

Луцький національний технічний університет

На правах рукопису

ЛАВРЕНЧУК Світлана Василівна

УДК 539.3

**РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ШТАМПІВ, ОТВОРІВ ТА ТРИЩИН
У КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИНЧАТИХ ЕЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦІЙ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Науковий керівник:

доктор технічних наук, професор

Максимович Олеся Володимирівна

Луцьк – 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ.....	5
ВСТУП	7
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ	14
1.1. Огляд літературних джерел та вибір напрямів дослідження	14
1.2. Закон Гука для анізотропного тіла.....	20
1.2.1. Пружні сталі для композитних матеріалів	21
1.2.2. Близький до ізотропного матеріал.....	22
1.2.3. Пружні характеристики в повернутій системі координат	23
1.3. Основні рівняння плоскої задачі теорії пружності	24
1.3.1. Узагальнений плоский напружений стан	24
1.3.2. Плоска деформація.....	25
1.3.3. Комплексні потенціали Лехніцького	26
1.4. Загальні співвідношення для пружних анізотропних пластинок	28
РОЗДІЛ 2. РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ОТВОРІВ, ТРІЩИН, ШТАМПІВ У ОРТОТРОПНИХ ПІВПЛОЩИНАХ	30
2.1. Контактна задача для суцільної ортотропної півплощини.....	30
2.1.1. Плоский штамп.....	32
2.1.2. Параболічний штамп.....	33
2.2. Модифіковані інтегральні рівняння для анізотропних пластинок із отворами.....	34
2.2.1. Постановка задачі.....	34
2.2.2. Основні співвідношення.....	35
2.2.3. Інтегральні зображення розв'язку задачі для нескінченної області	36
2.2.4. Модифіковані інтегральні рівняння	37
2.2.5. Властивості потенціалів Лехніцького	38
2.2.6. Числовий алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь.....	38
2.3. Побудова розв'язків типу Гріна	40
2.3.1. Дислокаційний розв'язок для півплощини з ненавантаженою межею .	40
2.3.2. Дислокаційний розв'язок для півплощини, що знаходиться під дією плоского штампа	41

2.4. Розрахунок напружень у півплощині з отворами під час дії плоского штампа	43
2.5. Напруження в півплощині з отворами за дії параболічного штампа	48
2.5.1. Постановка задачі та приклади реалізації методики її вирішення.....	48
2.5.2. Перевірка достовірності запропонованої методики	55
2.6. Напруження біля тріщин у анізотропній півплощині за дії плоского штампа	58
2.6.1. Постановка задачі.....	58
2.6.2. Інтегральні рівняння задачі відносно стрибків переміщень.....	59
2.6.3. Модифіковане інтегральне зображення.....	60
2.6.4. Результати розрахунків.....	61
2.7. Напруження у півплощині біля параболічного штампа та тріщин	69
2.8. Напруження біля висвердлених отворів у околі вершин тріщин	75
2.8.1. Постановка задачі.....	76
2.8.2. Результати розрахунків.....	76
2.9. Розрахунок на контактну міцність композитних елементів конструкцій ..	77
2.9.1. Розрахунок на міцність області біля отворів.....	77
2.9.2. Розрахунок на контактну міцність	85
2.10. Висновки до другого розділу.....	86
РОЗДІЛ 3. НАПРУЖЕННЯ БІЛЯ ОТВОРІВ, ТРІЩИН ТА ШТАМПІВ У КОМ-	
ПОЗИТНІЙ ПІВПЛОЩИНІ ЗА ВРАХУВАННЯ ТЕРТЯ	88
3.1. Контактна задача для анізотропної суцільної півплощини за врахування тертя	88
3.2. Дислокаційний розв'язок для анізотропної півплощини, що знаходиться під дією плоского штампа за врахування тертя.....	96
3.3. Розрахунок напружень у півплощині з отворами під час дії плоского штампа за врахування тертя	99
3.4. Напруження в анізотропній півплощині з отворами за дії параболічного штампа та врахування тертя	104
3.4.1. Постановка задачі та приклади реалізації методики її вирішення	104
3.4.2. Перевірка достовірності підходу	107
3.5. Напруження біля крайових тріщин у анізотропній півплощині за дії плоского штампа та врахування тертя.....	110

3.5.1. Постановка задачі.....	110
3.5.2. Гладкі штампи	111
3.5.3. Урахування тертя під штампом	112
3.5.4. Нахилені вісі ортотропії	113
3.5.5. Вплив довжин тріщин	115
3.6. Наближений підхід до визначення напружень біля штамів і тріщин у анізотропній півплощині за врахування тертя.....	117
3.6.1. Постановка задачі.....	118
3.6.2. Результати розрахунків.....	119
3.7. Розрахунок на міцність областей біля отворів та штамів за врахування тертя	122
3.7.1. Розрахунок на міцність області біля отворів.....	122
3.7.2. Розрахунок на контактну міцність	125
3.8. Висновки до третього розділу	128
РОЗДІЛ 4. КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ З УСКЛАДНЕНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ.....	130
4.1. Контактна взаємодія жорсткого штампа складної форми та нескінченної ортотропної пластинки з еліптичним отвором	130
4.1.2. Умови контакту	132
4.1.3. Побудова інтегральних рівнянь	133
4.1.4. Контактні напруження під штампом, форма якого співпадає з формою отвору	134
4.1.5. Контактні напруження під шорстким штампом складної форми.....	139
4.2. Контактна взаємодія пружної півплощини та жорсткого штампа з виїмками	141
4.2.1. Постановка задачі.....	141
4.2.3. Опис форми основи штампа з виїмками та закругленнями на краях ..	142
4.2.4. Аналіз контактних характеристик	143
4.3. Контактна задача для пружного композиту і жорсткого кругового циліндра з урахуванням тертя.....	149
4.4. Висновки до четвертого розділу.	151
ВИСНОВКИ.....	152
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	155

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

Oxy – декартова система координат;

$z = x + iy$ – комплексна координата;

$s_{1,2}$ – корені характеристичного рівняння;

$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ – криві, на яких розміщені тріщини;

$L_1, L_2, \dots$ – межі отворів;

G_{xy} – модуль зсуву;

E_y – модуль пружності в напрямку осі Oy ;

E_x – модуль пружності в напрямку осі Ox ;

D – область, яку займає пластинка;

X_T, Y_T – проекції вектора зусиль, прикладених до берегів тріщини, які приймаються однаковими на її протилежних берегах;

(X_L, Y_L) – проекції вектора зусиль, прикладених до межі пластинки;

a_{ij} – пружні сталі матеріалу;

P – сила, яка прикладена до штампа; P_x, P_y – проекції даного вектора сили;

χ – стала, введена Мусхелішвілі;

F_I, F_{II} – відносні коефіцієнти інтенсивності напружень;

K_I, K_{II} – коефіцієнти інтенсивності напружень;

ν_{xy}, ν_{yx} – коефіцієнти Пуассона;

z_1, z_2 – комплексні координати в допоміжних областях D_1, D_2 ;

Φ, Ψ – потенціали Лехніцького;

g'_1, g'_2 – похідні від стрибків переміщень за дуговою координатою;

u, v – проекції вектора переміщень;

$\Phi_{1,2}^D, \Psi_{1,2}^D$ – розв'язки типу Гріна;

g_1, g_2 – стрибки переміщень берегів тріщин;

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – напруження;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – деформації;

k – коефіцієнт тертя під штампом;

ЕФ 32-301, ЕТФ, CF1, CF2 – склопластики;

ЗДР – звичайне диференціальне рівняння;

ЗКП – задача квадратичного програмування;

КЗ – контактна задача;

КН – контактні напруження;

КІН – коефіцієнти інтенсивності напружень;

МГІР – метод граничних інтегральних рівнянь;

МСЕ – метод скінченних елементів;

НДС – напружено-деформований стан;

ПД – плоска деформація;

ПНС – плоский напружений стан.

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасні композитні матеріали мають високі механічні й міцнісні характеристики, стійкі до агресивних середовищ. Тому вони широко застосовуються як елементи конструкцій та деталі машин у різних галузях промисловості (в автомобілебудуванні, літакобудуванні, суднобудуванні, хімічній промисловості). Композитні деталі машин та елементи конструкцій часто перебувають в умовах контактної взаємодії. Ці елементи конструкцій можуть містити отвори чи тріщиноподібні дефекти. Для розрахунків на міцність таких композитів необхідно дослідити їх напружений стан за врахування дефектів та умов навантаження.

Задача визначення напружень біля отворів та тріщин у конструкціях за дії штампів належить до типу змішаних. У загальному випадку необхідно одночасно знаходити наперед невідомі ділянки контакту під штампом та на берегах розміщених біля нього тріщин. Тому розглядувана задача в літературі залишається недостатньо вивченою не тільки для композитів, а й для ізотропних матеріалів.

Контактні задачі для ізотропних та анізотропних тіл без дефектів добре вивчені в літературі. Значний вклад у розвиток таких задач внесли Л.О. Галін, Д.В. Гриліцький, В.С. Гудрамович, В.І. Моссаковський, М.І. Мусхелішвілі, І.Я. Штаєрман, K.L. Johnson та ін.

Контактні задачі для ізотропної півплощини з отворами розглядались у роботах С.О. Калоєрова, С.А. Vrebbia. Під час розв'язування контактних задач для тіл із тріщинами часто дію штампа враховують шляхом задання контактного тиску за розподілом Герца. У працях В.В. Панасюка, О.П. Дацишин та їх співавторів на базі такого підходу та методу сингулярних інтегральних рівнянь виконано дослідження процесу підростання тріщин біля штампів. В уточненій постановці контактна задача для плоского гладкого штампа, що втискається в ізотропну півплощину, за врахування контакту берегів тріщин, розглянута в роботах О.П. Дацишин. Дію параболічного штампа на півплощину з крайовою тріщиною (береги якої не контактують), за врахування тертя в області контакту, розглянуто М.П. Савруком.

Для визначення напружень в анізотропних тілах з отворами й тріщинами, як правило, використовують числові методи. Значний вклад у розвиток таких методів внесли О.Е. Андрейків, Л.Т. Бережницький, О.М. Гузь, С.О. Калоєров, О.С. Космодаміанський, М.М. Кундрат, С.Г. Лехніцький, В.В. Лобода, А.І. Лур'є, В.Н. Максименко, Т.Л. Мартинович, Г.Т. Сулим, А.О. Сяський, А.Ф. Улітко, Л.А. Фільштинський, В.І. Шваб'юк, С. Atkinson, F. Erdogan, G.R. Irwin, G.C. Sih, R.M. Jones та інші.

Для тріщин, які перебувають в областях дії напружень стиску, необхідно враховувати контакт їх берегів. Методи розв'язування таких задач для ізотопних матеріалів побудовано у роботах О.М. Гузя, Р.М. Мартиняка, Г.С. Кіта, В.В. Панасюка, О.П. Дацишин, Г.П. Саврука, та для анізотропних матеріалів у роботах Л.А. Фільштинського, О.В. Максимович, Е.А. Стрельнікової.

Тому актуальним є завдання розробки методик визначення напружень в анізотропних елементах конструкцій, що містять дефекти і взаємодіють зі штампами та використання їх у розрахунках на контактну міцність композитів.

Мета роботи – розробка підходу до розрахунку концентрації напружень біля штампів, отворів та тріщин в анізотропній півплощині за врахування тертя, контакту берегів тріщин та створення на цій основі методик розрахунку граничних навантажень для композитних елементів конструкцій за їх взаємодії із штампами.

Досягнення мети передбачає розв'язання таких задач:

- розробити числовий підхід до дослідження контактних задач для анізотропної півплощини з отворами й тріщинами за врахування тертя під штампом та взаємодії берегів тріщин, який базується на методі інтегральних рівнянь;
- побудувати алгоритм розв'язування отриманих інтегральних рівнянь на основі методу механічних квадратур із додатковим застосуванням методів оптимізації для знаходження невідомих областей контакту;
- запропонувати й обґрунтувати інженерні підходи до дослідження концентрації напружень біля отворів і тріщин у композитній півплощині, що взаємодіє зі штампом;

- розробити методики розрахунку на міцність композитних пластинчатих елементів конструкцій з отворами й тріщинами при їх взаємодії зі штампами;
- виконати дослідження впливу умов навантаження, механічних характеристик, тертя, взаємодії берегів тріщин на концентрацію напружень біля штампів, отворів і тріщин та застосувати їх до задач, які виникають в інженерній практиці.

