fig. 6.6. The epure of the pyramid

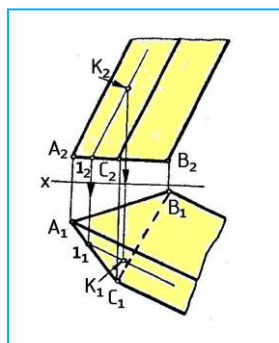


Рис. 6.6. Епюр призми
Fig. 6.6. The epure of the prism

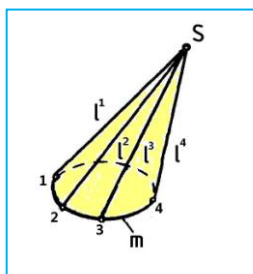


Рис. 6.5. Утворення конічної поверхні
Fig. 6.5. Constructing of a conical surface

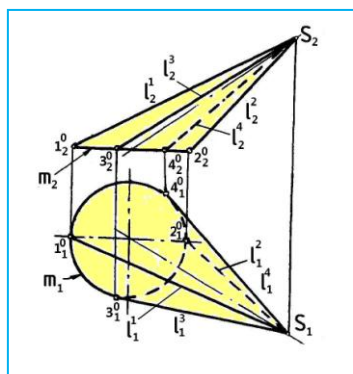


Рис. 6.6. Епюр похилого кругового конуса з проєкціями обрисових твірних
Fig. 6.6. The epure of the oblique circular cone with projections of the contour generatrices

бічних ребер призми.

6.2. Криві поверхні та їх зображення

Криві поверхні можна розглядати як сукупність безперервних положень лінії, що називається твірною, яка переміщується по напрямній лінії. Залежно від виду твірної криві поверхні поділяються на 2 класи: лінійчасті (твірна – пряма лінія) та нелінійчасті або криволінійні (твірна – крива лінія).

6.2.1. Конічна поверхня

Конічна поверхня - це лінійчаста поверхня, що утворена рухом прямолінійної твірної l (рис. 6.5) уздовж криволінійної напрямної m , і яка в усіх своїх положеннях перетинає напрямну, причому всі твірні (l^1, l^2, l^3 і т.д.) перетинаються в точці S , яка називається вершиною.

Криві поверхні, зокрема конічні, зображуються на площинах проєкцій своїми обрисами поверхні.

На рис. 6.6 зображено обриси геометричного тіла – похилого кругового конуса (еліптичного конуса), обмеженого конічною поверхнею і площиною (основною конуса), що перетинає всі твірні поверхні, причому лінія m

6.2. Curved surfaces and their forms

Curved surfaces can be identified as the unity of infinite positions of the line called generatrix, which moves along the directrix. Depending on the type of generatrix, curved surfaces can be divided into 2 classes: ruled surfaces (the generatrix is the straight line) double-curved surfaces (the generatrix is the curve).

6.2.1. Conical surface

Conical surface is a ruled surface formed by the motion of the rectilinear generatrix l (Fig. 6.5) along the curved directrix m . The surface in its all positions intersects directrix, while all generatrices (l^1, l^2, l^3 and so on) intersect in the point S , called vertex.

Curved surfaces, particularly conical, are drawn in the planes of projections by the contours of the surface.

In Fig. 6.6 the contours of the geometrical figure are shown, i.e. an oblique circular cone (elliptical cone), closed by a conical surface and the plane (the base) which intersects all generatrix surfaces, whilst the line m is called the base line of the cone.

називається лінією основи конуса.

На рис. 6.6 показано проєкції обрисових твірних l^1, l^2 (на фронтальній проєкції) і l^3, l^6 (на горизонтальній проєкції). Ці твірні проходять через вершину S і перетинають лінію основи m в точках $1^0, 2^0, 3^0, 6^0$.

Точки лінії основи m , через які проходять обрисові твірні, ділять лінію основи на видиму та невидиму частини. Так, на горизонтальній проєкції твірні l^3 і l^6 ділять горизонтальну проєкцію m_1 в точках 3_1^0 і 6_1^0 на видиму та невидиму частини.

Покажемо, як визначити видимість твірних на рис. 6.6.

На горизонтальній проєкції твірні, що перетинають лінію основи між точками $3_1^0 - 2_1^0 - 6_1^0$ – невидимі (перетинають невидиму зверху частину лінії основи m), а між точками $3_1^0 - 1_1^0 - 6_1^0$ – видимі.

Твірні, які на горизонтальній проєкції перетинають лінію основи m між точками $1_1^0 - 3_1^0 - 2_1^0$, на фронтальній проєкції видимі, а ті твірні, які перетинають лінію основи між точками $1_1^0 - 6_1^0 - 2_1^0$, – невидимі.

Так, на рис. 6.7 показано видимість твірних l^5 і l^6 , які проведено у середині обрису

In Fig. 6.6 the projections of the contour generatrices l^1, l^2 (on the frontal projection) and l^3, l^6 (on the horizontal projection) are shown. These generatrices cut through the vertex S and cross the base line m in the points $1^0, 2^0, 3^0, 6^0$.

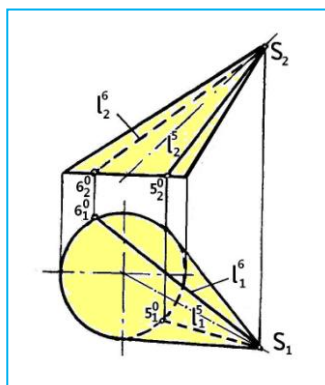
The points of the base line m that are crossed by the contour generatrices cut the base line into visible and invisible parts. Thus, on the horizontal projection the generatrices l^3 and l^6 cut the horizontal projection m_1 in the points 3_1^0 and 6_1^0 into visible and invisible parts.

Let's show how to define the visibility of the generatrices in Fig. 6.6.

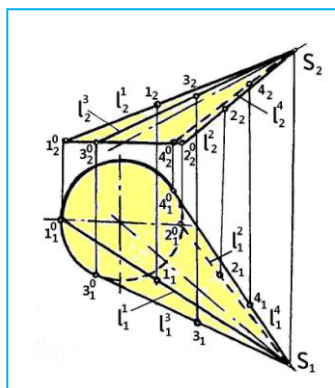
In the horizontal projection the generatrices that cut the base line between the points $3_1^0 - 2_1^0 - 6_1^0$ are invisible (they intersect the invisible upper part of the base line m) and between the points $3_1^0 - 1_1^0 - 6_1^0$ are visible.

Generatrices that cut the base line m in the horizontal projection between the points $1_1^0 - 3_1^0 - 2_1^0$ are visible in the frontal projection, and the generatrices that cut the base line between the points $1_1^0 - 6_1^0 - 2_1^0$ are invisible.

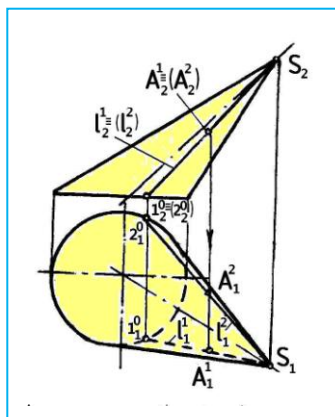
Thus, in Fig. 6.7 the visibility of the generatrices l^5 and l^6 are shown. They are drawn inside the surface



**Рис. 6.7. Епюр похилого
кругового конуса з
проекціями твірних,
проведених у середині обрису**
Fig. 6.6. The epure of the oblique
circular cone with projections
drawn inside the contour



**Рис. 6.8. Епюр похилого
кругового конуса з
проекціями точок, що лежать
на обрисових твірних**
Fig. 6.8. The peure of the oblique
circular cone with projections of
the points that lie on the contour
generatrices



**Рис. 6.9. Проекції точки А,
вказаної у середині обрису
похилого кругового конуса**
Fig. 6.9. The projections of the
point A marked inside the
contour of the oblique circular
cone

поверхні.

Точка належить поверхні, зокрема конічній, якщо вона знаходиться на лінії цієї поверхні. Точка на конічній поверхні визначається за допомогою твірної, що проходить через цю точку, перетинаючи вершину S і лінію основи m .

Точці, яка лежить на обрисовій твірній, відповідає одна точка поверхні конуса. Так, на рис. 6.8 показано проєкції точок 1, 2, 3, 6, що лежать на відповідних обрисових твірних l^1, l^2, l^3, l^6 .

Якщо лінія основи є замкненою лінією, наприклад колом, то точка, що задана на одній проєкції у середині обрису, визначає положення двох точок поверхні геометричного тіла.

Так, на рис. 6.9 точці A , що зазначена у середині обрису на фронтальній проєкції, відповідають дві точки поверхні A^1 і A^2 , фронтальні проєкції яких збігаються ($A_2^2 \equiv A_2^1$). Ці точки лежать на твірних l^1 і l^2 . Видимість точок A^1 і A^2 на горизонтальній проєкції визначена за видимістю твірних l^1 і l^2 .

6.2.2. Циліндрична поверхня

Циліндрична поверхня - це лінійчаста поверхня, яка утворена паралельним рухом

particularly to the conical surface, if it is located on the line of this surface. The point on the conical surface is determined by the generatrix that cuts through this point, intersecting the vertex S and the base line m .

The point which lies on the contour generatrix has one corresponding point of the cone surface. Thus, in Fig. 6.8 the projections of the points 1, 2, 3, 6 that lie on the corresponding contour generatrices l^1, l^2, l^3, l^6 are shown.

If the base line is a closed line, for example, a circle, then the point determined on one projection inside the contour, defines the position of two points of the geometrical figure surface.

Thus, in Fig. 6.9 the point A , marked inside the contour on the frontal projection, has two corresponding points of the surface A^1 and A^2 whose frontal projections coincide ($A_2^2 \equiv A_2^1$). These points lie on generatrices l^1 and l^2 . The visibility of the points A^1 and A^2 on the horizontal projection is determined by the visibility of the generatrices l^1 and l^2 .

6.2.2. Cylindrical surface

Cylindrical surface is a ruled surface which is formed by the parallel motion of the rectilinear generatrix l (Fig. 6.10) along the double-curved directrix m , whilst all generatrices (l^1, l^2, l^3 and so on) are

прямолинійної твірної l (рис. 6.10) уздовж криволінійної напрямної m , причому всі твірні (l^1, l^2, l^3 і т.д.) паралельні між собою і перетинають напрямну m в точках $1^0, 2^0, 3^0$ і т.д.

На рис. 6.11 показано обриси похилого кругового циліндра (еліптичного циліндра), лінія основи якого – коло (верхню основу циліндра не показано). На рис. 6.11 зображено проекції обрисових твірних l^1, l^2, l^3, l^6 та проекції точок 1, 2, 3, 6, що на них знаходяться, а на рис. 6.12 – проекції точки А, що розміщена у середині обрису.

Слід зазначити, що видимість твірних та точок на циліндричній поверхні визначається так само, як і для конічної.

6.2.3. Поверхня кулі (сфера)

Поверхня кулі (сфера) – це нелінійчаста поверхня, утворена обертанням кола, яке є твірною, навколо осі, що збігається з діаметром кола, і розміщена перпендикулярно до горизонтальної площини проекції.

Лініями обрису сфери на горизонтальних та фронтальних площинах проекцій є кола.

На рис. 6.13 показано обриси поверхні кулі, де зазначено: i – вісь обертання ($i \perp \pi_1$), l^M – головний меридіан (обрис

parallel to each other and intersect the directrix m in the points $1^0, 2^0, 3^0$ and so on.

In Fig. 6.11 the contours of the oblique circular cylinder (elliptical cylinder) are shown, its base is a circle (the upper base of the cylinder is not shown). In Fig. 6.11 the projections of the contour generatrices l^1, l^2, l^3, l^6 are given as well as the projections of the points 1, 2, 3, 6 that are located on them. In Fig. 6.12 the projections of the point A located inside the contour are shown.

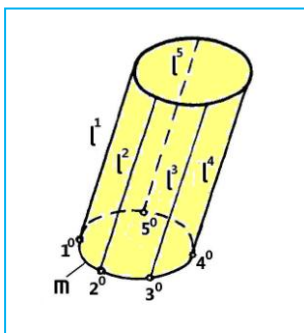
It should be noted that the visibility of the generatrices and the points on the cylindrical surface are determined in the same manner as on the conical one.

6.2.2. The surface of the globe (the sphere)

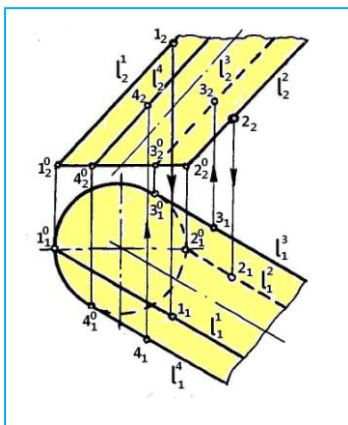
The surface of the globe (the sphere) is a double-curved surface formed by the revolution of the circle around the axis. This circle is the generatrix and the axis coincides the diameter of the circle and is perpendicular to the horizontal plane of projection.

Circles are the lines of the sphere sketch in the horizontal and frontal planes of projection.

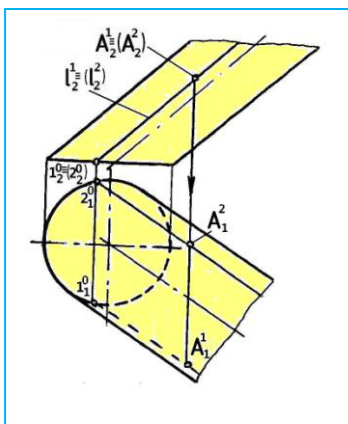
In Fig. 6.13 the contours of the globe are shown, where i is the axis of revolution ($i \perp \pi_1$), l^M is the principal meridian (the sketch of



**Рис. 6.10. Утворення
циліндричної поверхні**
Fig. 6.10. Construction of
cylindrical surface



**Рис. 6.11. Епюр похилого
кругового циліндра з
проекціями точок, що
лежать на обрисових
твірних**
Fig. 6.8. The epure of the
oblique circular cylinder with
the projections of the points that
lie on contour generatrices



**Рис. 6.12. Проекції точки A,
зазначеної у середині обрису
похилого кругового
циліндра**
Fig. 6.12. The projections of the
point A marked inside the
contour of the oblique circular
cylinder

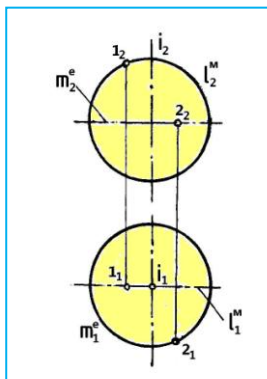


Рис. 6.13. Епюр поверхні кулі з проєкціями точок 1 і 2 на обрисових лініях

Fig. 6.13. The epure of the surface of the sphere with projections of the points 1 and 2 on the contour lines

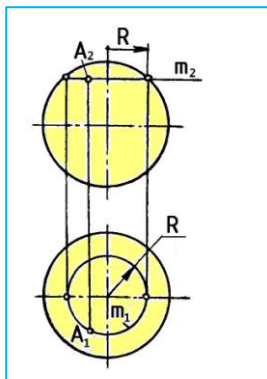


Рис. 6.16. Побудова проєкцій точки А за допомогою паралелі m

Fig. 6.16. Construction of the projections of the point A by the parallel m

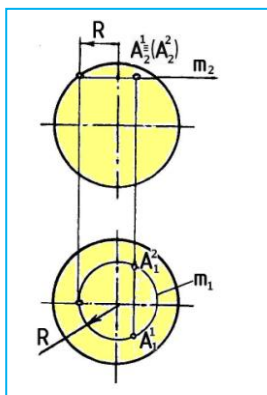


Рис. 6.15. Побудова проєкцій точки А, зазначеної у середині обрису поверхні кулі

Fig. 6.15. Construction of the projections of the point A, marked inside the contour of the sphere surface

поверхні на площині π_2), m^e – екватор (обрис поверхні на площині π_1), а також проєкції точки 1, що належить l^m , і точки 2, що належить m^e .

Поверхня кулі є поверхнею обертання, тобто точка поверхні при обертанні кулі описує коло відносно осі обертання. Ці кола називаються паралелями поверхні обертання. Найбільша паралель – це екватор.

На рис. 6.16 показано, що точка А при обертанні кулі описує коло m радіуса R. Оскільки площина кола паралельна площині π_1 , то коло, яке називається паралеллю, проєкціюється на π_1 в натуральну величину.

Точка на поверхні кулі, яка знаходиться у середині обрису, визначає положення двох точок поверхні і будується за допомогою паралелей поверхні кулі.

Так, на рис. 6.15 точка А, зазначена у середині обрису сфери, визначає положення двох точок A^1 і A^2 поверхні кулі, причому горизонтальні проєкції A_1^1 і A_1^2 побудовані за допомогою паралелі m радіуса R.

6.2.6. Поверхня прямого кругового конуса

Поверхня прямого кругового конуса утворена обертанням прямолінійної твірної l (рис. 6.16) навколо осі i , що

point 1 that belongs to l^m , and the point 2 that belongs to m^e are also noted.

The surface of the sphere is the surface of revolution, i.e. the point of the surface when revolving forms a circle against the axis of revolution. These circles are called parallels of the surface of revolution. The greatest parallel is the equator.

In Fig. 6.16 we can see that, when the sphere is revolving, the point A forms a circle m of the radius R. Since the plane of the circle is parallel to the plane π_1 , then the circle called parallel is projected on π_1 in its true size.

The point on the surface of the sphere, located inside the contour, determines the position of two points of the surface and is constructed by the parallels of the surface of the sphere.

Thus, in Fig. 6.15 the point A, noted inside the contour of the sphere, determines the position of two points A^1 and A^2 of the surface of the globe, whilst the horizontal projections A_1^1 and A_1^2 are constructed by the parallels m of the radius R.

6.2.6. The surface of the right circular cone

The surface of the right circular cone is formed when rectilinear generatrix l is revolving (Fig. 6.16) around the axis i , which is

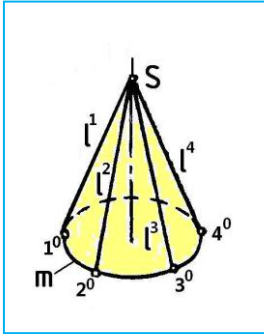


Рис. 6.16. Утворення поверхні прямого кругового конуса
Fig. 6.16. Construction of the surface of the right circular cone

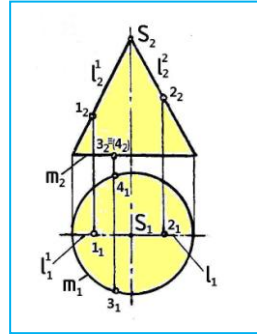


Рис. 6.17. Епюр прямого кругового конуса з проєкціями точок на обрисових твірних і на лінії основи
Fig. 6.17. The epure of the right circular cone with projections of the points on the contour generatrices and on the base

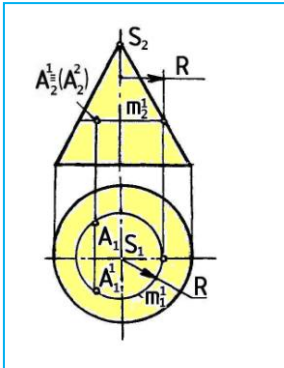


Рис. 6.18. Епюр прямого кругового конуса з проєкціями точок A^1 і A^2 , визначених за допомогою паралелі m^1
Fig. 6.18. The epure of the right circular cone with projections of the points A^1 and A^2 , determined by the parallel m^1

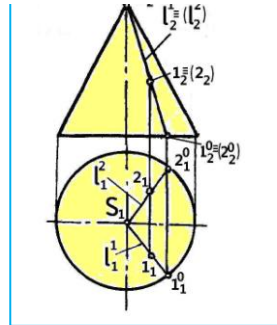


Рис. 6.19. Епюр прямого кругового конуса з проєкціями точок 1 і 2, визначених за допомогою твірних l^1 і l^2
Fig. 6.19. The epure of the right circular cone with projections of the points 1 and 2, determined by the generatrices l^1 and l^2

перпендикулярна до площини π_1 , і є висотою конуса. Якщо поверхню прямого кругового конуса перетнути площиною, паралельною до π_1 , то лінією основи m конуса буде коло.

На рис. 6.17 зображено прямий круговий конус або конус обертання, на поверхні якого зазначені проєкції точок 1 і 2, що лежать на обрисових твірних l^1 і l^2 , а також проєкції точок 3 і 6, що знаходяться на лінії основи m .

Оскільки ця поверхня є поверхнею обертання, то точку на поверхні конуса обертання можна визначити за допомогою паралелі. На рис. 6.18 горизонтальні проєкції точок A^1 і A^2 визначені за допомогою паралелі m^1 .

Точку на поверхні такого конуса можна визначити також і за допомогою твірної поверхні. Так, на рис. 6.19 горизонтальні проєкції точок 1 і 2 визначені за допомогою твірних l^1 і l^2 .

Звернемо увагу, що точці, зазначеній у середині обрису на фронтальній проєкції конуса, відповідають дві точки поверхні (рис. 6.18, 6.19).

plane parallel to π_1 then the base m of the cone will be a circle.

In Fig. 6.17 the right circular cone or cone of revolution is shown. On its surface the projections of the points 1 and 2 are marked. They lie on the contour generatrices l^1 and l^2 . There are also projections 3 and 6 located on the base m .

Since this surface is the surface of the revolution then the point on the surface of the cone of revolution can be determined by the parallel. In Fig. 6.18 the horizontal projections of the points A^1 and A^2 are determined by the parallel m^1 .

The point on the surface of such cone can also be determined by generatrix surface. Thus, in Fig. 6.19 the horizontal projections of the points 1 and 2 are determined by the generatrices l^1 and l^2 .

Note that the point marked inside the contour on the frontal projection of the cone has two corresponding points of the surface (Fig. 6.18, 6.19).

**Нарисна геометрія. Розділ 7.
Перетин поверхонь з площиною**

7.1. Перетин поверхні
багатогранника з площиною

Лінія перетину поверхні багатогранника з площиною – плоский замкнений багатокутник, який може бути побудований шляхом визначення його вершин як точок перетину ребер багатогранника із заданою площиною.