Об’єкт дослідження – композитні елементи конструкцій з отворами й тріщинами, які взаємодіють із штампами.

Предметом дослідження є методи оцінки міцності композитних пластинчатих елементів конструкцій з отворами й тріщинами, які взаємодіють зі штампами.

Методи дослідження. Теоретичні дослідження проводились на основі сучасних методів механіки деформівного твердого анізотропного тіла; методу граничних інтегральних рівнянь та числових методів їх розв’язування; апробованих в літературі критеріїв міцності для композитних матеріалів; з використанням сучасного програмного забезпечення та комп’ютерної техніки, що забезпечило високу точність і достовірність результатів досліджень.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася у рамках науково-дослідних робіт Луцького НТУ: “Розробка критеріїв руйнування та методик розрахунків на міцність і довговічність композитних елементів конструкцій із тріщинами” № д/р 0113U000334 (2013–2015 рр), “Дослідження напружено-деформованого стану сталевібробетонних конструкцій, удосконалення методики оцінки надійності та технології їх виготовлення” № д/р 0115U002205 (2015–2016 рр), де автор був виконавцем.

Наукова новизна роботи полягає в тому, що:

- побудовано модифіковані інтегральні рівняння контактної задачі для багатозв’язної анізотропної півплощини з тріщинами, в яких задані умови на межі півплощини, у тому числі під штампом, задовольняються тотожно;
- розроблено числовий підхід до розв’язування отриманих інтегральних рівнянь на основі методу механічних квадратур, у якому враховано контакт берегів тріщин;

- побудовано методику розрахунку напружень під штампом, біля отворів та тріщин за врахування тертя, взаємодії берегів тріщин, на основі якої виконано дослідження впливу анізотропії на напружений стан композитів;

- обґрунтовано інженерний підхід до дослідження концентрації напружень біля отворів і тріщин у композитній півплощині, що взаємодіє зі штампом;

- розроблено методику розрахунку на міцність композитних пластинчатих елементів конструкцій з отворами, які взаємодіють зі штампами різної форми.

Достовірність отриманих результатів забезпечується строгістю та коректністю математичних постановок задач із використанням основних положень механіки деформівного твердого тіла; коректним застосуванням апробованого в літературі квадратурного методу для розв’язування інтегральних рівнянь; узгодженням одержаних результатів для часткових випадків із відомими у науковій літературі даними; порівнянням результатів розв’язування низки тестових задач паралельно різними методами.

Теоретичне значення роботи полягає у: створенні методик розрахунку напруженого стану композитних елементів конструкцій з отворами й тріщинами при їх контакті зі штампами за врахування тертя та контакту берегів тріщин; розробці методик розрахунку на контактну міцність композитів із дефектами.

Практичне значення одержаних результатів. Запропонована методика може бути використана в розрахунках на контактну міцність композитних елементів конструкцій і деталей машин за врахування тертя та отворів; у розрахунках граничної рівноваги композитних матеріалів із тріщинами під час їх навантаження штампами.

Отримані результати досліджень впроваджено на ПрАТ “Львівський локомотиворемонтний завод” (м. Львів), де застосовуються для оцінки міцності буксового вузла, на АТ “АК “Богдан моторс” (м. Луцьк) для дослідження контактних напружень, що виникають у вузлах взаємодії механізму навіски дверей та на ПАТ “Електротермометрія” (м. Луцьк) для визначення розподілів контактних напружень на поверхні отвору деталі “кришка верхня ПБВИ 725.123.002-02”. Матеріали дисертаційної роботи також використовуються в навчальному

процесі Луцького національного технічного університету (кафедра комп'ютерної інженерії, кафедра технічної механіки).

Апробація результатів дисертації. Окремі матеріали дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на наукових конференціях професорсько-викладацького складу Луцького НТУ (2008–2016 р.р.); II Міжнародній науково-практичній конференції “Теоретичні і експериментальні дослідження в технологіях сучасного матеріалознавства та машинобудування” (2009 р.); Міжнародній науково-практичній конференції “Комп'ютерно-інтегровані технології у виробництві та освіті” (2010 р.); II Міжнародному симпозиумі “Сучасні проблеми інженерної механіки” (2011 р.); II Міжнародній науково-практичній виставці-конференції молодих учених та студентів “Інновації у будівництві” (2016 р.).

У повному обсязі результати дисертаційного дослідження доповідалися на об'єднаному науковому семінарі кафедр технічної механіки, вищої математики та комп'ютерної інженерії Луцького національного технічного університету МОН України (керівник – д.т.н., проф. Шваб'юк В.І.); міжвузівському науковому семінарі кафедри обчислювальної механіки і міцності конструкцій “Актуальні проблеми механіки деформівних тіл і конструкцій” при Придніпровському науковому центрі та науковій раді з механіки деформівного твердого тіла НАН України (керівники – чл.-кор. НАН України, д.т.н., проф. Гудрамович В.С.; д.т.н., проф. Дзюба А.П.); науковому семінарі відділу математичних проблем контактної механіки Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (керівник – д.ф.-м.н., проф. Мартиняк Р.М.).

Публікації та особистий внесок здобувача. За темою дисертаційної роботи опубліковано 8 наукових праць, у тому числі 6 статей у наукових фахових виданнях України з технічних наук [61, 66, 75–77, 79], з яких праця [79] індексується в міжнародних наукометричних базах даних (Universal Impact Factor, Open Academic Journals Index, Index Copernicus). Крім цього дисертантом опубліковано статтю [65] за кордоном (м. Люблін, Польща) та монографію [74].

Основна частина ідей, теоретичних та практичних розробок дисертаційної роботи належить здобувачу особисто. Праці [65, 66] виконані автором одноосібно.

но. У роботах, опублікованих у співавторстві, науковому керівнику [75–77, 79] належить постановка задач, алгоритм розв’язування інтегральних рівнянь, участь в обговоренні числових результатів. Іншим співавторам належить: О.В. Іллюшину [77] та Т.Я. Солар [76] участь у розробці числового алгоритму розв’язування інтегральних рівнянь; А.Ю. Коцюбі [61, 74] та В.М. Максимовичу [74] належить числово-аналітична методика розв’язування контактних задач для ізотропної півплощини зі штампами складної форми. Авторів у праці [74] належить участь у побудові умов контакту, програмуванні алгоритмів розв’язування задач квадратичного програмування та в обговоренні одержаних числових результатів.

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків; містить 18 таблиць та 108 рисунків. Загальний обсяг роботи становить 178 сторінок машинописного тексту. Бібліографія нараховує 195 найменувань.

Перелік умовних позначень і скорочень містить специфічну термінологію і позначення, які використовуються в дисертаційній роботі.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету та завдання досліджень, охарактеризовано новизну, теоретичне та практичне значення отриманих результатів, наведено дані про публікації за темою дисертації, описано структуру роботи.

У **першому розділі** наведено огляд наукових праць, близьких за напрямком до теми дисертації, та стислий аналіз сучасного стану проблеми. Висвітлено малодосліджені в літературі для анізотропних пластинок задачі та на основі цього обґрунтована актуальність проведення досліджень у вибраному напрямку. Наведено також основні рівняння плоскої задачі теорії пружності для анізотропного тіла.

У **другому розділі** розроблено підхід до дослідження контактних задач для ортотропної півплощини з отворами й тріщинами за врахування взаємодії берегів тріщин. Визначення напружено-деформованого стану проведено на основі модифікованих інтегральних рівнянь, за яких умови на межі півплощини, у тому числі й під штампом (гладким), задовольняються тотожно. Досліджено

контактні напруження та КІН за дії плоского та параболічного штампів. Запропоновано також методику розрахунку на міцність композитних пластинчатих елементів конструкцій.

У **третьому розділі** розроблено підхід до дослідження контактних задач для півплощини із загальною анізотропією, послабленої отворами й тріщинами за врахування взаємодії берегів тріщин та тертя під штампом. Виконано дослідження концентрації напружень біля отворів різної форми за дії плоского та параболічного штампів залежно від механічних характеристик композитів, розміщення отворів відносно штампів, коефіцієнтів тертя тощо. Виконано розрахунок на міцність областей біля отворів та штампів за врахування тертя. Визначено граничні сили, які можуть бути прикладені до штампа.

У **четвертому розділі** розглянуто контактні задачі з ускладненими граничними умовами. Досліджено випадок взаємодії ортотропної нескінченної пластинки, послабленої отвором, у межу якого втискається штамп, що має форму, близьку до форми отвору. Розглянуто контактну задачу про взаємодію однорідної та кусково-однорідної півплощин із жорстким штампом складної форми за врахування тертя. Проведено дослідження контактного тиску під штампами різної форми залежно від коефіцієнта тертя. Детально розглянуто випадок штампа з системою виїмок. Досліджено тиск на ділянках контакту залежно від кількості виїмок, їх форми та прикладеного навантаження.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

У розділі подано огляд праць за темою дисертації та наведено стислий аналіз сучасного стану проблеми. Висвітлено малодосліджені в літературі для анізотропних пластинок задачі та на основі цього обґрунтована актуальність проведення досліджень у вибраному напрямку. Наведено також основні рівняння плоскої теорії пружності та співвідношення механіки руйнування, які будуть використовуватись під час виконання роботи.

1.1. Огляд літературних джерел та вибір напрямів дослідження

Проблеми контактної взаємодії анізотропних матеріалів мають важливе значення, адже композити широко застосовуються у будівництві, в ракетній, ядерній техніці, при створенні різного роду транспортних засобів тощо. Дослідження композитних матеріалів потребує високовартісних експериментів. У зв'язку з цим виникає необхідність побудови теоретичних методів досліджень на міцність і довговічність елементів конструкцій, що виготовлені з таких матеріалів. Оцінка міцності конструкцій ґрунтується на детальному вивченні їх напружено-деформованого стану (НДС) з врахуванням форми, механічних властивостей, прикладеного навантаження. Під час створення різних конструкцій часто доводиться за технологічною необхідністю робити в них отвори. Крім того, в процесі експлуатації в деталях виникають тріщини, які (як і отвори) стають концентраторами напружень. Концентрації напружень є одним з основних факторів, що визначають міцність конструкції, і тому дослідження впливу концентрацій напружень, що виникають поблизу тріщин та отворів на поведінку композитних елементів конструкцій при контактній взаємодії є одним з найактуальніших завдань сучасної механіки. Як було вже сказано, такі задачі належать до класу змішаних і є достатньо складними у математичному відношенні.

Контактні задачі для ізотропних та анізотропних тіл без дефектів добре вивчені в літературі. Як правило, під час постановки контактних задач при-

пускається, що область контакту є малою порівняно з іншими розмірами тіл, а тому ці тіла розглядають як півпростір або півплощину, не враховуючи властивості поверхневих шарів.

Контактні задачі почали розглядати на початку минулого століття в працях J. Boussinesq, Н. Hertz, О.М. Динника, С.А. Чаплигіна та ін. Вони належать до класу змішаних, які є достатньо складними в математичному відношенні. Для розв'язування таких задач широко використовуються аналітичні методи. Дещо простішими є задачі при наперед заданих областях контакту. До таких задач відносяться випадки, коли основа штампа є плоскою. Контактна задача про втискання кругового штампа в пружний півпростір розглянута О.М. Динником. Для осесиметричної задачі Л.О. Галін [22] отримав аналітичні формули для контактного тиску під штампом та розв'язок для задачі визначення тиску під основою плоского штампа, на який діє центральна сила, коли поза штампом півпростір навантажений зосередженою нормальною силою. Значний вклад у розвиток методів розв'язання контактних задач внесли роботи Д.В. Гриліцького [29, 30], В.С. Губенко, В.І. Довноровича, Я.М. Кизими, Р.М. Мартиняка [24, 53, 54, 107, 123, 132, 133, 145, 168–170, 174, 175], В.І. Моссаковського, Г.С. Кіта [52, 166], Г.Я. Попова, Я.С. Уфлянда [115, 116], І.Я. Штаєрмана [127]. Просторові контактні задачі про втискання штампів складної форми та систем штампів розглядались у [1–3, 6, 16, 21, 25, 26, 83, 104, 127, 188].