Видимими будуть ті сторони многокутника лінії перетину, які належать видимим граням багатогранника.

На рис. 7.1 замкнена лінія ABCDA є лінією перетину призми з площиною α . Чотири вершини чотирикутника лінії перетину визначені як точки перетину ребер a, b, c, d призми з площиною α : $A = a \cap \alpha$, $B = b \cap \alpha$, $C = c \cap \alpha$, $D = d \cap \alpha$.

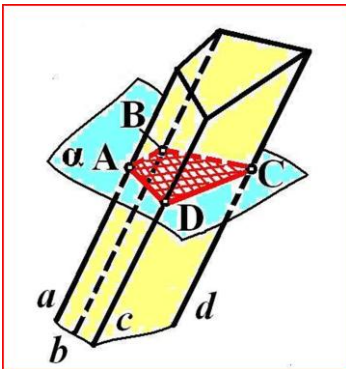
**Descriptive geometry. Chapter 7.
Intersection of surfaces with a plane**

7.1. Intersection of a polyhedron
surface with a plane

The line of intersection of the polyhedron surface with a plane is a flat closed polygon, which can be constructed by determining its vertices as points of intersection of the edges of a polyhedron with a given plane.

Visible are the sides of the polygon of the intersection line, which belong to the visible faces of the polyhedron.

In the fig. 7.1, the closed line ABCDA is the line of intersection of the prism with the plane α . The four vertices of the quadrilateral of the intersection line are defined as the points of the intersection of the edges a, b, c, d with the plane α : $A = a \cap \alpha$, $B = b \cap \alpha$, $C = c \cap \alpha$, $D = d \cap \alpha$.



**Рис. 7.1. ABCDA - лінія
перетину призми з площиною α**

Fig. 7.1. ABCDA is the line of
intersection of the prism with the
plane α .

Якщо січна площина є проєкціуючою, то одна проєкція її лінії перетину з поверхнею багатогранника збігається зі слідом-проєкцією січної площини.

На рис. 7.2 побудована лінія перетину піраміди ABCS з фронтально-проєкціуючою площиною α .

Лінією перетину є трикутник 123, оскільки три бічні ребра піраміди перетинають площину α .

Горизонтальні проєкції 1_1 і 3_1 отримано за допомогою ліній проєкційного зв'язку, а точку 2_1 визначено за допомогою горизонталі 24.

If the cut plane is projective, then one projection of its line of intersection with the surface of the polyhedron coincides with the trace-projection of the cut plane.

In the fig. 7.2 a line of intersection of the pyramid ABCS with the frontal and project plane α was constructed.

The intersection line is the triangle 123, since the three side edges of the pyramid intersect the plane α .

Horizontal projections 1_1 and 3_1 were obtained using lines of the project connection, and point 2_1 was determined using horizontal line 24.

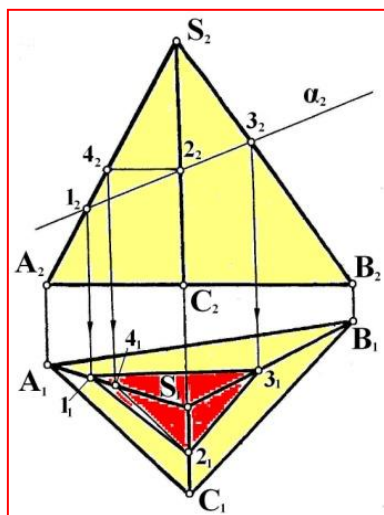


Рис. 7.2. Побудова лінії перетину піраміди ABCS з фронтально-проєкціуючою площиною α .

Fig. 7.2. Construction of the line of intersection of the pyramid ABCS with the frontal and project plane α

Лінією перетину піраміди ABCDS з площиною α є плоский п'ятикутник 12345, оскільки площину α перетинають три бічні ребра AS, BS, DS та дві сторони лінії основи BC і DC (рис. 7.3).

The line of intersection of the pyramid ABCS with the plane α is the flat pentagon 12345, since the plane α is intersected by the three side edges of the AS, BS, DS and the two sides of the base line BC and DC (fig. 7.3).

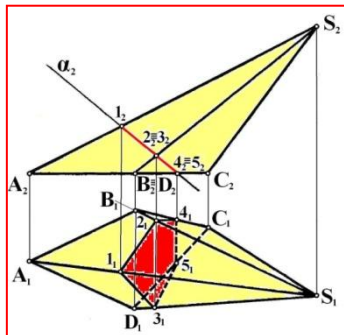


Рис. 7.3. Побудова лінії перетину піраміди ABCS з площиною α .

Fig. 7.3. Construction of the line of intersection of the pyramid ABCS with plane α

Лінією перетину призми з площиною α є плоский чотирикутник 1234, оскільки площину α перетинають чотири бічні ребра.

The line of intersection of the prism with the plane α is a flat quadrilateral 1234, since the plane α is intersected by four side edges

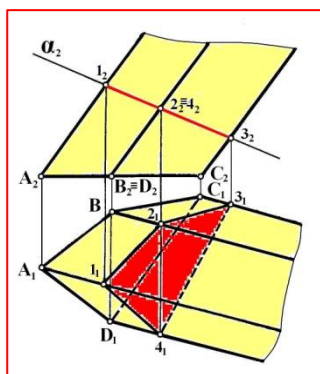


Рис. 7.4. Побудова лінії перетину призми з площиною α .

Fig. 7.4. Construction of the line of intersection of the prism with plane α

Якщо січною площиною є площина загального положення, то для побудови лінії перетину можна застосовувати спосіб заміни площин проекцій, за допомогою якого січна площина загального положення перетворюється у новій системі площин проекцій в проєкціюючу. Це дозволяє тільки за допомогою ліній проєкційного зв'язку визначити проєкції лінії перетину у старій (заданій) системі площин проєкцій.

На рис. 7.5 показано перетворення площини загального положення α , що задана лініями рівня, в проєкціюючу площину в новій системі площин проєкцій Π_4/Π_1 , а також побудова нової проєкції призми на площині Π_4 .

If the cut plane is the plane of the general position, then to construct the intersection line, one can use a method of replacement of planes of projections, with the help of which the cutting plane of the general position transforms into a new system of planes of projections into the projection. It allows only with the help of the lines of the project connection to determine the projections of the intersection line in the old (given) system of planes of projections.

In the fig. 7.5 shows the transformation of the plane of the general position α given by the level lines into the project plane in the new system of planes of projections Π_4/Π_1 , as well as the construction of a new projection of prisms on the plane Π_4 .

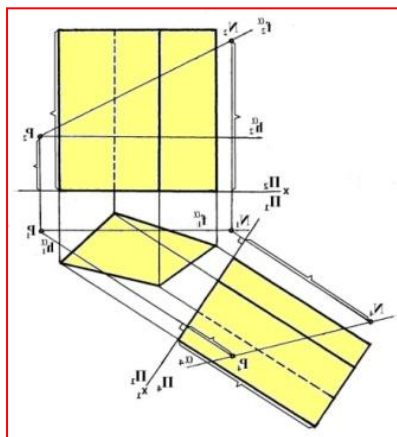


Рис. 7.5. Побудова лінії перетину призми з площиною загального положення

Fig. 7.5. Constraction of the line of intersection of the prism with the plane of the general position

На рис. 7.7. показано побудову лінії перетину 1234 призми з площиною загального положення α ($h^{\alpha} \cap f^{\alpha}$) за допомогою способу заміни площин проекцій.

In the fig. 7.7 shows the construction of a line of intersection 1234 of the prism with a plane of general position α ($h^{\alpha} \cap f^{\alpha}$) using the method of replacement of planes of projections.

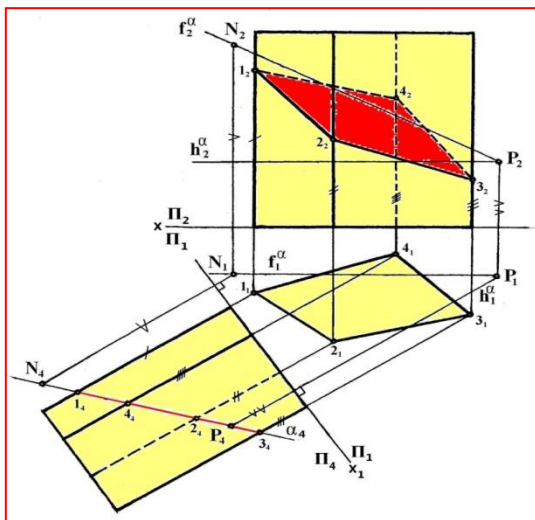
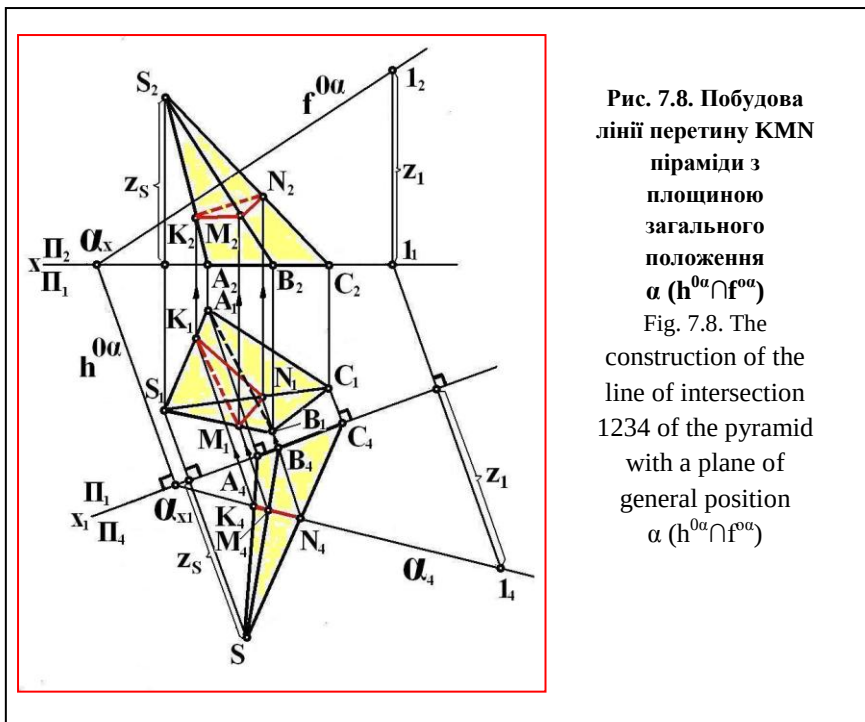


Рис. 7.7. Побудова лінії перетину 1234 призми з площиною загального положення α ($h^{\alpha} \cap f^{\alpha}$)

Fig. 7.7. The construction of the line of intersection 1234 of the prism with a plane of general position α ($h^{\alpha} \cap f^{\alpha}$)

Побудова лінії перетину KMN піраміди ABCS з площиною загального положення α , що задана слідами $h^{0\alpha}$ і $f^{0\alpha}$, за допомогою способу заміни площин проекцій (рис. 7.8).

Construction of the line of intersection KMN of the pyramid ABCS with the plane of general position α given by the traces $h^{0\alpha}$ and $f^{0\alpha}$, using the method of replacement of planes of projections (fig. 7.8).



**Рис. 7.8. Побудова
лінії перетину KMN
піраміди з
площиною
загального
положення
 $\alpha (h^{0\alpha} \cap f^{\alpha})$**

Fig. 7.8. The
construction of the
line of intersection
1234 of the pyramid
with a plane of
general position
 $\alpha (h^{0\alpha} \cap f^{\alpha})$

7.2. Перетин кривої поверхні з площиною

Для побудови лінії перетину кінечної поверхні з площиною, як і іншої кривої поверхні, визначають проєкції окремих точок лінії перетину і плавно їх з'єднують.

Серед характерних (особливих) точок лінії перетину виділимо точки видимості, які знаходяться на обрисових лініях поверхні. В цих точках може змінюватися видимість лінії перетину, крива лінія може переходити в пряму лінію тощо.

Якщо площина, що перетинає

7.2. Intersection of the curved surface with the plane

To construct a line of intersection of a conical surface with a plane, as well as another curved surface, determine the projections of individual points of the intersection and smoothly connect them.

Among the characteristic (special) points of the line of intersection, we distinguish the points of view that are on the outline lines of the surface. In these points, the visibility of the intersection line may change, the curve line can transform in a straight line, and so on.

криву поверхню, проекціюючи, то одна проекція лінії перетину збігається зі слідом-проекцією проекціюючої площини, а іншу проекцію можна знайти за допомогою твірних (для конічної та циліндричної поверхонь), а для поверхонь кулі та прямого кругового конуса, які є поверхнями обертання, за допомогою паралелей, які проекціюються у вигляді простих ліній – кіл та прямих ліній.

На рис. 7.8 побудовано лінію перетину похилого кругового конуса (еліптичного конуса) з фронтально-проекціюючою площиною α .

Розв’язування:

1. Оскільки фронтальна проекція лінії перетину збігається зі слідом-проекцією α_2 площини α , то на фронтальній проекції вибираємо фронтальні проекції точок лінії перетину і за допомогою твірних конічної поверхні знаходимо їх горизонтальні проекції.

Визначаємо характерні точки лінії перетину – точки, які лежать на обрисових твірних: $1 \in l^1$, $2 \in l^2$, $3 \in l^3$, $4 \in l^4$. Для точок 1 і 2 спочатку фіксуємо їх фронтальні проекції, а потім за допомогою обрисових твірних l^1 і l^2 знаходимо їх горизонтальні проекції 1_1 і 2_1 . В точках 3_1 і 4_1 на горизонтальних проекціях обрисових твірних l^3 і l^4 буде мінятися видимість лінії перетину, тому для визначення положення точок 3_1 і 4_1 будуємо фронтальні проекції твірних l^3 і l^4 ,

If the plane that intersects the curved surface is project plane, then one projection of the intersection line coincides with the trace-projection of the project plane, and another projection can be found using generatrices (for conical and cylindrical surfaces), and for surfaces of a sphere and a right circular cone that are surfaces of rotation, using parallels, which are projected in the form of simple lines - circles and straight lines.

In the fig. 7.8 a line of intersection of an oblique circular cone (elliptical cone) with a frontal and project plane α was constructed.

Solution:

1. Since the frontal projection of the line of intersection coincides with the projection α_2 of the plane α , we choose the frontal projections of the points of the line of the intersection on the frontal projection and, using the generic conical surface, we find their horizontal projections.

Determine the characteristic points of the line of intersection. These points that lie on the outline generatrices: $1 \in l^1$, $2 \in l^2$, $3 \in l^3$, $4 \in l^4$. For points 1 and 2, first fix their front projections, and then, using the outline generatrices l^1 and l^2 , we find their horizontal projections 1_1 and 2_1 . At the points 3_1 and 4_1 , the horizontal projections of the outline generatrices l^3 and l^4 will change the visibility of the line of intersection, therefore, to determine the position of the points 3_1 and 4_1 we construct the frontal projections of the generatrices l^3 and l^4 ,

фіксуємо 3_2 і 4_2 ($3_2 = l_2^3 \cap a_2$, $4_2 = l_2^4 \cap a_2$), а потім за допомогою ліній проєкційного зв'язку знаходимо на l_1^3 і l_1^4 горизонтальні проєкції 3_1 і 4_1 .

2. Горизонтальні проєкції проміжних точок 5 і 6 визначаємо за допомогою твірних l^5 і l^6 (точка, що зазначена в середині обрису конічної поверхні, визначає положення двох точок поверхні, тому фіксуємо $5' \equiv 6'$).

3. Отримані горизонтальні проєкції точок 1,2,3,4,5,6 з'єднуємо плавною лінією з урахуванням їх видимості – видимими будуть ті точки лінії перетину, які лежать на твірних, видимих на горизонтальній проєкції.

Точки 1_1 , 5_1 є видимими, а точки 2_1 , 6_1 – невидимими, в точках 3_1 і 4_1 , які лежать на обрисових твірних l_3 і l_4 , змінюється видимість лінії перетину.

fix 3_2 and 4_2 ($3_2 = l_2^3 \cap a_2$, $4_2 = l_2^4 \cap a_2$), and then, using the lines of the project connection, we find on horizontal lanes l_1^3 and l_1^4 the horizontal projections 3_1 and 4_1 .

2. The horizontal projections of the intermediate points 5 and 6 are determined using the generators l^5 and l^6 (the point indicated in the middle of the contour of the conical surface determines the position of two points of the surface, so we fix $5 \equiv 6$).

3. Obtained horizontal projections of points 1,2,3,4,5,6 connect a smooth line, taking into account their visibility - the points of the line of intersection, which lie on the generatrices visible on the horizontal projection, will be visible.

Points 1_1 , 5_1 are visible, and points 2_1 , 6_1 are invisible, at points 3_1 and 4_1 , which lie on the outline generators l^3 and l^4 , the visibility of the line of intersection changes.

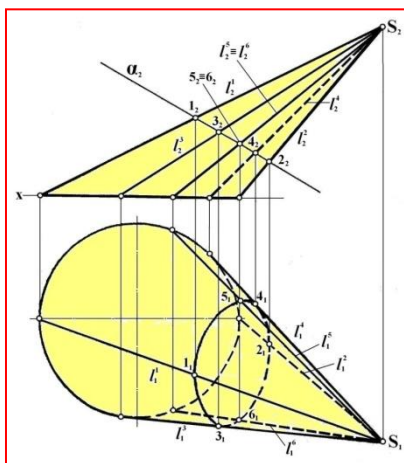


Рис. 7.9. Побудова лінії перетину похилого кругового конуса з фронтально-проєкціуючою площиною α .
Fig. 7.9. The construction of the line of intersection of an oblique circular cone with a frontal and project plane

На рис. 7.10 побудовано лінію перетину похилого кругового циліндра (еліптичного циліндра) з фронтально-проекціуючою площиною α .

Під час розв'язування цієї задачі потрібно враховувати, що твірні циліндричної поверхні паралельні між собою.

In the fig. 7.10 the line of intersection of an oblique circular cylinder (an elliptical cylinder) with a frontal and project plane α was constructed.

When solving this problem it is necessary to take into account that the created cylindrical surfaces are parallel to each other.

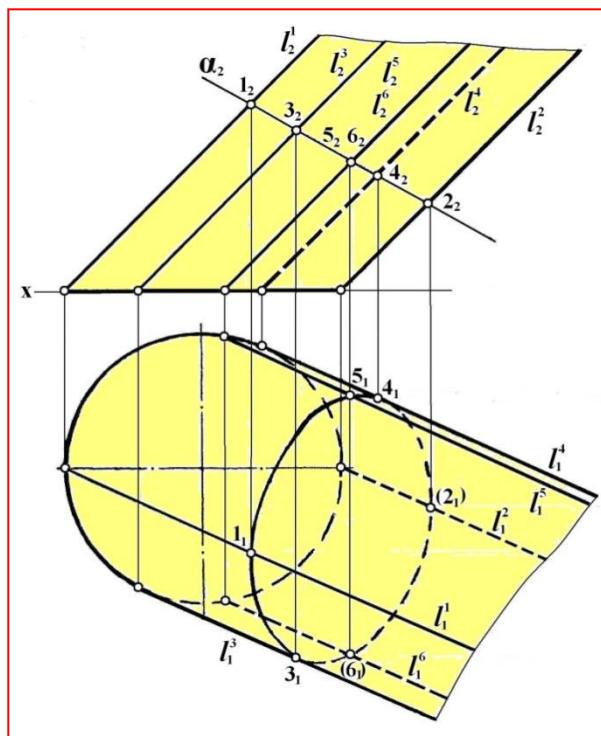


Рис. 7.10. Побудова лінії перетину похилого кругового циліндра з фронтально-проекціуючою площиною α .

Fig. 7.10. The construction of the line of intersection of an oblique circular cylinder with a frontal and project plane

На рис. 7.11 побудовано лінію перетину поверхні кулі з фронтально-проекціуючою площиною α. Розв'язування: 1. На фронтальній проекції фіксуємо 1_2 і 2_2 точок, що лежать на головному меридіані. Головний меридіан є обрисовою лінією на фронтальній проекції. За допомогою ліній проекційного зв'язку знаходимо 1_1 і 2_1. 2. На фронтальній проекції фіксуємо точки $7_2 \equiv 8_2$ і за допомогою ліній проекційного зв'язку знаходимо їх горизонтальні проекції 7_1 і 8_1. В цих точках змінюється видимість горизонтальної проекції лінії перетину (точки 7, 8 лежать на обрисовій на горизонтальній проекції лінії - екваторі, що є найбільшою паралеллю). 3. Фіксуємо фронтальні проекції $3_{2,4_2}$ і $5_{2,6_2}$ проміжних точок 3,4 і 5,6. Оскільки точки зазначені в середині обрису, то $3_2 \equiv 4_2$ і $5_2 \equiv 6_2$. За допомогою паралелей m^1 і m^2 визначаємо горизонтальні проекції $3_{1,4_1}$ і $5_{1,6_1}$. 4. З'єднуємо горизонтальні проекції точок лінії перетину плавною лінією з урахуванням їх видимості. На рисунках побудовано лінії перетину прямих кругових конусів (конусів обертання) з фронтально-проекціуючими площинами α. Горизонтальні проекції проміжних точок (точок, що не лежать на обрисових лініях) знайдено за допомогою паралелей	In the fig. 7.11 a line of intersection of the surface of a sphere with a frontal and project plane α is constructed. Solution: 1. On the frontal projection, we fix 1_2 and 2_2 of the points lying on the main meridian. The main meridian is an outline on the frontal projection. With the help of the lines of the project connection, we find 1_1 and 2_1. 2. On the frontal projection, we fix the points $7_2 \equiv 8_2$ and using the line of the project connection we find their horizontal projections 7_1 and 8_1. At these points, the visibility of the horizontal projection of the line of a intersection changes (points 7, 8 lie on the outline on the horizontal projection of the line - the equator, which is the largest parallel). 3. We fix the frontal projections of $3_{2,4_2}$ and $5_{2,6_2}$ of the intermediate points of 3.4 and 5.6. Since the points are indicated in the middle of the outline, then $3_2 \equiv 4_2$ and $5_2 \equiv 6_2$. Using the parallels m^1 and m^2, we determine the horizontal projections $3_{1,4_1}$ and $5_{1,6_1}$. 4. Connect the horizontal projections of the points of the line of a intersection with a smooth line, taking into account their visibility. In the fig. 7.11 the lines of intersection of right circular cones (cones of rotation) with frontal and project planes α are constructed. Horizontal projections of intermediate points (points that do not lie in the outline) are found using parallels m^1 and m^2.
---	---