Дещо ускладнюються контактні задачі при врахуванні границь тіла або за дії системи штампів [43, 129, 131]. Серед таких задач найбільш вивчені задачі для шару чи смуги [3, 114, 128]. Для обмежених тіл широко використовуються числові та аналітичні методи. Асимптотичні методи використовувались для дослідження контактних задач для шару, смуги за дії системи штампів у роботах В.М. Александрова і його учнів [1, 3].

Огляд робіт, присвячених вивченню плоских задач теорії пружності наведено в працях [16, 24, 38, 83].

Контактні задачі для анізотропних тіл розглядались у роботах [8, 13, 29, 30, 55, 61, 71, 109, 112, 117, 118, 124–126, 137, 164, 167].

Значно складнішими виявились задачі для випадків, коли область контакту є наперед невідомою. Для штампів простої форми достатньо ефективними є аналітичні методи визначення областей контакту.

Під час розгляду штампів складної форми виявився ефективним підхід А. Сіньоріні, в якому контактні задачі з невідомою областю контакту зведені до альтернативних інтегральних рівнянь-нерівностей. За допомогою цього підходу Б.А. Галанов [18, 19] розробив числовий метод і звів задачу до граничних рівнянь типу Гаммерштейна.

Для такого класу також широко використовуються варіаційні методи. У разі варіаційної постановки задаються додаткові обмеження на шукані функції. Доведено єдиність та існування розв'язків, які забезпечуються умовою додатності потенціальної енергії тіла. На межі тіл вводять зв'язки, які передають тільки односторонні стискувальні зусилля в напрямку загальної нормалі до контактуючих поверхонь, записуються умови непроникнення тіл одне в одне.

В останні роки розвиваються методи дослідження неklasичних контактних задач. До них відносять задачі з областями контакту, які є порівняно великими з розміром контактуючих тіл, із урахуванням неоднорідної анізотропії середовища, мікроструктури контактуючих поверхонь чи фрикційної взаємодії. Значний внесок у розвиток таких класів задач внесли роботи В.М. Александрова [1, 2], Л.О. Галіна [20], І.Г. Горячової [24–26, 145], Н.Б. Демкина [41], В.В. Дроб'язка [43], Т.С. Кагадий [47], М.М. Кундрата, О.В. Максимука [80], Р.М. Мартиняка [24, 53, 54, 107], В.В. Панасюка [94], А.К. Приварникова [15, 98], А.С. Рабиновича [99], П.П. Усова [114], Я.С. Уфлянда [115, 116], М. Ciavarella [134–136], К.Л. Johnson [42, 162], V.J. Pauk [183, 184] та ін.

Задачі про взаємодію штампа з межею отвору часто виникають на практиці, які є досить складними в математичному відношенні, оскільки умови контакту для них громіздкі. Контактні задачі для штампів, що взаємодіють з межею кругового отвору, розглядалися в роботах Л.О. Галіна [21], Д.В. Грілицького [29, 30], В.В. Панасюка [92], В.Г. Савіна [100], О.В. Максимович [13], А.О. Сяського [111, 112], Е.-М. Сгасіун [139, 138] та ін. У таких задачах у літературі

найбільш вивчені випадки, коли штамп має форму, яка збігається або близька до форми отвору. Отвори складніших форм залишаються маловивченими, особливо під час взаємодії зі штампами складної форми. Найменш вивченими залишились задачі, коли форма штампів істотно відрізняється від форми отвору (зокрема важливі для практики випадки, коли штампи мають виїмки).

Задачі визначення напружень в анізотропних пластинках з отворами й тріщинами є значно складнішими, ніж для випадку ізотропних матеріалів. Тому аналітичні розв'язки побудовані тільки для окремих класів таких задач. Аналітичний розв'язок для пластинки із еліптичним отвором побудували С.Г. Лехніцький та Г.М. Савін. Вони отримали загальні розв'язки рівнянь плоскої задачі теорії пружності анізотропного середовища і згину тонких анізотропних пластин шляхом представлення їх через комплексні потенціали в узагальнених комплексних змінних [67–69]. Визначення напруженого стану в анізотропній пластині біля отвору, відмінного від кругового або еліптичного, дещо складніше. Для таких задач С.Г. Лехніцький [68] розробив метод малого параметра.

Значний вклад у розвиток методів визначення НДС анізотропних тонкостінних елементів конструкцій складної форми внесли А.Я. Александров, С.О. Амбарцумян, Л.Т. Бережницький, Д.В. Гриліцький, Я.М. Григоренко, В.Т. Грінченко, В.С. Гудрамович, С.О. Калоєров, Т.Л. Мартинович, І.О. Прусов, В.В. Лобода, В.В. Панасюк, Г.Я. Попов, А.О. Сяський, А.Ф. Улітко, В.І. Шваб'юк, С. Atkinson, F. Erdogan, G.R. Irwin, G.C. Sih, R.M. Jones та ін. [23, 27, 31, 32, 44, 48, 71, 72, 81, 91, 97, 106, 113, 124, 130, 144, 163, 190].

Загальний метод дослідження пружної рівноваги анізотропних та ізотропних пластинок з отворами розробили О.С. Космодаміанський [57, 60] та С.О. Калоєров [49, 50, 57] з використанням комплексних потенціалів Лехніцького. Потенціали зображено у вигляді рядів з невідомими коефіцієнтами, які визначаються в загальному випадку з нескінченних систем алгебраїчних рівнянь. З використанням цього методу проведено дослідження напружень в пластинках, послаблених одним чи системою отворів різної форми, в тому числі обмежених, півбезмежних пластинок з отворами та ін. При розгляді криволінійних отворів використовується додатково конформне відображення круга на область, яка

лежить ззовні кожного із граничних контурів. Тому розклади комплексних потенціалів в ряди в таких випадках мають достатньо складний вигляд.

Для розв'язування плоских задач теорії пружності для анізотропних тіл із отворами й тріщинами складної форми використовують числові методи. Сербські дослідники V. Nikolić-Stanojević, Ї. Dolićanin, M. Radojković [178] для вивчення напруженого стану анізотропних елементів конструкцій з еліптичними отворами використали метод скінченних елементів. V. Nikolić-Stanojević разом з K. Maksimović та S. Maksimović використали цей метод для знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень [171].

В останні роки широкого застосування набув метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР). Для анізотропних пластинок МГІР розвинений значно менше, ніж для ізотропних. Загальний підхід до знаходження напруженого стану анізотропних багатозв'язних пластинок запропоновано в роботах Д.І. Шермана [125, 126] і Л.А. Фільштинського [117, 119]. Д.І. Шерман звів плоску задачу теорії пружності анізотропного тіла до системи інтегральних рівнянь Фредгольма. Значний вклад у розвиток цього методу внесли В.В. Божидарнік [11, 12], Л.О. Галін, О.В. Максимович, Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим [110]. В.М. Максименко побудував загальну систему сингулярних інтегральних рівнянь для пружної анізотропної пластини, послабленої кінцевим числом криволінійних розрізів, береги яких навантажені зовнішніми зусиллями, і підкріпленої кінцевим числом ребер [73]. Методи розв'язування інтегральних рівнянь, які виникають в плоских задачах теорії пружності розроблено в працях [9, 17, 58, 70, 88, 89, 116, 140, 185].

Під час експлуатації тонкостінних елементів конструкції особливо небезпечними є тріщиноподібні дефекти. Тому вивченню напружень біля тріщин у твердих тілах присвячена значна кількість робіт: О.Є. Андрейківа [4], Л.Т. Бережницького [10], О.М. Гузя [33, 152, 153], О.П. Дацишин [34–40, 141, 142], А.А. Камінського [51, 84], М.М. Кундрата [64], Р.М. Кушніра [166], В.Н. Максименка [46, 73], Р.М. Мартиняка [45], Ю. Муракамі [108], М.М. Николишина [90, 166], В.А. Осадчука, В.В. Панасюка [94–96], М.П. Саврука [101–105], Г.П. Черпанова [120–122], М.Н. Aliabadi [143, 155], С. Atkinson [130], Т. Goshima

[146–150], N. Hasebe [155–158], D.P. Rooke і D.J. Cartwright [187], G.C. Sih [176, 189, 190], T. Sadowski [191], H. Tada, P.C. Paris і G.R. Irvin [192] та ін.

Як правило, вважають, що береги тріщин не контактують між собою під час деформації. Для тріщин, які перебувають у областях, де діють стискувальні напруження, необхідно додатково розглядати контакт їх берегів. Методи дослідження таких задач для ізотропних матеріалів розглядались у роботах Д.В. Гриліцького, О.М. Гузя, О.П. Дацишин, Г.С. Кіта, Р.М. Мартиняка, С.І. Моссаковського, В.В. Панасюка, Г.П. Саврука [28, 33, 52, 82, 93]. Для анізотропних матеріалів такі задачі вивчені в значно меншій мірі. У цьому напрямку вкажемо на роботи В.В. Божидарніка, П.А. Загубіженко, Л.А. Фільштинського, О.В. Максимович [77–79, 172, 173], Е.А. Стрельнікової [109].

Під час розгляду півплощини з тріщинами в зв'язку із значними математичними труднощами, у літературі для спрощення, часто дію штампа враховують шляхом задання розподілу контактного тиску, який виникає в суцільній півплощині (розподіл Герца) [36, 38, 39]. Зокрема, такий шлях використали N. Hasebe і співавтори [155–158], в яких застосовано метод конформних відображень [1, 67–69, 87]. Досліджено вплив відстані крайової тріщини до штампа на напруження біля тріщини. Підхід, у якому контактний тиск задавався згідно розподілу Герца, широко застосовується у працях В.В. Панасюка, О.П. Дацишин, у яких для визначення напружень використано метод сингулярних інтегральних рівнянь. Для розміщених в області стискувальних напружень тріщин враховано контакт їх берегів [38, 39]. У працях В.В. Панасюка, О.П. Дацишин та їх співавторів [37, 40, 181, 182] розроблений на базі методу сингулярних інтегральних рівнянь підхід застосовано для дослідження процесів руйнування біля штампів шляхом вивчення траєкторій підростання втомних тріщин за наближеного опису контактних навантажень на краю півплощини розподілом Герца. Детальний огляд виконаних в цьому напрямку робіт дано в [38].

Дію параболічного штампа на півплощину з крайовою тріщиною за врахування тертя в області контакту розглянуто в [104]. У цій роботі прийняте припущення, що береги тріщин не контактують, що істотно спрощує процес розв'язування задачі.

де a_{ij} – пружні сталі матеріалу, причому $a_{ij} = a_{ji}$; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – деформації; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – напруження.

Розглянемо анізотропну пластинку в умовах плоского напруженого стану, для якої серединна площина є площиною симетрії її механічних характеристик. Закон Гука для цього випадку буде мати вигляд [69]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} = a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}, \end{cases} \quad (1.2)$$

Закон Гука записують також із використанням технічних пружних сталих у вигляді [69]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_y}{E_y}\sigma_y + \frac{\eta_x}{E_x}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y}\sigma_y - \frac{\nu_x}{E_x}\sigma_x + \frac{\eta_y}{E_y}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\eta_x}{E_x}\sigma_x + \frac{\eta_y}{E_y}\sigma_y + \frac{1}{G_{xy}}\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

де E_x, E_y – модулі Юнга в напрямку осей Ox і Oy , G_{xy} – модуль зсуву, ν_x, ν_y – коефіцієнти Пуассона. Тобто, ненульові коефіцієнти в (1.2) при цьому будуть:

$$a_{11} = \frac{1}{E_x}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_x}{E_x}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_y}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{xy}}, \quad a_{16} = \frac{\eta_x}{E_x}, \quad a_{26} = \frac{\eta_y}{E_y},$$

причому має місце рівність $\nu_y/E_y = \nu_x/E_x$.

На практиці широко використовуються композитні матеріали, механічні характеристики в яких мають додатково площини симетрії $x=0$ та $y=0$. Для таких матеріалів, які називають ортотропними, в законі Гука $a_{16} = a_{26} = 0$.