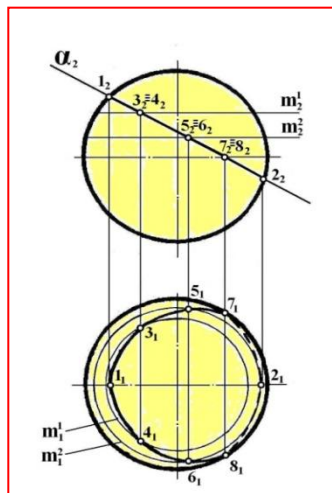


Рис.7.11. Побудова лінії перетину поверхні кулі з фронтально-проекціуючою площиною α .
Fig. 7.10. The construction of the line of intersection of the surface of a sphere with a frontal and project plane α

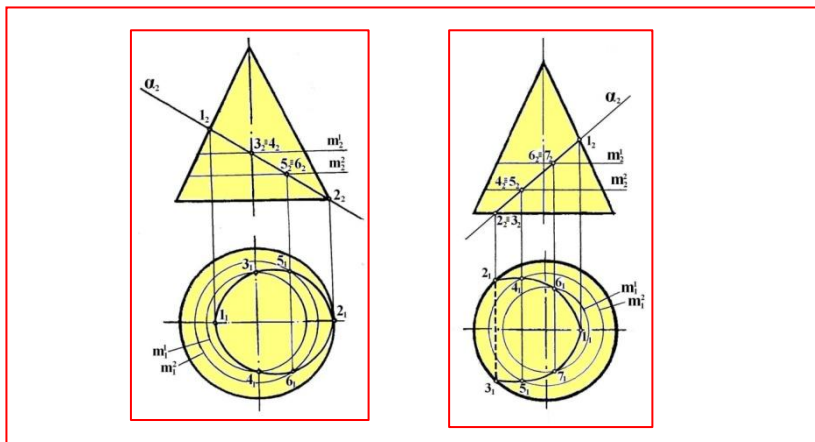


Рис. 7.12. Побудова лінії перетину похилого прямих кругових конусів з фронтально-проекціуючою площиною α .
Fig. 7.12. The construction of the line of intersection of right circular cones with a frontal and project plane α

При перетині кривої поверхні з площиною загального положення для визначення лінії перетину можна застосовувати спосіб заміни площин проєкцій, перетворюючи задану площину загального положення в проєкціюючу

На рис. 7.13 показано перетворення площини загального положення α , що задана лініями рівня, в проєкціюючу площину в новій системі площин проєкцій Π_4/Π_2 , а також побудова нової проєкції поверхні кулі на площині Π_4 .

На рис. 7.14 показано перетворення площини загального положення α , що задана слідами, в проєкціюючу площину в новій системі площин проєкцій Π_4/Π_2 , а також побудова нової проєкції конуса обертання на площині Π_4 .

For determining the line of intersection the curved surface with the plane of the general position, one can apply a method of replacement of planes of projections, transforming a given plane of the general position into a project plane.

In the fig. 7.13 is shown the transformation of the plane of the general position α given by the level lines into the project plane in the new system of the planes of projections Π_4/Π_2 , as well as the construction of a new projection of the surface of the sphere on the plane Π_4 .

In the fig. 7.14 is shown the transformation of the plane of the general position α given by the traces into the project plane in the new system of the planes of projections Π_4/Π_2 , as well as the construction of a new projection of the cone of rotation (revolution) on the plane Π_4 .

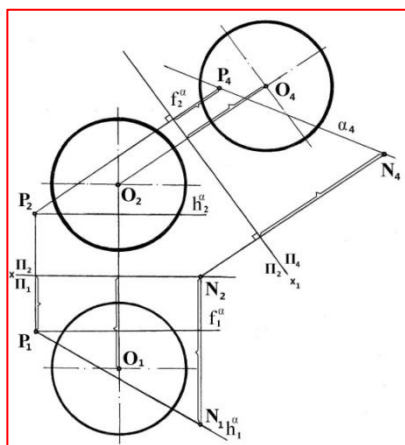


Рис. 7.13. Побудова нової проєкції поверхні кулі на площині Π_4 .

Fig. 7.13. The construction of a new projection of the surface of the sphere on the plane Π_4 .

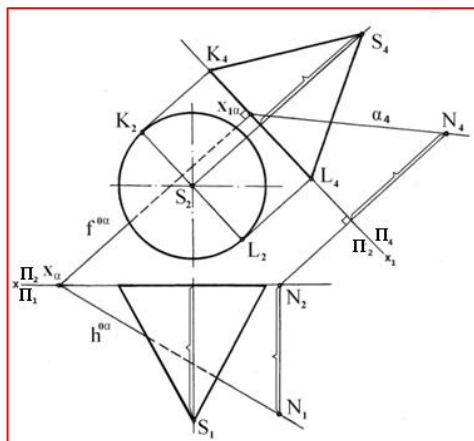


Рис. 7.14. Побудова нової проекції поверхні конуса обертання на площині Π_4 .

Fig. 7.14. The construction of a new projection of the cone of rotation on the plane Π_4 .

На рис. 7.15 показано перетворення площини загального положення α , що задана лініями рівня, в проєкціюючу площину в новій системі площин проєкцій Π_4/Π_2 , а також побудова нової проєкції прямого кругового циліндра на площині Π_4 .

На рис. 7.16 показано перетворення площини загального положення α , що задана слідами, в проєкціюючу площину в новій системі площин проєкцій Π_4/Π_2 , а також побудова нової проєкції похилого кругового циліндра на площині Π_4 .

In the fig. 7.15 is shown the transformation of the plane of the general position α given by the level lines into the project plane in the new system of the planes of projections Π_4/Π_2 , as well as the construction of a new projection of the right circular cylinder on the plane Π_4 .

In the fig. 7.16 is shown the transformation of the plane of the general position α given by the traces into the project plane in the new system of the planes of projections Π_4/Π_2 , as well as the construction of a new projection of the oblique circular cylinder on the plane Π_4 .

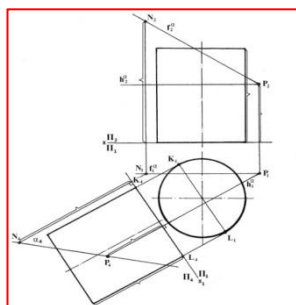
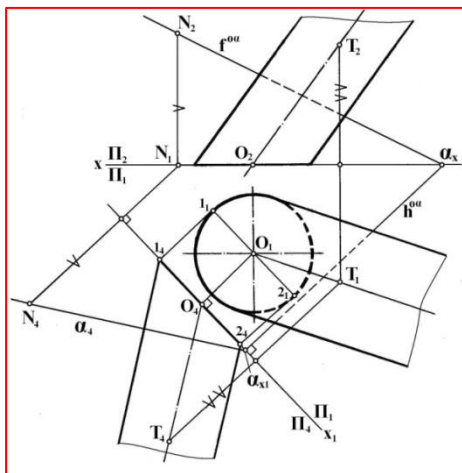


Рис. 7.15. Побудова нової проєкції прямого кругового циліндра на площині Π_4 .

Fig. 7.15. The construction of a new projection of the right circular cylinder on the plane Π_4



**Рис. 7.16. Побудова
нової проекції
похилого кругового
циліндра на площині
 Π_4 .**

Fig. 7.16. The construction of a new projection of the oblique circular cylinder on the plane Π_4

На рис. 7.17 показано, як знайдено точки 1,2,3, що належать лінії перетину похилого кругового конуса з площиною загального положення $\alpha (h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$. Застосовуючи спосіб заміни площин проєкцій, провівши $x_1 \perp h^{0\alpha}$, отримаємо, що площина α в новій системі площин проєкцій Π_4/Π_1 становиться проєкціюючою, перпендикулярною до Π_4 , де α_4 – слід-проєкція площини α . На α_4 , що розміщена в межах обрису поверхні конуса, взято точки проєкції 1₄, 2₄ точок 1, 2, що належать лінії перетину. Проєкції 1₁, 2₁ і 1₂, 2₂ в старій (заданій) системі Π_2/Π_1 знайдено за допомогою твірних l^1 і l^2 .

В точці 3₂ змінюється видимість фронтальної проєкції лінії перетину. Для її визначення спочатку будуємо проєкції l^3 на Π_1 , а потім на Π_4 . Визначаємо точку 3₄:

In the fig. 7.17 is shown how the points 1,2,3, which belong to the line of intersection of an oblique circular cone with the plane of the general position $\alpha (h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$, are found. Applying the method of replacement of planes of projections by drawing $x_1 \perp h^{0\alpha}$, we obtain that the plane α in the new system of projection planes Π_4/Π_1 becomes project plane perpendicular to Π_4 where α_4 is the trace-projection of the plane α . On α_4 , which is located within the contour of the surface of the cone, the projection points 1₄, 2₄ points 1, 2 belonging to the line of intersection are taken. Projections 1₁, 2₁ and 1₂, 2₂ in the old (given) system Π_2/Π_1 are found using the generatrices l^1 and l^2 .

At point 3₂ the visibility of the frontal projection of the line of intersection changes. To determine it first, we build projections l^3 on Π_1 , and then on Π_4 . Define a point 3₄:

$3_4 = l_4^3 \cap \alpha_4$. Далі за допомогою ліній проєкційного зв'язку знаходимо 3_1 на l_1^3 , а потім 3_2 на l_2^3 .

$= l_4^3 \cap \alpha_4$. Next, using the lines of the project connection, we find 3_1 to l_1^3 , and then 3_2 to l_2^3 .

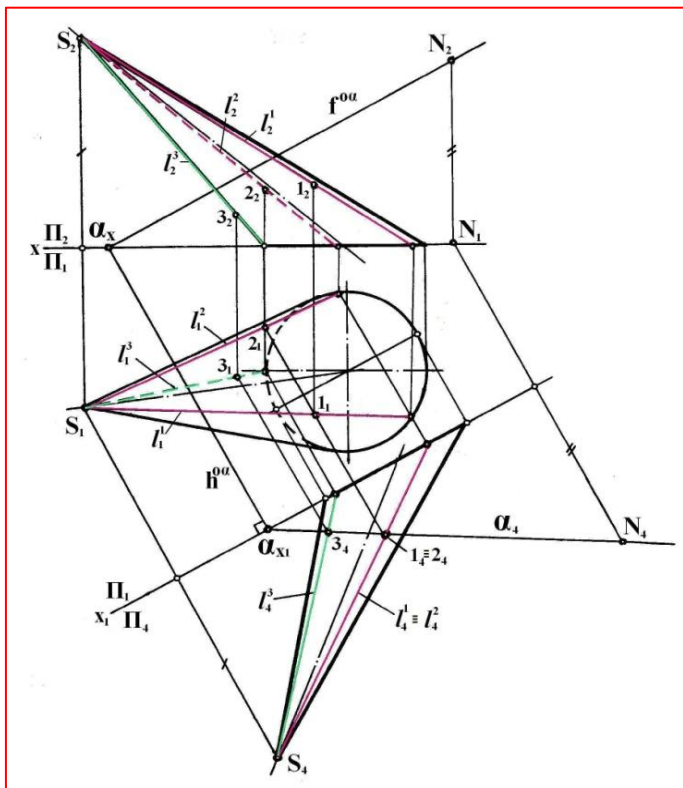


Рис. 7.17. Побудова точок 1, 2, 3, що належать лінії перетину похилого кругового конуса з площиною загального положення $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$

Fig. 7.17. The construction of the points 1, 2, 3 which belong to the line of intersection of an oblique circular cone with the plane of the general position $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$

Наведемо приклади побудови лінії перетину кривої поверхні з площиною загального положення за допомогою способу заміни площин проєкцій.

На рис. 7.18 побудовано лінію перетину поверхні кулі (сфери) з площиною загального положення $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$. Дамо пояснення до виконання цієї задачі. За допомогою способу заміни площин проєкцій площину загального положення α перетворюємо в проєціюючу в системі Π_4/Π_1 і знаходимо проєкцію сфери на Π_4 . Відмічаємо точки 1_4 і 2_4 перетину α_4 з обрисом сфери на Π_4 . Між точками 1_4 і 2_4 знаходиться проєкція на Π_4 лінії перетину сфери з площиною $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$. Горизонтальні проєкції 1_1 і 2_1 точок 1 і 2 знаходяться на лінії K_1L_1 , яка паралельна до x_1 і є горизонтальною проєкцією обрису сфери на Π_4 . За допомогою фронтальних прямих $f^{1\alpha}$ і $f^{2\alpha}$ площини α знаходимо фронтальні проєкції 1_2 і 2_2 точок 1 і 2. Точки 3 і 4 є точками видимості для горизонтальної проєкції лінії перетину. Вони знаходяться на екваторі сфери. Спочатку зафіксуємо їх проєкції 3_4 і 4_4 на проєкції екватора на Π_4 , а потім їх спроеціюємо на Π_1 і на Π_2 . Точки 5 і 6 є точками видимості для фронтальної проєкції лінії перетину. Вони знайдені за допомогою січної площини γ , яка проходить через центр сфери і паралельно до площини Π_2 .

Here are examples of constructing a line of intersection of a surface curve with a plane of general position by means of a method of replacement of planes of projections.

In the fig. 7.18 a line of intersection of the surface of a sphere with a plane of general position $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$ is constructed. Let's give an explanation to this problem. With the method of replacement of planes of projections we transform the plane of the general position α into a project planr in the system Π_4/Π_1 and find the projection of the sphere on Π_4 . We note the points 1_4 and 2_4 of the intersection α_4 with the outline of the sphere on Π_4 . Between points 1_4 and 2_4 there is a projection on Π_4 of the line of intersection of a sphere with a plane $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$. Horizontal projections 1_1 and 2_1 points 1 and 2 are on the line K_1L_1 which is parallel to x_1 and is a horizontal projection of the outline of the sphere on Π_4 . Using the frontal straight lines $f^{1\alpha}$ and $f^{2\alpha}$ of the plane α , we find the front projections 1_2 and 2_2 points 1 and 2. Points 3 and 4 are points of visibility for the horizontal projection of the line of intersection. They are at the equator of the sphere. First, we fix their projections 3_4 and 4_4 on the projection of the equator on Π_4 , and then they are projected on Π_1 and Π_2 . Points 5 and 6 are points of visibility for the frontal projection of the intersection. They are found by means of a cut plane γ , which draws through the center of the sphere and parallel to the plane Π_2 . The plane γ intersects the sphere along the main

Площина γ перетинає сферу по головному меридіану, а площину α – по фронталі $f^{3\alpha}$. В точках перетину цих ліній знайдено точки 5 і 6. Проміжні точки 7 і 8 побудовано за допомогою паралелі m .

meridian, and the plane α intersects along frontal straight line $f^{3\alpha}$. At points of intersection of these lines points 5 and 6 are found. Intermediate points 7 and 8 are constructed using the parallel m .

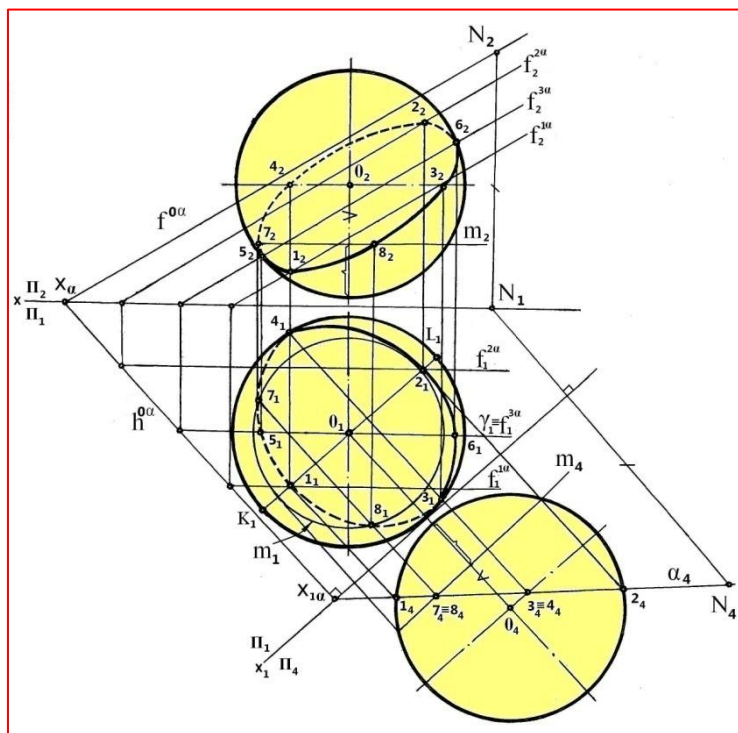


Рис. 7.18. Побудова лінії перетину поверхні кулі з площиною загального положення $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$

Fig. 7.18. The construction of the line of intersection of the surface of a sphere with a plane of general position $\alpha(h^{0\alpha} \cap f^{0\alpha})$

На рис. 7.19 показано побудову лінії перетину поверхні прямого кругового конуса з площиною загального положення $\alpha(h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha})$. Точку 4, в якій міняється видимість горизонтальної проекції лінії перетину, визначено за допомогою твірної S_4^0 , точку 3 – за допомогою твірної LS , а точку 5 – за допомогою твірної S_5^0 , точки 6 і 7 – за допомогою паралелі m . Точки 1 і 2 знаходяться на лінії основи конуса.

На рис. 7.20 за допомогою способу заміни площин проекцій побудовано лінію перетину поверхні прямого кругового циліндра з площиною загального положення, що задана лініями рівня.

In the fig. 7.19 is shown the construction of the line of intersection of the surface of a right circular cone with a plane of general position $\alpha(h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha})$. Point 4, in which the visibility of the horizontal projection of the line of intersection changes, is determined by the generatrix S_4^0 , point 3 by the generatrix LS , and point 5 by the generatrix S_5^0 , points 6 and 7 by the parallel m . Points 1 and 2 are on the line of cone base

In the fig. 7.20 using the method of replacement of planes a line of intersection of the surface of a right circular cylinder with a plane of general position, given by the level lines is constructed.

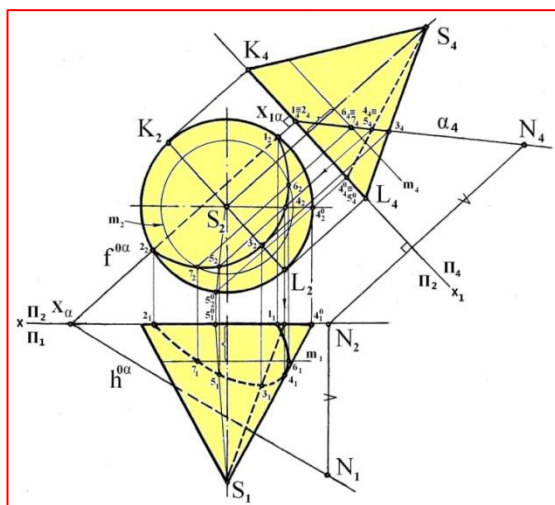
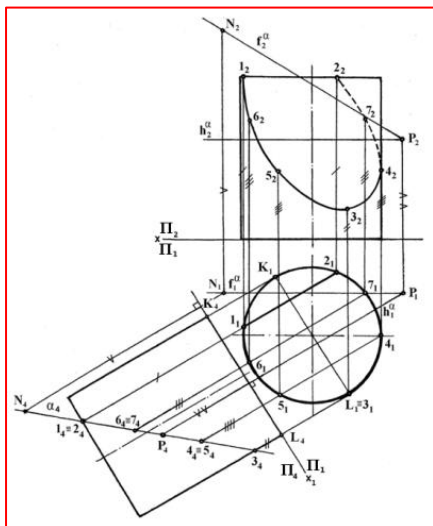


Рис. 7.19. Побудова лінії перетину поверхні прямого кругового конуса з площиною загального положення $\alpha(h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha})$.

Fig. 7.19. The construction of the line of intersection of the right circular cone with a plane of general position $\alpha(h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha})$



**Рис. 7.20. Побудова лінії
перетину поверхні
прямого кругового
циліндра з площиною
загального
положення, що
задана лініями рівня**

Fig. 7.20. The construction
of the line of intersection
of the surface of a right
circular cylinder with a
plane of general position
given by the level lines

Нарисна геометрія. Розділ 8. Взаємний перетин поверхонь

Залежно від розміщення поверхонь, що перетинаються, перетин може бути повним або неповним.

Повним називається перетин, коли всі твірні або ребра поверхні одного з тіл перетинають поверхню іншого тіла.

Неповним називається перетин, при якому не всі твірні або ребра поверхонь обох тіл, що перетинаються, беруть участь в перетині.

Проекції лінії перетину повинні розміщуватися у межах обрисових ліній як однієї, так і іншою поверхні водночас.

8.1. Побудова лінії перетину поверхонь при проєкціюючому положенні однієї з поверхонь відносно площин проєкцій

В цьому випадку одна проєкція лінії перетину відома – вона збігається з проєкцією поверхні на ту площину проєкцій, до якої ця поверхня перпендикулярна. Відсутню проєкцію будують за допомогою допоміжних ліній (твірних, паралелей) іншої поверхні, що займає загальне положення.

Наведемо приклади на побудову лінії перетину поверхонь, що перетинаються.

На рис. 8.1 показано побудову лінії перетину поверхні прямого

Descriptive geometry. Chapter 8. Mutual intersection of surfaces

Depending on the placement of intersecting surfaces, the intersection may be complete or incomplete.

Complete intersection is called when all the generatrices or edges of a surface of one body intersect the surface of another body.

Incomplete intersection is called, in which not all the generatrices or edges of the surfaces of the intersecting two bodies take part in the intersection.

The projections of the line of intersection must be located within of the contour lines as one and the other surface at the same time.

.