1.2.1. Пружні сталі для композитних матеріалів

Наведемо значення пружних сталих для деяких композитних матеріалів, які широко використовуються в різних галузях промисловості та будівництва. Водночас, ці матеріали характеризуються різним рівнем анізотропії, що дає можливість під час їх розгляду сформулювати загальні висновки щодо впливу

анізотропії механічних характеристик на напружений стан. Система координат вибирається так, що вісь Oy стала паралельною напрямку з максимальною жорсткістю матеріалу. В таблиці 1.1 наведено технічні пружні сталі композитних матеріалів та відповідні їм корені характеристичного рівняння [12, 56, 163]. В ній додатково наведено величину (відношення максимального модуля Юнга до знайденого мінімального значення модуля) W_E . Порівнюючи це відношення із відношенням E_y/E_x (яке також подано в таблиці), можна зробити висновок, що для більшості із розглянутих матеріалів найменшу жорсткість мають композитні матеріали під деяким кутом відносно осей ортотропії матеріалу. Зазначимо, що величина W_E характеризує ступінь анізотропії матеріалу.

Таблиця 1.1

Пружні сталі

	E_x , ГПа	E_y , ГПа	G_{xy} , ГПа	ν_{xy}	ν_{yx}	W_E	E_y/E_x	$\text{Im } s_1$	$\text{Im } s_2$
ЕФ32	21.00	32.8	5.70	0.210	0.134	2.003	1.562	0.4462	1.7934
ЕТФ	12.50	29.6	4.90	0.189	0.080	2.461	2.368	0.4382	1.4829
ЛУ-1	10.80	96.0	2.61	0.210	0.024	12.150	8.889	0.1664	2.0157
CF2	15.00	232.0	5.02	0.280	0.018	17.323	15.467	0.1486	1.7117
CF1	8.62	400.0	2.80	0.350	0.008	52.829	46.404	0.0840	1.7483
Скло-епоксид	18.00	54.0	9.00	0.250	0.083	3.000	3.000	0.4524	1.2762
Бор-епоксид	21.00	207.0	7.00	0.300	0.030	11.040	9.857	0.1869	1.7042
Графіт-епоксид	5.00	207.0	2.60	0.250	0.006	41.400	41.400	0.1128	1.3778
Kevlar-епоксид	5.50	76.0	2.10	0.340	0.025	14.567	13.818	0.1687	1.5942

1.2.2. Близький до ізотропного матеріал

Щоб застосувати розроблений алгоритм до розгляду ізотропних пластинок безпосередньо прийемо, що пружні сталі дорівнюють [12]:

$$\frac{a_{22}}{a_{11}} = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{6}\right)^2, \quad \frac{a_{12}}{a_{11}} = -\nu \frac{1 - \kappa \varepsilon^2}{1 + \kappa \varepsilon^2}, \quad \frac{a_{66}}{a_{11}} = 2 \frac{1 + \nu}{1 + \kappa \varepsilon^2}, \quad (1.4)$$

де ν – задана стала (яка аналогічна до коефіцієнта Пуассона), $\kappa = \frac{1}{3(1+2\nu)}$, ε – деяке мале число (при $\varepsilon = 0$ матеріал стає ізотропним).

Корені характеристичного рівняння для цього матеріалу будуть [12]

$$s_{1,2} = \left(\sqrt{1 + \varepsilon^2/12} \pm \varepsilon/2 \right) i. \quad (1.5)$$

1.2.3. Пружні характеристики в повернутій системі координат

Поруч із системою координат Oxy розглянемо повернуту на кут φ систему координат $Ox'y'$ (рис. 1.1).

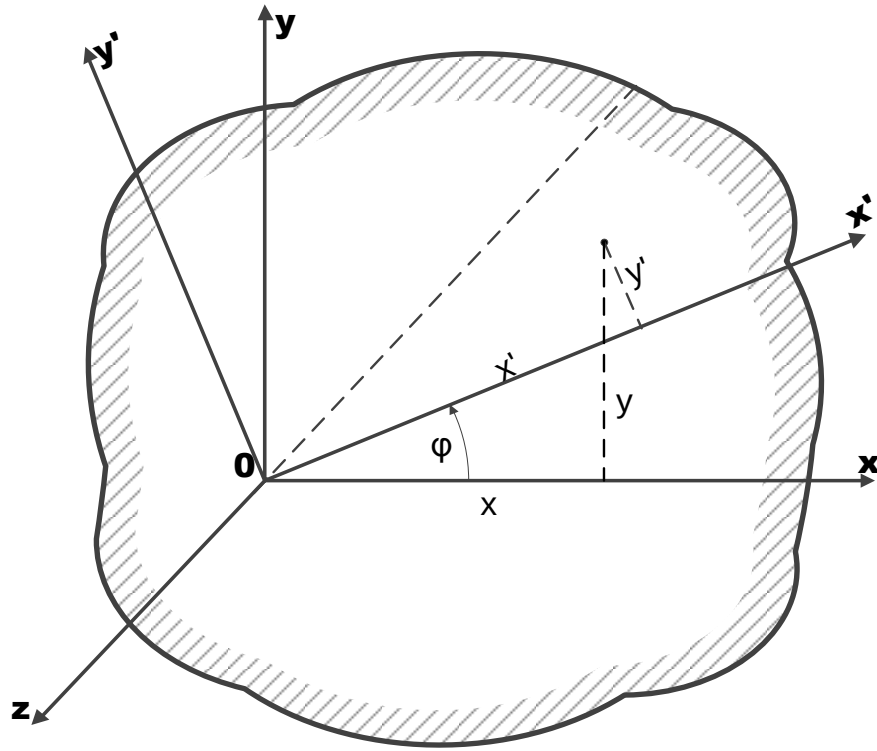


Рис. 1.1. Повернута система координат

Пружні сталі, напруження і деформації в повернутій системі координат будемо позначати з штрихом наверху. Закон Гука в цій системі має вигляд [67]:

$$\begin{cases} \varepsilon'_x = a'_{11}\sigma'_x + a'_{12}\sigma'_y + a'_{16}\tau'_{xy}, \\ \varepsilon'_y = a'_{21}\sigma'_x + a'_{22}\sigma'_y + a'_{26}\tau'_{xy}, \\ \gamma'_{xy} = a'_{61}\sigma'_x + a'_{62}\sigma'_y + a'_{66}\tau'_{xy}. \end{cases} \quad (1.6)$$

У [67] показано, що пружні сталі в законі (1.6) визначаються через пружні сталі в основній системі координат за формулами:

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= a_{11} \cos^4 \varphi + 2a_{12} + a_{66} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + a_{22} \sin^4 \varphi + \\
&\quad + a_{16} \cos^2 \varphi + a_{26} \sin^2 \varphi \sin 2\varphi, \\
a'_{22} &= a_{11} \sin^4 \varphi + 2a_{12} + a_{66} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + a_{22} \cos^4 \varphi - \\
&\quad - a_{16} \sin^2 \varphi + a_{26} \cos^2 \varphi \sin 2\varphi, \\
a'_{12} &= a_{12} + a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} a_{26} - a_{16} \sin 2\varphi \cos 2\varphi, \\
a'_{16} &= \left[a_{22} \sin^2 \varphi - a_{11} \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} 2a_{12} + a_{66} \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi + \\
&\quad + a_{16} \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi - 3\sin^2 \varphi + a_{26} \sin^2 \varphi 3\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \\
a'_{26} &= \left[a_{22} \cos^2 \varphi - a_{11} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} 2a_{12} + a_{66} \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi + \\
&\quad + a_{16} \sin^2 \varphi 3\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + a_{26} \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi - 3\sin^2 \varphi, \\
a'_{66} &= a_{66} + 4 a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 2 a_{26} - a_{16} \sin 2\varphi \cos 2\varphi.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

1.3. Основні рівняння плоскої задачі теорії пружності

Під час визначення НДС композитні пружні тіла розглядають як анізотропні матеріали. Розглянемо детальніше випадок плоскої задачі теорії пружності для анізотропних матеріалів. Під плоскою задачею теорії пружності розуміють узагальнений плоский напружений стан або плоску деформацію.

1.3.1. Узагальнений плоский напружений стан

Розглядається анізотропна пластинка товщиною $2h$, яка в довільній точці має площину пружної симетрії, що паралельна серединній площині. Крім цього приймається, що зовнішнє навантаження прикладено так, що його результуюча сила лежить у серединній площині. Віднесемо серединну площину до декартової системи координат Oxy . Торцеві площини пластинки приймаються вільними від зовнішнього навантаження. При дослідженні НДС тонких пластинок напруження приймаються незмінними по товщині і позначають через σ_x , σ_y , τ_{xy} , а іншими компонентами тензора напружень нехтують.

Співвідношення для плоского напруженого стану мають вигляд [69, 100]:

- рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \tag{1.8}$$

- співвідношення Коші:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.9)$$

де $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – деформації, u, v – вектор переміщень;

- умова сумісності деформацій

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (1.10)$$

Позначимо межу пластинки через L . Прийнемо, що на контурі L задано зусилля – проекції зовнішніх сил X_n, Y_n . Умови на межі тоді записуються у вигляді [100]:

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = X_n, \quad \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = Y_n. \quad (1.11)$$

де $\cos n, x, \cos n, y$ – косинуси кутів між зовнішньою нормаллю до контуру L та осями Ox, Oy відповідно. Таку задачу називають першою основною задачею теорії пружності.

Друга основна задача має місце за заданих на межі L переміщеннях, які позначимо через g_1, g_2 . Умови на межі тоді мають вигляд:

$$u_{x,y} = g_1, \quad v_{x,y} = g_2, \quad x, y \in L. \quad (1.12)$$

1.3.2. Плоска деформація

Для плоскої задачі теорії пружності залишаються справедливими наведені вище співвідношення для плоского напруженого стану, якщо в них пружні сталі a_{ij} в законі Гука (1.2) замінити на сталі α_{ij} , які визначаються за формулами [69]:

$$\alpha_{11} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}}, \quad \alpha_{11} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{23}}{a_{33}}, \quad \alpha_{16} = \frac{a_{16}a_{33} - a_{13}a_{36}}{a_{33}},$$

$$\alpha_{22} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}}, \quad \alpha_{26} = \frac{a_{26}a_{33} - a_{23}a_{36}}{a_{33}}, \quad \alpha_{66} = \frac{a_{66}a_{33} - a_{36}^2}{a_{33}}.$$

Зазначимо, що осьові напруження визначаються за формулою

$$\sigma_z = -\frac{1}{a_{33}} (a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{36}\tau_{xy}).$$

Розглядатимемо трансверсально-ізотропні матеріали, для яких пружні характеристики є однаковими в напрямку осей Ox і Oy . Закон Гука буде у вигляді:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z, \\ \varepsilon_y = a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z, \\ \varepsilon_z = a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z, \\ \gamma_{xy} = a_{66}\tau_{xy}, \gamma_{xz} = a_{44}\tau_{xz}, \gamma_{yz} = a_{55}\tau_{yz}, \end{cases}$$

при $a_{22} = a_{11}$, $a_{31} = a_{32}$, $a_{12} = a_{21}$, $a_{44} = a_{55}$.

Часто в літературі закон Гука записують у вигляді [69]:

$$\begin{cases} \sigma_x = c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y + c_{13}\varepsilon_z, \\ \sigma_y = c_{21}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y + c_{23}\varepsilon_z, \\ \sigma_z = c_{31}\varepsilon_x + c_{32}\varepsilon_y + c_{33}\varepsilon_z, \\ \tau_{xy} = c_{66}\gamma_{xy}, \tau_{xz} = c_{44}\gamma_{xz}, \tau_{yz} = c_{55}\gamma_{yz}. \end{cases}$$

Пружні сталі пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1}, \quad a_{44} = \frac{1}{c_{44}}, \quad a_{55} = \frac{1}{c_{55}}, \quad a_{66} = \frac{1}{c_{66}}.$$

Розглянемо випадок плоскої деформації, коли навантаження не залежить від координати y . Тоді

$$\sigma_y = -\frac{1}{a_{22}} a_{21}\sigma_x + a_{23}\sigma_z,$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{13}\sigma_z - \frac{a_{12}}{a_{22}} a_{21}\sigma_x + a_{23}\sigma_z = \left(a_{11} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{22}} \right) \sigma_x + \left(a_{13} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{22}} \right) \sigma_z, \\ \varepsilon_z = a_{31}\sigma_x + a_{33}\sigma_z - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{21}\sigma_x + a_{23}\sigma_z = \left(a_{31} - \frac{a_{21}a_{32}}{a_{22}} \right) \sigma_x + \left(a_{33} - \frac{a_{32}a_{23}}{a_{22}} \right) \sigma_z, \\ \gamma_{xz} = a_{44}\tau_{xz}. \end{cases}$$

1.3.3. Комплексні потенціали Лехніцького

Введемо функцію напружень F за допомогою наступних співвідношень:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (1.13)$$

За так визначених напружень рівняння рівноваги задовольняються тотожно. Підставляючи співвідношення (1.14) у вирази для деформацій (1.2) і далі їх у рівняння сумісності деформацій (1.10), отримують рівняння для знаходження функції напружень

$$\begin{aligned}
& a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + 2a_{12} + a_{66} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \\
& + a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Лехніцьким показано, що загальний розв'язок рівняння (1.14) може бути записаний у вигляді [69, 100]:

$$F = F_1 x + s_1 y + F_2 x + s_2 y + F_3 x + s_3 y + F_4 x + s_4 y ,$$

де F_j – довільні функції, s_j – корені характеристичного рівняння $\Delta s = 0$,

$$\Delta s = \alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + 2\alpha_{12} + \alpha_{66}s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22} = 0. \tag{1.15}$$

Встановлено [69], що корені характеристичного рівняння є комплексними або чисто уявними числами, при цьому корені $s_{1,2}$ вибираються так, щоб в них уявна частина була додатною.

Функція напружень може бути зображена у вигляді:

$$F = 2 \operatorname{Re} \left[\int \varphi(z_1) dz_1 + \int \psi(z_2) dz_2 \right], \tag{1.16}$$

де $\varphi(z_1)$, $\psi(z_2)$ – аналітичні функції комплексних змінних $z_j = x_j + iy_j = x + s_j y$.

Зазначимо, що $x_j = x + \alpha_j y$, $y_j = \beta_j y$, де $\alpha_j = \operatorname{Re} s_j$, $\beta_j = \operatorname{Im} s_j$, $j=1,2$.

Будемо розглядати випадок, коли пластинка займає область D (рис. 1.2a). Функція $\varphi(z_1)$ буде аналітична в області D_1 , яка отримується із області D афінним перетворенням $x_1 = x + \alpha_1 y$, $y_1 = \beta_1 y$ (рис. 1.2b). Аналогічно, аналітичною буде функція $\psi(z_2)$ в області D_2 (рис. 1.2c).

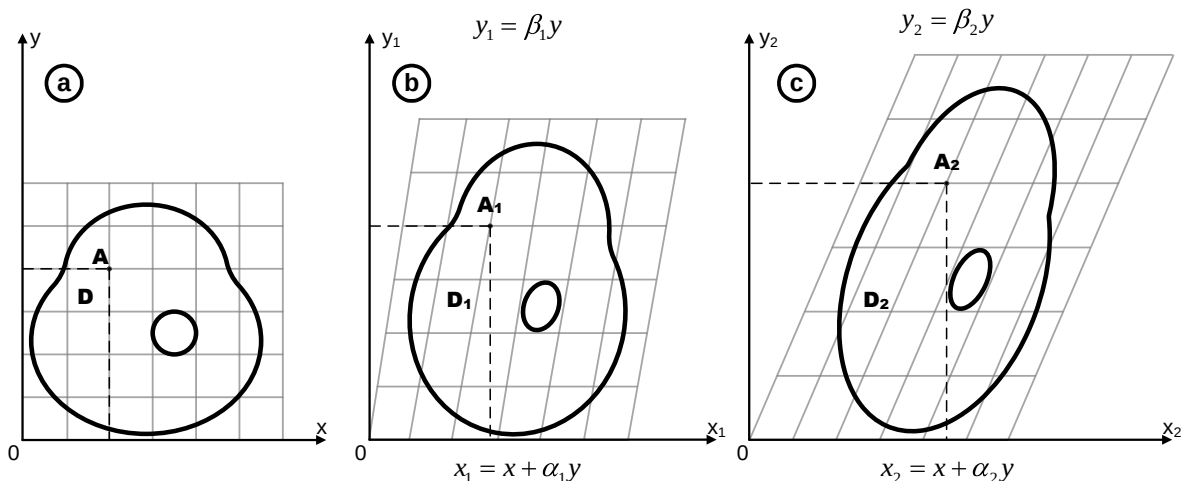


Рис. 1.2. Области визначення для функцій Лехніцького

Після підстановки функції (1.16) у формули (1.13) отримують співвідношення для знаходження напружень

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2\operatorname{Re}\left[s_1^2\Phi(z_1) + s_2^2\Psi(z_2)\right], \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re}\left[\Phi(z_1) + \Psi(z_2)\right], \\ \tau_{xy} &= -2\operatorname{Re}\left[s_1\Phi(z_1) + s_2\Psi(z_2)\right],\end{aligned}\tag{1.17}$$

де $\Phi(z_1) = \varphi'(z_1)$, $\Psi(z_2) = \psi'(z_2)$.

Підставляючи співвідношення (1.17) у закон Гука (1.2) визначають деформації, а далі після інтегрування знаходять переміщення у вигляді [69]:

$$\begin{aligned}u &= 2\operatorname{Re}\left[p_1\varphi(z_1) + p_2\psi(z_2)\right] - \omega y + u_0, \\ v &= 2\operatorname{Re}\left[q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2) + \omega x + v_0\right].\end{aligned}\tag{1.18}$$

де u_0 , v_0 , ω – довільні сталі, $p_j = a_{11}s_j^2 + \alpha_{12} - \alpha_{16}s_j$, $q_j = \alpha_{12}s_j + \alpha_{22}/s_j - \alpha_{26}$, $j = \overline{1,2}$.

Розглянемо першу основну задачу, гранична умова на межі області D для якої має вигляд (1.11), де (X_n, Y_n) – вектор прикладених до межі зусиль. Підставивши у співвідношення (1.11) функцію напружень (1.16), отримують граничні умови у випадку першої основної задачі у вигляді [69]:

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re}\left[\varphi(z_1) + \psi(z_2)\right] &= -\int Y_n ds + C_1, \\ 2\operatorname{Re}\left[s_1\varphi(z_1) + s_2\psi(z_2)\right] &= \int X_n ds + C_2.\end{aligned}\tag{1.19}$$

де C_1 , C_2 – довільні сталі, ds – диференціал дуги на контурі L .

Для другої основної задачі умови при заданих на межі переміщеннях g_1, g_2 для функцій $\varphi(z_1)$ і $\psi(z_2)$ записуються у вигляді [69]:

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re}\left[p_1\varphi(z_1) + p_2\psi(z_2)\right] &= g_1(s), \\ 2\operatorname{Re}\left[q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2)\right] &= g_2(s).\end{aligned}\tag{1.20}$$

1.4. Загальні співвідношення для пружних анізотропних пластинок

Наведемо допоміжні співвідношення плоскої анізотропної задачі теорії пружності, які будуть використовуватись у роботі.

Розглянемо довільну криву Γ , яка лежить в області D , що займає пластинка та виберемо на ній додатній напрямок обходу так, щоб необхідна область була зліва (рис. 1.3).

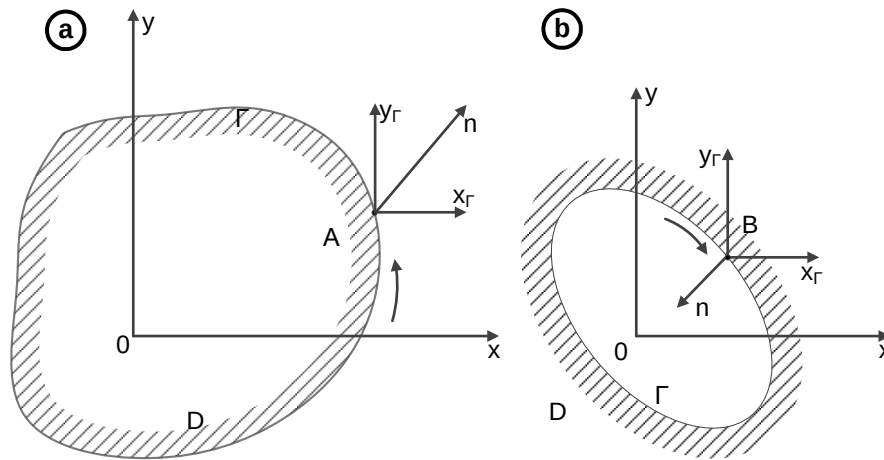


Рис. 1.3. Додатні напрямки обходу

Введемо вектор $\overline{q_\Gamma}$ на дотичній до кривої площинці. Нормаль до нього розміщують праворуч відносно вибраного напрямку обходу. Проекції X_Γ, Y_Γ вектора $\overline{q_\Gamma}$ і похідні від переміщень u, v за дуговою координатою на кривій через комплексні потенціали Лехніцького визначаються за формулами [100]:

$$Y_\Gamma = -2\operatorname{Re}[\Phi z_1 z'_1 + \Psi z_2 z'_2], \quad (1.21)$$

$$X_\Gamma = 2\operatorname{Re}[s_1 \Phi z_1 z'_1 + s_2 \Psi z_2 z'_2],$$

$$u' = 2\operatorname{Re}[p_1 \Phi z_1 z'_1 + p_2 \Psi z_2 z'_2], \quad (1.22)$$

$$v' = 2\operatorname{Re}[q_1 \Phi z_1 z'_1 + q_2 \Psi z_2 z'_2],$$

де $z_j = x + s_j y$, $u' = du/ds$, $v' = dv/ds$, $z'_j = dx/ds + s_j dy/ds$, ds – диференціал дуги на Γ .

Вектор напружень $q_\Gamma z = X_\Gamma + iY_\Gamma$ на кривій Γ з використанням формул (1.21) визначається у вигляді [100]:

$$q_\Gamma = s_1 - i z'_1 \Phi z_1 + \overline{s_1 - i z'_1 \Phi z_1} + s_2 - i z'_2 \Psi z_2 + \overline{s_2 - i z'_2 \Psi z_2}. \quad (1.23)$$

Будемо також використовувати вектор напружень: $p_\Gamma = N_\Gamma + iT_\Gamma$, де N_Γ, T_Γ – проекції визначеного вище вектора напружень на дотичну та нормаль до кривої, напрямки яких визначаються відповідно до вибраного напрямку обходу. Зазначимо, що $p_\Gamma = iq_\Gamma d\bar{z}/ds$, де $z = x + iy$.

РОЗДІЛ 2

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ОТВОРІВ, ТРІЩИН, ШТАМПІВ У ОРТОТРОПНИХ ПІВПЛОЩИНАХ

На практиці найбільше застосування знайшли композитні матеріали, які мають ортотропні механічні характеристики. Зокрема до них належать композити з однонапрямленими армованими елементами. У математичному відношенні задача розрахунку напружень у таких матеріалах є значно простішою, ніж у випадку загальної анізотропії. В розділі розроблено підхід до дослідження контактних задач для ортотропної півплощини з отворами й тріщинами та запропоновано методику розрахунку на міцність композитних пластинчатих елементів конструкцій.

Основні результати цього розділу опубліковані в працях [75, 77].

2.1. Контактна задача для суцільної ортотропної півплощини

Розглянемо ортотропну півплощину $y < 0$, яка навантажена в області L_u $c < x < d$ штампом з основою $y = f(x)$ за умови, що вісь Ox є головною віссю ортотропії. Прийнемо, що напруження під штампом задовольняють умовам: $\int_c^d \sigma_y(x) dx = P_y$, $\int_c^d x \sigma_y(x) dx = M$, де $P_y = -P$ (P – сила, яка притискає штамп), M – момент відносно початку координат. Будемо розглядати випадок, коли границя поза областю контакту (область L_σ) вільна від навантаження та дотичні напруження під штампом відсутні (рис. 2.1). Розв’язок цієї задачі отримали Савін [100] та Галін [21]. Розв’яжемо її іншим методом.