8.1. Construction of a line of intersection of surfaces at the projection position of one of the surfaces relative to planes of projections

In this case, one projection of the line of intersection is known. It coincides with the projection of the surface on that plane of projections, to which this surface is perpendicular. Lack of projection is constructed using auxiliary lines (generatrices, parallels) of another surface that occupies a general position.

Here are examples of construction of a line of intersection of intersecting surfaces.

In the fig, 8.1 is shown the construction of a line of intersection of

кругового конуса з поверхнею прямої призми. Перетин поверхонь є повним, оскільки всі три бічні ребра призми, що займають фронтально-проеціююче положення, перетинають поверхню конуса. Три бічні грані призми є фронтально-проеціюючими площинами, перпендикулярними до площини π_2. Лінія перетину двох площин знаходиться в трьох бічних гранях призми і проєціюється на площину π_2 у відрізки прямих ліній, які є проєкціями граней призми на ту ж площину π_2, тобто фронтальна проєкція лінії перетину двох поверхонь збігається з фронтальною проєкцією самої призми. Послідовність побудови лінії перетину така: 1. Визначаємо характерні точки лінії перетину – це точки 1,2,3, в яких здійснюється перехід одного виду лінії перетину до іншого. Просторова крива лінія перетину розпадається на три плоскі лінії, де точки 1,2,3 є кінцями цих ліній: - лінія 13 знаходиться в грані ($b // c$) призми і є неповним еліпсом; - лінія 12 знаходиться в грані ($a // b$) і є параболою, оскільки відрізок $1_2 2_2$ паралельний до обрисової твірної; - лінія 23 знаходиться в грані ($a // c$) і є дугою кола, оскільки грань ($a // c$) паралельна до площини основи конуса. Горизонтальні проєкції точки 1	the surface of a right circular cone with the surface of a right prism. The intersection of the surfaces is complete, since all three side edges of the prism that occupy the frontal and project position intersect the surface of the cone. The three side faces of the prism are frontal project planes perpendicular to the plane π_2. The line of intersection of two planes is located in three side faces of the prism and projected on the plane π_2 in a segments of straight lines, which are the projections of the faces of the prism on the same plane π_2, that is, the frontal projection of the line of intersection of the two surfaces coincides with the frontal projection of the prism itself. The sequence of construction of the line of intersection is as follows: 1. Determine the characteristic points of the line of intersection. These are points 1,2,3, in which the transition of one type of line of intersection to another. The spatial curve of the line of intersection is divided into three flat lines, where points 1,2,3 are the ends of these lines: - line 13 is on the face ($b // c$) of the prism and is an incomplete ellipse; - line 12 is on the face ($a // b$) and is a parabola, since segment $1_2 2_2$ is parallel to the outline generatrix; - line 23 is on the face ($a // c$) and is an arc of the circle, since the face ($a // c$) is parallel to the plane of the cone base. Horizontal projections of point 1 are defined using the parallel m^1, and points 2 and 3 are defined using the
--	--

визначено за допомогою паралелі m^1 , а точок 2 і 3 – за допомогою паралелі m^3 . Оскільки точки, що зазначена в середині обрису, відповідають дві точки поверхні, то на епюрі фіксується одна фронтальна проекція точки, наприклад l_2 , але дві горизонтальні проекції – 1_1 і 1_1 .

2. Горизонтальні проекції проміжних точок 4 і 5 побудовано за допомогою паралелі m^2 .

3. Горизонтальні проекції точок лінії перетину з'єднано з урахуванням їх видимості. Грані $(a//b)$ і $(b//c)$ на горизонтальній проекції є видимими, тому лінії $1_14_12_1$ і $1_15_13_1$ є видимими, проте грань $(a//c)$ є невидимою, тому лінія 2_13_1 , що є дугою кола, також є невидимою.

Перетин поверхонь є повним, тому на горизонтальній проекції видно дві окремі замкнені горизонтальні проекції лінії перетину. На фронтальній проекції ці дві окремі лінії перетину збігаються в одну спільну, яка, в свою чергу, збігається з фронтальною проекцією призми.

На рис. 8.2 показано побудову лінії перетину поверхні прямого кругового конуса з поверхнею прямого кругового циліндра.

Перетин поверхонь є неповним, оскільки не всі тілні як поверхні конуса, так і поверхні циліндра, беруть участь у перетині.

parallel m^3 . Since the point indicated in the middle of the outline corresponds to two points of the surface, one frontal projection of the point, for example l_2 , is fixed in the epure, but two horizontal projections are 1_1 and 1_1 .

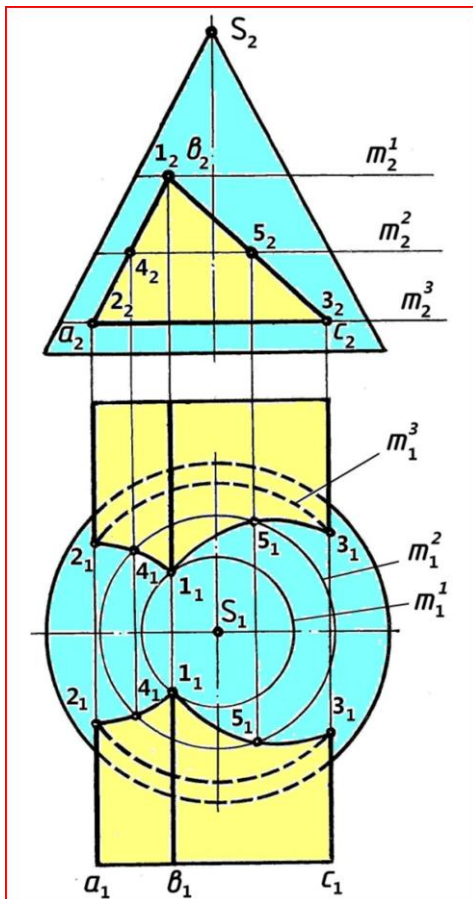
2. Horizontal projections of intermediate points 4 and 5 are constructed using a parallel m^2 .

3. The horizontal projections of the points of the intersection line are connected according to their visibility. The faces $(a // b)$ and $(b // c)$ on the horizontal projection are visible, therefore the lines $1_14_12_1$ and $1_15_13_1$ are visible, but the face $(a // c)$ is invisible, so the line 2_13_1 , which is the arc of the circle, is also invisible

The intersection of the surfaces is complete, so there are two separate closed horizontal projections of the intersection line on the horizontal projection. On the frontal projection, these two separate lines of intersection coincide in one common line, which, in turn, coincides with the frontal projection of the prism.

In the fig. 8.2 is shown the construction of a line of intersection of the surface of a right circular cone with the surface of a right circular cylinder.

The intersection of the surfaces is incomplete, since not all the generatrices as the surface of the cone, and the surface of the cylinder, are i take part in the intersection.



Рисю 8.1. Побудова лінії перетину поверхні прямого кругового конуса з поверхнею прямої призми.

Fig. 8.1. The construction of a line of intersection of the surface of a right circular cone with the surface of a right prism.

Бічна поверхня циліндра є проєкціюючою, перпендикулярною до площини π_2 , тому лінія перетину, яка розміщена на поверхні циліндра, проєкціюється на фронтальну проєкцію в лінію, що збігається з фронтальною проєкцією циліндра, яка розміщена в межах обрису

The lateral surface of the cylinder is a projection perpendicular to the plane π_2 , so the line of intersection located on the cylinder surface is projected on the frontal projection in a line coinciding with the frontal projection of the cylinder, which is located within the contour (outline) of the conical surface.

The sequence of construction of the

конічної поверхні.

Послідовність побудови лінії перетину така:

1. Горизонтальні проекції 1_1 і 2_1 точок 1 і 2, що лежать на обрисовій твірній, визначено за допомогою ліній проекційного зв'язку.

2. В точках 3_1 і 4_1 змінюється видимість горизонтальної проекції лінії перетину. Ці точки визначено за допомогою паралелі m^1 .

3. Горизонтальні проекції проміжних точок 5 ... 12 визначено за допомогою паралелей m^2, m^3, m^4, m^5 .

4. Горизонтальні проекції визначених точок лінії з'єднано з урахуванням їх видимості.

line of intersection is as follows:

1. Horizontal projections 1_1 and 2_1 points 1 and 2, which lie on the outline generatrix, are determined by means of projection lines.

2. At points 3_1 and 4_1 , the visibility of the horizontal projection of the line of intersection changes. These points defined using the parallel m_1 .

3. Horizontal projections of intermediate points 5 ... 12 are determined using parallels m^2, m^3, m^4, m^5 .

4. Horizontal projections of defined points of the line are connected according to their visibility.

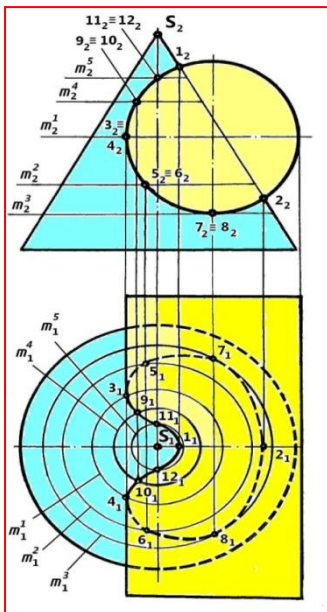


Рис. 8. 2. Побудова лінії перетину поверхні прямого кругового конуса з поверхнею прямого кругового циліндра

Fig. 8.2. The construction of a line of intersection of the surface of a right circular cone with the surface of a right circular cylinder.

<u>8.2. Побудова лінії перетину поверхонь при їх загальному положенні</u> Якщо в попередніх прикладах поверхня призми або циліндра займала загальне непроекціююче положення, то слід перетворити епюр так, щоб вона стала проекціюючою, наприклад, заміною площин проєкцій. Якщо ж жодна з поверхонь принципово не може бути проекціюючою слід застосовувати загальний спосіб знаходження лінії перетину за допомогою допоміжних січних площин або поверхонь, вже розглянутий при побудові лінії перетину двох площин загального положення. На рис. 8.3 зображено поверхні α і β, що перетинаються. Щоб побудувати лінію k їх перетину потрібно визначити точки, що належать водночас поверхням α і β, і з'єднати ці точки плавною лінією. Для знаходження довільної точки K, що належить лінії перетину, потрібно: 1) вести допоміжні площини або поверхні (на рисунку ведена допоміжна площина γ); 2) побудувати лінію перетину допоміжної площини або поверхні з кожною із заданих двох поверхонь ($a = \gamma \cap \alpha$, $b = \gamma \cap \beta$); 3) на перетині отриманих ліній знайти точку, що належить водночас двом поверхням ($K = a \cap b$, $K \in \alpha, \beta$).	<u>8.2.Construction of a line of intersection of surfaces at their general position</u> If in the preceding examples the surface of the prism or cylinder occupied a general non-projection position, then it is necessary to transform the epure so that it becomes projective, for example, by replacement of planes of projections. If none of the surfaces can fundamentally be projective, one should use the universal method of finding the line of intersection with the help of auxiliary planes or surfaces already considered when constructing a line of intersection of two planes of general position. In the fig. 8.3 is shown the surfaces of intersecting α and β. To construct a line k their intersection it is necessary to determine the points belonging simultaneously to the surfaces α and β, and to connect these points with a smooth line. To find an arbitrary point K, which belongs to the line of a intersection, you need: 1) to draw the auxiliary planes or surfaces (in the figure the auxiliary plane γ); 2) construct a line of intersection of the auxiliary plane or surface with each of the given two surfaces ($a = \gamma \cap \alpha$, $b = \gamma \cap \beta$); 3) at the intersection of the resulting lines, find the desired point belonging simultaneously to two surfaces ($K = a \cap b$, K is α, β).
--	--

При використанні цього універсального способу визначення лінії перетину важливим є питання про раціональний вибір допоміжної площини-посередника. Ці площини вибирають таким чином, щоб вони перетинали криву поверхню по лініям, що мають вигляд прямих та кіл, котрі легко визначити та зобразити на епюрі.