Введемо функції:

$$F(z) = \Phi(z) + \Psi(z), \quad U(z) = s_1 \Phi(z) + s_2 \Psi(z).$$

Потенціали Лехніцького через ці функції визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{s_1 - s_2} U(z) - \frac{s_2}{s_1 - s_2} F(z), \\ \Psi(z) &= -\frac{1}{s_1 - s_2} U(z) + \frac{s_1}{s_1 - s_2} F(z). \end{aligned} \quad (2.1)$$

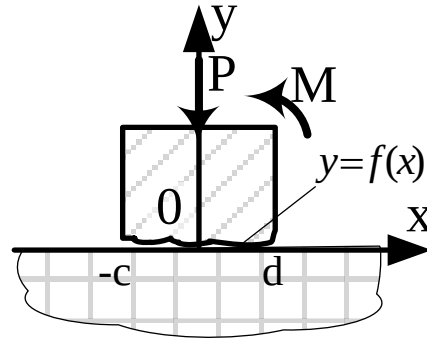


Рис. 2.1. Ортотропна півплощина, навантажена штампом

Переміщення і напруження при $y = 0$ через введені функції визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= 2 \operatorname{Re} F, \quad \tau_{xy} = -2 \operatorname{Re} U, \\ v' &= 2 \operatorname{Re} q_1 \Phi + q_2 \Psi = 2r \operatorname{Re} U - 2\mu \operatorname{Im} F,\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$\text{де } r = \frac{q_1 - q_2}{s_1 - s_2}, \quad \mu = i\lambda, \quad \lambda = \frac{s_1 q_2 - s_2 q_1}{s_1 - s_2}.$$

Зазначимо, що, як правило, для ортотропних матеріалів величини r і μ є дійсними (далі в розд. розглядається такий випадок), при цьому $\mu = \alpha_{22} i \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right)$.

Умови (2.2) на межі для контактної задачі запишуться у вигляді:

$$\operatorname{Im} F = -\frac{f'}{2\mu}, \quad x \in L_u; \quad \operatorname{Re} F = 0, \quad x \in L_\sigma; \quad \operatorname{Re} U = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

На основі [21] маємо: $U = 0$,

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i \mu X(z)} \int_c^d \frac{f'(t) |X(t)| dt}{t - z} + \frac{P_y}{2\pi i X(z)}, \quad (2.3)$$

де

$$X(z) = \sqrt{z - c} \sqrt{z - d}, \quad |X(x)| = \sqrt{x - c} \sqrt{d - x}.$$

Момент визначається за формулою

$$M = x_c P_y + \frac{1}{\mu} \int_c^d f'(t) |X(t)| dt, \quad (2.4)$$

$$\text{де } x_c = \frac{c + d}{2}.$$

2.1.1. Плоский штамп

Розглянемо випадок плоского штампа, що повертається на кут ε , до якого прикладені сила P (рис. 2.2). Тоді покладаючи в (2.3) $f' = \varepsilon$, отримуємо для функції F зображення у вигляді:

$$F_A z = -\frac{\varepsilon}{2i\mu} \left(1 - \frac{z - x_c}{X z} \right) + \frac{P_y}{2\pi i X z}. \quad (2.5)$$

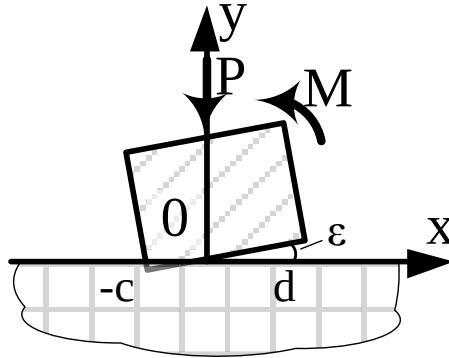


Рис. 2.2. Ортотропна півплощина, навантажена плоским штампом

Момент знаходимо за формулою (2.4)

$$M = x_c P_y + \frac{\pi \varepsilon l^2}{2\mu}. \quad (2.6)$$

З цієї формули визначається кут повороту у випадку, коли заданий момент M , який прикладено до штампа:

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\pi l^2} (M - x_c P_y). \quad (2.7)$$

Контактні напруження визначаються за формулою

$$\sigma_y = \frac{1}{\pi |X - x|} \left[P_y + \frac{\pi \varepsilon}{\mu} (x - x_c) \right].$$

Звідси, зокрема, для випадку ізотропного матеріалу одержимо, що

$$a_{22} = \frac{1}{E}, \quad s_1 \rightarrow i, \quad s_2 \rightarrow i, \quad \mu = \frac{2}{E}, \quad \varepsilon = \frac{4M}{E\pi l^2}.$$

Цей розв'язок збігається з наведеними в [87] співвідношеннями для ізотропної задачі.

Вираз для напружень

$$\sigma_y = \frac{1}{\pi |X - x|} \left[P_y + \frac{\pi E \varepsilon}{2} (x - x_c) \right]$$

також збігається з наведеним у [87].

2.1.2. Параболічний штамп

Розглянемо випадок параболічного штампа, коли $f' = x/R + \varepsilon$, до якого прикладена сила P , де ε – кут повороту штампа, R – радіус закруглення (рис. 2.3). Тоді для функції F зображення у вигляді:

$$F_B(z) = -\frac{1}{2i\mu R} \left(z + \varepsilon R - \frac{z^2 + (-x_c + \varepsilon R)z - x_c \varepsilon R - \frac{l^2}{2} + P_y \mu \frac{R}{\pi}}{X(z)} \right). \quad (2.8)$$

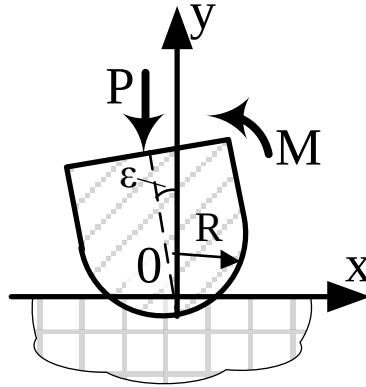


Рис. 2.3. Ортотропна півплощина, навантажена параболічним штампом

Момент знаходимо за формулою (2.4)

$$M = x_c P_y + \frac{\pi l^2}{2\mu} \left(\varepsilon + \frac{x_c}{R} \right). \quad (2.9)$$

З цієї формули може бути визначений кут повороту у випадку, коли заданий момент, який прикладено до штампа:

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\pi l^2} (M - x_c P_y) - \frac{x_c}{R}. \quad (2.10)$$

Розглянемо випадок, коли область контакту невідома. Використаємо заміну $z = \zeta + x_c$. Тоді з (2.8) отримуємо

$$F_B(z) = \frac{P_y}{\pi i l^2} \left[\zeta + \frac{l^2 - \zeta^2}{X(\zeta)} \right], \quad \zeta = z - x_c. \quad (2.11)$$

Область контакту знаходимо з умов обмеженості напружень при $\zeta = \pm l$,

$$l = \sqrt{\frac{2|P|\mu R}{\pi}}, \quad x_c = \frac{M}{P}, \quad \varepsilon R = -\frac{M}{P_y}. \quad (2.12)$$

Контактні напруження під штампом будуть мати вигляд:

$$\sigma_y = \frac{2}{\pi} \frac{P_y}{l} \sqrt{1 - \xi^2 / l^2},$$

де $\xi = x - x_c$.

Вирази для півширини ділянки контакту та для напружень під штампом у випадку ізотропного матеріалу також збігаються із наведеними в [87] формулами.

Максимальний тиск досягається в центрі області контакту і дорівнює

$$p_0 = \frac{2}{\pi} \frac{|P|}{l}.$$

Розглянемо випадок, коли відомий максимальний тиск p_0 під штампом.

Тоді $l = \mu R p_0$, $P = -\pi p_0^2 \mu R / 2$.

2.2. Модифіковані інтегральні рівняння для анізотропних пластинок із отворами

У прикладних задачах виникає необхідність дослідження напружень у пластинках складної форми. Для ізотропних пластинок широко використовуються інтегральні рівняння, які побудовані з використанням розв'язків типу Гріна, за яких граничні умови на деяких межах задовольняються тотожно, і які в літературі називають модифікованими. Для деяких класів задач такі рівняння побудовані також і для анізотропних пластинок [12, 78]. Такий підхід суттєво спрощує алгоритм розв'язування задач, оскільки інтегральні рівняння записують тільки на кривих, де розміщені межі отворів.

2.2.1. Постановка задачі

Розглянемо пружну анізотропну пластинку, яка займає задану область D за однорідних умов на її межі (наприклад, межа вільна від навантажень або на частині межі задані нульові переміщення, а решта межі вільна від навантаження) (постановку задачі схематично зображено на рис. 2.4). Приймемо, що анізотроп-

на пластинка послаблена отворами, межі яких лежать на кривих L_j , $j = \overline{1, J}$, до меж яких прикладено зусилля X_L, Y_L . Запишемо інтегральні рівняння для такої пластини з отворами так, щоб умови на межі області D виконувались автоматично.

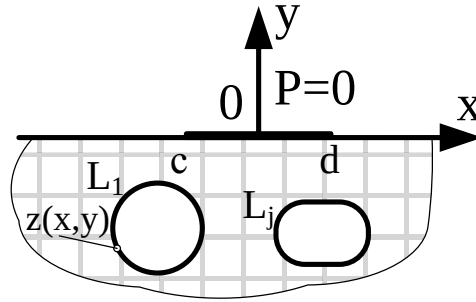


Рис. 2.4. Схема задачі

2.2.2. Основні співвідношення

Виходитимемо із комплексних потенціалів Лехніцького Φz_1 , Ψz_2 , де $z_j = x + s_j y$, s_j , ($j = \overline{1, 2}$) – корені характеристичного рівняння $\Delta s = 0$ з додатною уявною частиною [69], де

$$\Delta s = \alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + 2\alpha_{12} + \alpha_{66}s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22}, \quad (2.13)$$

α_{ij} – пружні сталі, які входять у закон Гука [69]

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \quad \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \quad \gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}.$$

Тут $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – деформації, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – напруження.

Розглянемо довільний контур Γ , який належить області D , що займає пластина. Виберемо на цьому контурі додатній напрямок обходу. На контурі Γ , який розглядаємо як межу області, що розміщена зліва відносно вибраного напрямку обходу. Вектори напружень X_Γ, Y_Γ і переміщень u, v на цьому контурі визначають за формулами [69]:

$$\begin{aligned} Y_\Gamma &= -2\operatorname{Re}[\Phi z_1 z'_1 + \Psi z_2 z'_2], \quad X_\Gamma = 2\operatorname{Re}[s_1\Phi z_1 z'_1 + s_2\Psi z_2 z'_2], \\ u' &= 2\operatorname{Re}[p_1\Phi z_1 z'_1 + p_2\Psi z_2 z'_2], \quad v' = 2\operatorname{Re}[q_1\Phi z_1 z'_1 + q_2\Psi z_2 z'_2], \end{aligned} \quad (2.14)$$

де $u' = du/ds$, $v' = dv/ds$; $p_j = \alpha_{11}s_j^2 - \alpha_{16}s_j + \alpha_{12}$; $q_j = \alpha_{12}s_j - \alpha_{26} + \alpha_{22}/s_j$; $z'_j = dx/ds + s_j dy/ds$, ds – диференціал дуги на контурі Γ .

Далі введемо в розгляд вектор напружень $q_\Gamma z = X_\Gamma + iY_\Gamma$ на кривій Γ , який з використанням співвідношень (2.14) визначатимемо за формулою

$$q_\Gamma = s_1 - i z'_1 \Phi_{z_1} + \overline{s_1 - i z'_1 \Phi_{z_1}} + s_2 - i z'_2 \Psi_{z_2} + \overline{s_2 - i z'_2 \Psi_{z_2}}. \quad (2.15)$$

Приймемо, що відомими є вектори X_Γ, Y_Γ і u, v на кривій Γ . Тоді зі співвідношень (2.14) на кривій Γ маємо [12, 78]:

$$\Phi_{z_1} = \frac{-v' + s_1 u' + p_1 X_\Gamma + q_1 Y_\Gamma}{\Delta_1 z'_1}, \quad \Psi_{z_2} = \frac{-v' + s_2 u' + p_2 X_\Gamma + q_2 Y_\Gamma}{\Delta_2 z'_2}, \quad (2.16)$$

де $\Delta_j = \Delta' s_j$, $j = \overline{1, 2}$.

2.2.3. Інтегральні зображення розв'язку задачі для нескінченної області

Для побудови загального розв'язку задачі розглянемо спочатку нескінченну пластинку з отворами, яка перебуває під дією зусиль на нескінченності та внутрішніх зосереджених сил. На основі співвідношень (2.16) та теореми Коші для аналітичних функцій і потенціалів Лехніцького маємо інтегральні зображення вигляду [12, 78]:

$$\begin{aligned} \Phi_{z_1} &= \int_L \left[u' \Phi_{z_1, t_1}^0 + v' \Phi_{z_1, t_1}^0 \right] ds + \Phi_s z_1, \\ \Psi_{z_2} &= \int_L \left[u' \Psi_{z_2, t_2}^0 + v' \Psi_{z_2, t_2}^0 \right] ds + \Psi_s z_2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

де $L = L_1 + \dots + L_J$, u' , v' – похідні від переміщень на межі отвору за дуговою координатою.

$$\Phi_j^0 z_1, t_1 = \frac{A_j}{t_1 - z_1}, \quad \Psi_j^0 z_2, t_2 = \frac{B_j}{t_2 - z_2}, \quad j = \overline{1, 2}, \quad (2.18)$$

$$A_1 = -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1}, \quad A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1}, \quad B_1 = -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2}, \quad B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2}. \quad (2.19)$$

Тут $t_j = \xi + s_j \eta$, $\xi, \eta \in L$ – точка, за якою проводиться інтегрування, ds – диференціал дуги на кривій L , $\Phi_s z_1$, $\Psi_s z_2$ – потенціали для суцільної пластинки, які відповідають прикладеним на нескінченності зусиллям та внутрішнім зосередженим силам.

2.2.4. Модифіковані інтегральні рівняння

Розглянемо випадок, коли пружна анізотропна пластина займає задану область D за однорідних умов на її межі (наприклад, межа вільна від навантажень або на частині межі задані нульові переміщення, а решта межі вільна від навантаження). Запишемо інтегральні рівняння для такої пластини з отворами так, щоб умови на межі області D виконувались автоматично. З цією метою спочатку побудуємо комплексні потенціали Лехніцького $\Phi_j^D, \Psi_j^D, (j = \overline{1,2})$, які є розв'язком задачі теорії пружності для області D з вибраними однорідними умовами на межі за умови, що ці функції мають такі особливості в точці з координатами x_0, y_0 :

$$\Phi_j^D \sim -\frac{A_j}{z_1 - z_{1,0}}, \Psi_j^D \sim -\frac{B_j}{z_2 - z_{2,0}}, \quad (2.20)$$

де $z_{1,0} = x_0 + s_1 y_0, z_{2,0} = x_0 + s_2 y_0, x_0, y_0 \in D$.

Позначимо ці потенціали $\Phi_j^D z_1, T, \Psi_j^D z_2, T$, де T – точка з координатами x_0, y_0 . Тоді загальний розв'язок задачі теорії пружності (потенціали Лехніцького) для області D з отворами запишеться у вигляді [12, 78]:

$$\begin{aligned} \Phi z_1 &= \int_L \left[\Phi_1^D z_1, T u' s + \Phi_2^D z_1, T v' s \right] ds + \Phi_D z_1, \\ \Psi z_2 &= \int_L \left[\Psi_1^D z_2, T u' s + \Psi_2^D z_2, T v' s \right] ds + \Psi_D z_2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

де $\Phi_D z_1 = \Phi_D^P z_1 + \Phi_D^\infty z_1, \Psi_D z_2 = \Psi_D^P z_2 + \Psi_D^\infty z_2$, T – точка з координатами ξ, η , по якій проводиться інтегрування. Тут потенціали $\Phi_D^\infty, \Psi_D^\infty$ та Φ_D^P, Ψ_D^P – розв'язки задач теорії пружності для області D з однорідними граничними умовами під час дії прикладених до пластинки на нескінченності зусиль (для обмежених пластинок ці потенціали рівні нулю) або зосереджених сил відповідно.

За побудовою потенціали (2.21) тотожно задовольняють задані умови на межі області D за довільних функцій u', v' .

Підставимо співвідношення (2.21) у граничні умови, для знаходження невідомих функцій u', v' :

$$\int_L [u' s Q_1 Z,T + v' s Q_2 Z,T] ds = Q Z, \quad Z \in L, \quad (2.22)$$

де $Q Z = Q_L Z - Q_D Z$; $Q_j Z,T$ – вектор напружень q_L в точці Z з координатами x, y на кривій L , який визначається за формулою (2.21) через комплексні потенціали $\Phi_j^D z_1, T, \Psi_j^D z_2, T$, $j = \overline{1,2}$; $Q_D Z$ – вектор напружень, що відповідає потенціалам $\Phi_D z_1, \Psi_D z_2$, $Q_L = X_L + iY_L$. Наприклад,

$$Q_j Z,T = s_1 + i z_1' \Phi_j^D z_1, T + \overline{s_1 + i z_1' \Phi_j^D z_1, T} + \\ + s_2 + i z_2' \Psi_j^D z_2, T + \overline{s_2 + i z_2' \Psi_j^D z_2, T}, \quad j = \overline{1,2}.$$

Крім цього, для забезпечення однозначності переміщень, необхідно на невідомі функції накласти умови:

$$\int_{L_j} u' ds = 0, \quad \int_{L_j} v' ds = 0, \quad j = \overline{0, N}.$$

2.2.5. Властивості потенціалів Лехніцького

Невідомі функції u', v' на кожному з граничних контурів у поданні (2.21) визначені з точністю до доданків $\tilde{u}' = -\omega_j dy/ds$, $\tilde{v}' = \omega_j dx/ds$, де ω_j – довільні сталі, $j = \overline{1, J}$. Зазначимо, що ці величини є похідними від переміщень, що виникають за повороту меж пластини як жорсткого цілого. Під час числового розв'язування задачі сталі ω_j , $j = \overline{1, J}$ необхідно фіксувати. Наприклад, для цього можна покласти $u' = 0$ в одній із точок на межі отвору, в якій $dy/ds \neq 0$.

Знайдені зусилля на основі інтегрального зображення (2.21) на межі кожного з отворів такі, що їх головний вектор та момент тотожно дорівнюватимуть головному вектору та моменту прикладеного зовнішнього навантаження (за довільних невідомих функцій u', v').

2.2.6. Числовий алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь

Розглянемо спочатку отвір, коли $L = L_1$. Вважатимемо, що контур L є гладкий і заданий параметрично у вигляді $\xi = \alpha \theta$, $\eta = \beta \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Покладемо

в (2.22) $x = \tilde{x}_v$, $y = \tilde{y}_v$, $v = \overline{1, N}$ та замінивши інтеграли квадратурними формулами [12], отримаємо систему рівнянь у вигляді:

$$H \sum_{k=1}^N q_{vk}^{(1)} U_k + q_{vk}^{(2)} V_k = q_v, \quad v = \overline{1, N}, \quad (2.23)$$

де $q_{vk}^j = Q_j Z_v, T_k$, $j = \overline{1, 2}$, $q_v = Q_L Z_v - Q_S Z_v - Q_\Delta Z_v$, $U_k = u' s \theta_k s'_k$, $V_k = v' s \theta_k s'_k$, T_k – точки з координатами x_k, y_k , Z_v – точки з координатами $\tilde{x}_v, \tilde{y}_v$, $x_k = \alpha \theta_k$, $y_k = \beta \theta_k$, $\tilde{x}_v = \alpha \tau_v$, $\tilde{y}_v = \beta \tau_v$, $\theta_k = Hk$, $\tau_v = \theta_v - H/2$, $H = 2\pi/N$, $s'_k = s' \theta_k$, $s' \theta = \sqrt{\alpha' \theta^2 + \beta' \theta^2}$, N – вибрана кількість вузлових точок на контурі L .

Зі встановлених властивостей розв'язку (2.21) випливає, що система рівнянь (2.23) (з точністю до похибок квадратурної формули) є лінійно залежною. Тому у комплексній системі (2.23) одне з рівнянь є зайвим, яке вилучаємо. Запишемо решту рівнянь зі системи (2.23) у дійсному вигляді. В такій системі одне із рівнянь також лінійно залежне, яке також вилучаємо.

До отриманої неповної системи долучаємо такі три рівняння:

$$\sum_{k=1}^N U_k = 0, \quad \sum_{k=1}^N V_k = 0, \quad U_m = 0, \quad 1 \leq m \leq N. \quad (2.24)$$

Тут перші два рівняння випливають з умов однозначності переміщень. Останнє рівняння отримано в результаті фіксування довільної сталої ω у власному розв'язку так, щоб значення функції $u' = 0$ у вузловій точці з номером m , причому цю точку необхідно вибрати так, щоб у ній $\frac{dy}{ds} \neq 0$. Аналогічно запишемо рівняння вигляду (2.23) для системи отворів.

Стійким алгоритм розв'язування задачі виявився й у випадку, коли до системи рівнянь (2.23), яка має лінійно залежні рядки, додали ще три рівняння (2.24). Отриману систему розв'язували за допомогою розроблених для таких випадків (задач із лінійно залежними рівняннями) стандартних комп'ютерних процедур, що ґрунтуються на методі найменших квадратів.

2.3. Побудова розв'язків типу Гріна

Наведемо розв'язки типу Гріна для півплощини, що взаємодіє із штампами. Ці розв'язки необхідні для побудови інтегральних зображень (2.21) та відповідні їм інтегральних рівнянь (2.22). В [12] показано, що введені розв'язки типу Гріна належать до класу дислокаційних [87]. І вони будуть використані для запису модифікованих інтегральних рівнянь.

2.3.1. Дислокаційний розв'язок для півплощини з ненавантаженою межею

Розглянемо півплощину $y < 0$, межа якої вільна від навантаження (рис. 2.4). Для запису модифікованих інтегральних рівнянь у цьому випадку згідно формул (2.20) необхідно побудувати потенціали Лехніцького $\Phi_1 z_1$, $\Psi_1 z_2$, які мають задані особливості в довільній внутрішній точці x_0, y_0 :

$$\Phi_1 z_1 \sim \frac{A}{z_1 - z_{1,0}}, \quad \Psi_1 z_2 \sim \frac{B}{z_2 - z_{2,0}},$$

за умови, що відповідні їм напруження при $y = 0$ дорівнюють нулю. Тут A, B – довільні комплексні сталі, $z_{j,0} = x_0 + s_j y_0$, причому $\text{Im } z_{j,0} < 0$, $j = \overline{1,2}$.

Розв'язок задачі отримано в [12] у вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi_1 z &= \Phi_0 z + \alpha_1 \overline{\Phi_0 z} + \beta_1 \overline{\Psi_0 z}, \\ \Psi_1 z &= \Psi_0 z + \alpha_2 \overline{\Phi_0 z} + \beta_2 \overline{\Psi_0 z}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_0 z_1 &= \frac{A}{z_1 - z_{1,0}}, \quad \Psi_0 z_2 = \frac{B}{z_2 - z_{2,0}}, \\ \alpha_1 &= \frac{\overline{s_1} - s_2}{\delta_1}, \quad \beta_1 = \frac{\overline{s_2} - s_2}{\delta_1}, \quad \alpha_2 = \frac{s_1 - \overline{s_1}}{\delta_1}, \quad \beta_2 = \frac{s_1 - \overline{s_2}}{\delta_1}, \quad \delta_1 = s_2 - s_1. \end{aligned}$$

Дислокаційні потенціали запишуться у вигляді:

$$\Phi_j^D = - \Phi_1 \big|_{A=A_j, B=B_j}, \quad \Psi_j^D = - \Psi_1 \big|_{A=A_j, B=B_j}, \quad j = \overline{1,2}. \quad (2.26)$$

2.3.2. Дислокаційний розв'язок для півплощини, що знаходиться під дією плоского штампа

За дислокаційний розв'язок приймемо потенціали Лехніцького $\Phi_D z_1$, $\Psi_D z_2$, які мають особливості:

$$\Phi_D z_1 \sim \frac{A}{z_1 - z_{1,0}}, \quad \Psi_D z_2 \sim \frac{B}{z_2 - z_{2,0}},$$

коли під штампом (у області L_u) похідна від переміщень $v' = \varepsilon$ та $\tau_{xy} = 0$, поза штампом (в області L_σ) межа ненавантажена, головний вектор та момент сил, прикладених до штампа дорівнюють нулю (із цієї умови визначається стала ε). Зобразимо ці потенціали у вигляді:

$$\Phi_D z_1 = \Phi z_1 + \Phi_A z_1, \quad \Psi_D z_2 = \Psi z_2 + \Psi_A z_2,$$

де

$$\Phi_A z = -\frac{s_2}{s_1 - s_2} F_A z, \quad \Psi_A z = \frac{s_1}{s_1 - s_2} F_A z,$$

функція F_A відповідає повороту плоского штампа й визначається за формулою (2.5) при $P = 0$.