With the use of this universal method of determining the line of intersection, the question of rational choice of the mediating subsidiary plane is important. These planes are chosen in such a way that they cross the curved surface along lines that have straight lines and circles, which can be easily identified and depicted on the epure.

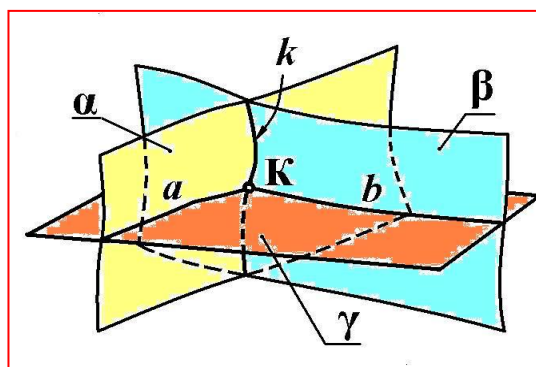


Рис. 8.3. Знаходження точки К, яка належить поверхням α і β , що перетинаються

Fig. 8.3. Finding a point K, which belongs to the intersecting surfaces α and β

На рис. 8.4 показано побудову лінії перетину поверхні прямого кругового конуса та сфери.

Жодна з поверхонь обох тіл, що перетинаються, не може займати проєкціююче положення відносно площин проєкцій, а це означає, що визначити хоча б одну з проєкцій лінії перетину без додаткових побудов неможливо. Тому для побудови точок, що належать лінії перетину, застосовують допоміжні

In the fig. 8.3 is shown the construction of a line of intersection of the surface of a right circular cone and sphere.

None of the surfaces of the intersecting two bodies can occupy a projection position relative to the projection planes. This means that it is impossible to define at least one of the projections of the intersection line without additional constructions. Therefore auxiliary planes are used to

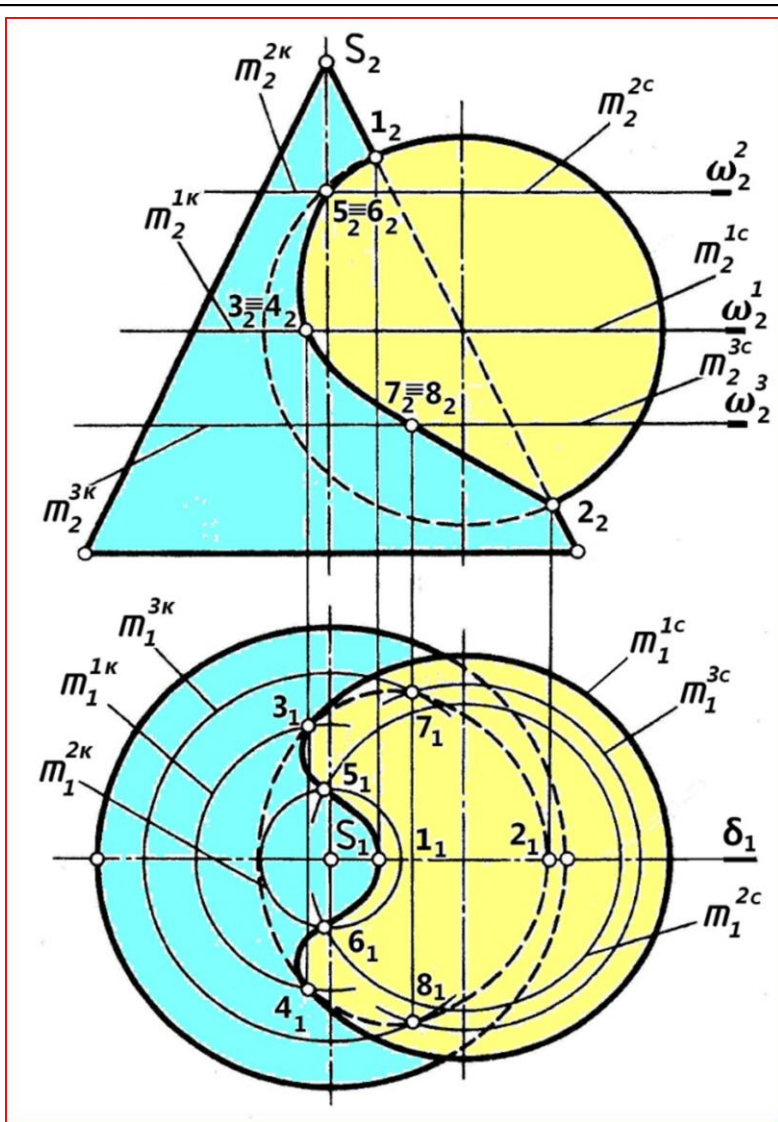


Рис. 8.4. Побудова лінії перетину поверхні прямого кругового конуса та сфери.

Fig. 8.4. The construction of a line of intersection of the surface of a right circular cone and sphere.

площини. Точки 1 і 2 побудовано за допомогою фронтальної площини δ, яка є площиною симетрії для поверхонь обох тіл. Площина δ перетинає поверхні по їх обрисах, що дозволяє визначити фронтальні проекції $1_2, 2_2$ цих точок, а потім і горизонтальні $1_1, 2_1$, які розміщені на δ_1. В точках 3 і 4 змінюється видимість горизонтальної проекції лінії перетину. Їх проекції визначено за допомогою горизонтальної площини ω^1. Площина ω^1 перетинає поверхню конуса по паралелі m^{1k}, а сферу – по паралелі m^{1c}. В точках перетину горизонтальних проекцій цих паралелей визначено горизонтальні проекції 3_1 і 4_1 цих точок. Їх фронтальні проекції 3_2 і 4_2 розміщені на сліді-проекції ω_2^1.	construct the points belonging to the intersection. Points 1 and 2 are constructed using the frontal plane δ, which is the symmetry plane for the surfaces of both bodies. The plane δ intersects the surface of their outlines, which allows you to determine the frontal projections $1_2, 2_2$ of these points, and then the horizontal projections $1_1, 2_1$, which are placed on δ_1. At points 3 and 4, the visibility of the horizontal projection of the line of intersection changes. Their projections are determined using the horizontal plane ω^1. The plane ω^1 intersects the surface of the cone in parallel m^{1k}, and the sphere intersects in parallel m^{1c}. The horizontal projections 3_1 and 4_1 of these points are determined at the points of intersection of the horizontal projections of these parallels. Their frontal projections 3_2 and 4_2 are located on the trace-projection ω_2^1.
---	---

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Ковальов Ю.М., Верещага В.М. Прикладна геометрія: нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка. Сучасні напрями : підручник. Київ : Дія, 2012. 472 с.
2. Михайленко В.Є., Євстіфєєв М.Ф., Ковальов С.М., Кашенко О.В. Нарисна геометрія : підручник. Київ : Вища шк., 2004. 303 с.
3. Хмеленко О.С. Нарисна геометрія : підручник. Київ : Кондор, 2008. 440 с.
4. Кириченко А.Ф. Теоретичні основи інженерної графіки: Підручник для вищих технічних навчальних закладів. Київ : ВД «Професіонал», 2004. 496 с.
5. Кривцов В.В., Дєєв С.С. Нарисна геометрія: навч. посіб. Київ : НМК ВО, 1992. 244 с.
7. Кривцов В.В. Нарисна геометрія : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2012. 240 с.
8. Науменко Ю.В., Кривцов В.В. Нарисна геометрія : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2012. 213 с.
9. Кривцов В.В., Дєєв С.С. Нарисна геометрія: контрольні запитання та відповіді : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2010. 162 с.
10. Кривцов В.В., Науменко Ю.В. Теоретичні основи розв'язування задач з нарисної геометрії : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2013. 267 с.
11. Кривцов В.В., Козяр М.М., Полінчук А.Е. Розв'язування задач підвищеної складності з нарисної геометрії : навч. посіб. Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. 224 с.
12. Кривцов В.В., Козяр М.М. Нарисна геометрія (базовий курс) : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2019. 234 с.

List of used and recommended literature

1. Kovalev Yu.M., Vereshchaga V.M. Applied geometry: descriptive geometry, engineering and computer graphics. Contemporary trends: textbook. Kyiv: Action, 2012. 472 c.
2. Mikhailenko V.E, Evstifeev M.F, Kovalev S.M, Kashchenko O.V. Descriptive geometry: textbook. Kyiv: Higher School, 2004. 303 pp.
3. Khmelenko O.S. Descriptive geometry: textbook. Kyiv: Condor, 2008. 440 p.
4. Kirichenko A.F. Theoretical Foundations of Engineering Graphics: Textbook for Higher Technical Education Institutions. Kyiv: VD "Professional", 2004. 496 p.
5. Krivtsov V.V., Deev S.S. Descriptive geometry: tutorial. Kyiv: NMK VO, 1992. 244 p.
7. Krivtsov V.V. Descriptive geometry: tutorial. Rivne: NUVGP, 2012. 240 p.
8. Naumenko Yu.V., Krivtsov V.V. Descriptive geometry: tutorial. Rivne: NUVGP, 2012. 213 p.
9. Krivtsov V.V., Deev S.S. Descriptive geometry: control questions and answers: tutorial. Rivne: NUVGP, 2010. 162 p.
10. Krivtsov V.V, Naumenko Yu.V. Theoretical foundations for solving tasks from descriptive geometry: tutorial. Rivne: NUVGP, 2013. 267 pp.
11. Krivtsov V.V, Kozyar M.M, Polynchuk A.E. Solving problems of increased complexity from the descriptive geometry: tutorial. Kherson: OLDI-PLUS, 2017. 224 p.
12. Krivtsov V.V, Kozyar M.M. Descriptive geometry (basic course): tutorial. Rivne: NUVGP, 2019. 234 p.

"Handbook (Lectures Notes) in English from the educational discipline«Descriptive geometry» for receivers of higher education of the first (Bachelor) level": *Навчальний посібник*/ І.Н.Бурчак, М.М.Козяр, В.В.Кривцов – Луцьк: РВВ Луцького НТУ, 2020. – 160 с.

Комп'ютерний набір: І.Н.Бурчак М.М.Козяр, В.В.Кривцов

Підп. до друку «01» липня 2020 р.
Формат 60х84/16. Папір офс. Гарнітура Таймс.
Ум. друк. арк. 10,0. Обл.-вид. арк. 9,5.
Тираж 100 прим.

Інформаційно-видавничий відділ
Луцького національного технічного університету
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – ІВВ Луцького НТУ