Для потенціалів Φ , Ψ використаємо зображення (2.25). Оскільки в цьому зображенні $F z = \Phi z + \Psi z$, $U z = s_1 \Phi z + s_2 \Psi z$, то функції $F z$ і $U z$ матимуть полюси

$$F z \sim F_0 z = \frac{A}{z - z_{1,0}} + \frac{B}{z - z_{2,0}}, \quad U z \sim U_0 z = \frac{s_1 A}{z - z_{1,0}} + \frac{s_2 B}{z - z_{2,0}}.$$

Задовольняючи граничні умови на межі півплощини, для знаходження цих функцій маємо крайові умови:

$$\operatorname{Re} U x = 0, \text{ при } -\infty < x < \infty, \quad (2.27)$$

та

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F x - i0 &= 0, \quad x \in L_u, \\ \operatorname{Re} F x - i0 &= 0, \quad x \in L_\sigma \end{aligned} \quad (2.28)$$

Введемо функцію $F z = \frac{S z}{X z} + F_A z$. Функція S буде мати особливість

$$S(z) \sim S_0(z) = \frac{AX(z)z_{1,0}}{z - z_{1,0}} + \frac{BX(z)z_{2,0}}{z - z_{2,0}},$$

та на основі (2.28) задовольняє крайовим умовам:

$$\operatorname{Re} S(x - i0) = 0, \text{ при } -\infty < x < \infty. \quad (2.29)$$

З крайових умов (2.27), (2.29) одержимо представлення для функцій U і S у вигляді:

$$U(z) = U_0(z) - \bar{U}_0(z), \quad S(z) = S_0(z) - \bar{S}_0(z).$$

Звідси отримуємо, що:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{X(z)} [S_0(z) - \bar{S}_0(z)], \\ \Phi(z) &= \frac{U_0(z) - \bar{U}_0(z)}{s_1 - s_2} - \frac{s_2}{s_1 - s_2} \frac{S_0(z) - \bar{S}_0(z)}{X(z)}, \\ \Psi(z) &= -\frac{U_0(z) - \bar{U}_0(z)}{s_1 - s_2} + \frac{s_1}{s_1 - s_2} \frac{S_0(z) - \bar{S}_0(z)}{X(z)}. \end{aligned}$$

Напруження під штампом, які відповідають потенціалам Φ , Ψ знаходяться за формулою

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re} \frac{1}{X(x - i0)} [S_0(x) - \bar{S}_0(x)].$$

Момент, який відповідає цим напруженням, визначається за формулою

$$M_2 = \int_c^d x \sigma_y dx = 2 \operatorname{Re} \int_c^d x \frac{S_0(x) - \bar{S}_0(x)}{X(x - i0)} dx = \operatorname{Re} \int_{\Gamma} z \frac{S_0(z) - \bar{S}_0(z)}{X(z)} dz,$$

де Γ – замкнений контур, який включає в себе відрізок c, d , інтегрування вздовж якого ведеться проти ходу годинникової стрілки.

Звідси методом лишків знаходимо:

$$\begin{aligned} M_2 &= 2\pi \operatorname{Re} i \left[A w_0(z_{1,0}) + B w_0(z_{2,0}) - \overline{A w_0(z_{1,0})} - \overline{B w_0(z_{2,0})} \right] = \\ &= -4\pi \operatorname{Im} \left[A w_0(z_{1,0}) + B w_0(z_{2,0}) \right], \end{aligned}$$

де $w_0(z) = X(z) - z$.

Щоб забезпечити відсутність навантаження, що прикладено до штампа, в розв'язку (2.29) покладемо $M = -M_2$, $P = 0$. Звідси F_A отримуємо у вигляді:

$$F_{A \ z} = -\frac{M_2 i}{\pi l^2} \left(1 - \frac{z - x_c}{X \ z} \right).$$

Допоміжні потенціали, які входять у інтегральні рівняння, визначаються за формулами:

$$\Phi_j^D = -\Phi_D \quad A=A_j, B=B_j, \quad \Psi_j^D = -\Psi_D \quad A=A_j, B=B_j, \quad j=\overline{1,2}. \quad (2.30)$$

2.4. Розрахунок напружень у півплощині з отворами під час дії плоско-го штамп

Розглянемо півплощину $y < 0$ з отворами, в яку, якщо $y = 0$, $-a < x < a$ втискається без тертя плоский штамп (рис.2.5). Прийнемо, що головний вектор і момент сил, які прикладені до штамп, дорівнюють P і $M = 0$ (тут P – сила, яка напрямлена в напрямку півплощини). Допоміжні потенціали $\Phi_D \ z_1$, $\Psi_D \ z_2$, які входять у інтегральні рівняння, знаходимо за формулами (2.1), де функцію $F \ z$ визначають за формулою (2.5). Розрахунки виконано для склопластику, механічні характеристики [163] якого наведено в таблиці 1.1. Розглянуто випадок, коли півплощина послаблена круговим отвором (рис. 2.5).

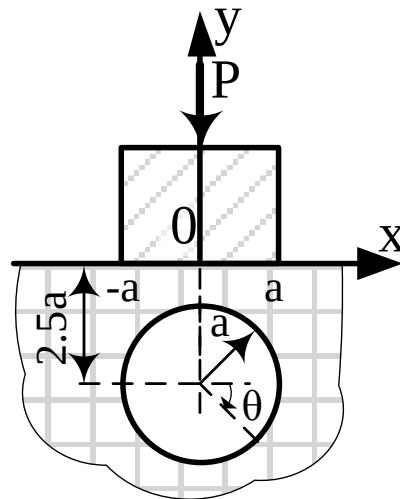


Рис. 2.5. Схема задачі

На рис. 2.6а наведено результати розрахунків відносних колових напружень на межі отвору $\sigma = \sigma_\theta / P_0$ ($P_0 = P/a$) залежно від кутової координати, яку відлічуємо від самої правої точки отвору за годинниковою стрілкою. Кривим 1 і 2 відповідають скло-епоксид і бор-епоксид відповідно, коли жорсткість ма-

теріалу є максимальною в вертикальному напрямку ($E_y > E_x$), а кривим 1' і 2' – жорсткість матеріалу максимальна в горизонтальному напрямку ($E_x > E_y$).

Відносний контактний тиск під штампом p/p_0 ($p_0 = P/\pi a$) наведено на рис. 2.6b. Тут додатково наведено відносний контактний тиск для випадку суцільної півплощини – крива 0.

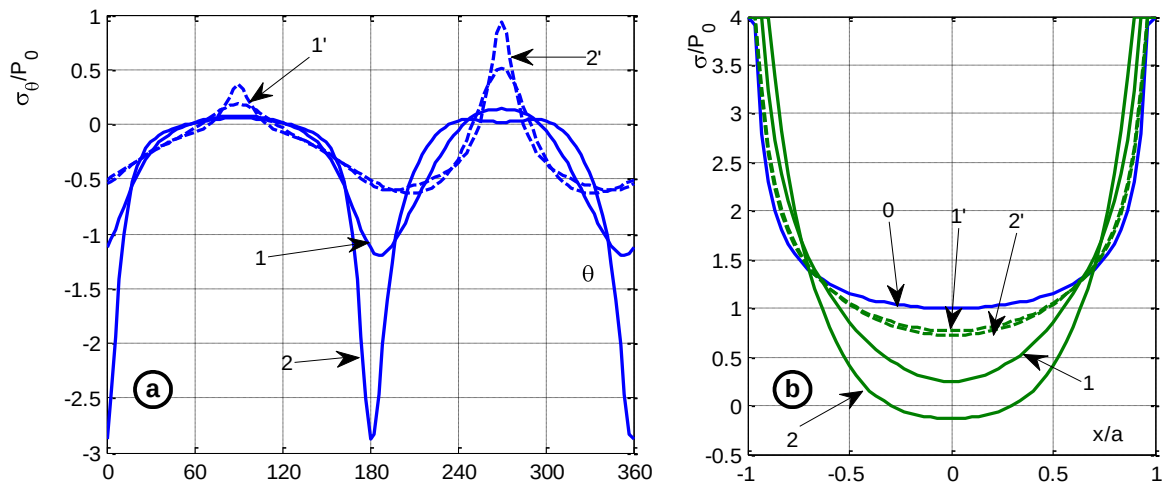


Рис. 2.6. Відносні напруження на межі центрального кругового отвору (а) та контактний тиск (b)

Із рисунків видно, що найбільші напруження на межі отвору виникають в істотно анізотропній бор-епоксидній півплощині при $E_y > E_x$ (тут і далі E_x і E_y – модулі пружності в напрямку осей Ox і Oy відповідно), причому вони є стискувальні. Максимальні напруження розтягу виникають також у тій же півплощині за $E_x > E_y$. Наявність отвору зменшує контактні напруження в центральній частині штампа, причому для вертикально армованої бор-епоксидної півплощини тут контактні напруження виявились найменшими. При цьому розрахований контактний тиск виявився від'ємним, що вказує на відлипання в центрі штампа від основи. Однак, оскільки напруження є малими за величиною, то отриманий у цьому випадку розв'язок може бути достатньо точним для практичних застосувань.

Аналогічні результати для випадку, коли отвір зсунутий і його центр розміщено в точці $0.5a, -2.5a$ наведено на рис. 2.7.

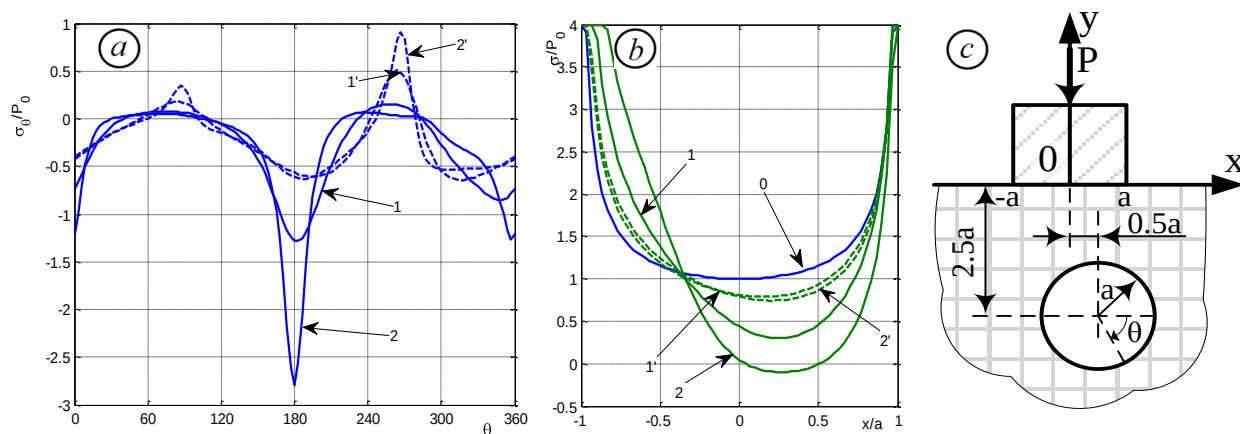


Рис. 2.7. Відносні напруження на межі кругового отвору (а), контактний тиск (b) та схема задачі (с)

Для центрального отвору квадратної форми з півстороною a та закругленими вершинами (рис. 2.8а) знайдено напруження на межі отвору (рис. 2.8b) та контактний тиск (рис. 2.8с).

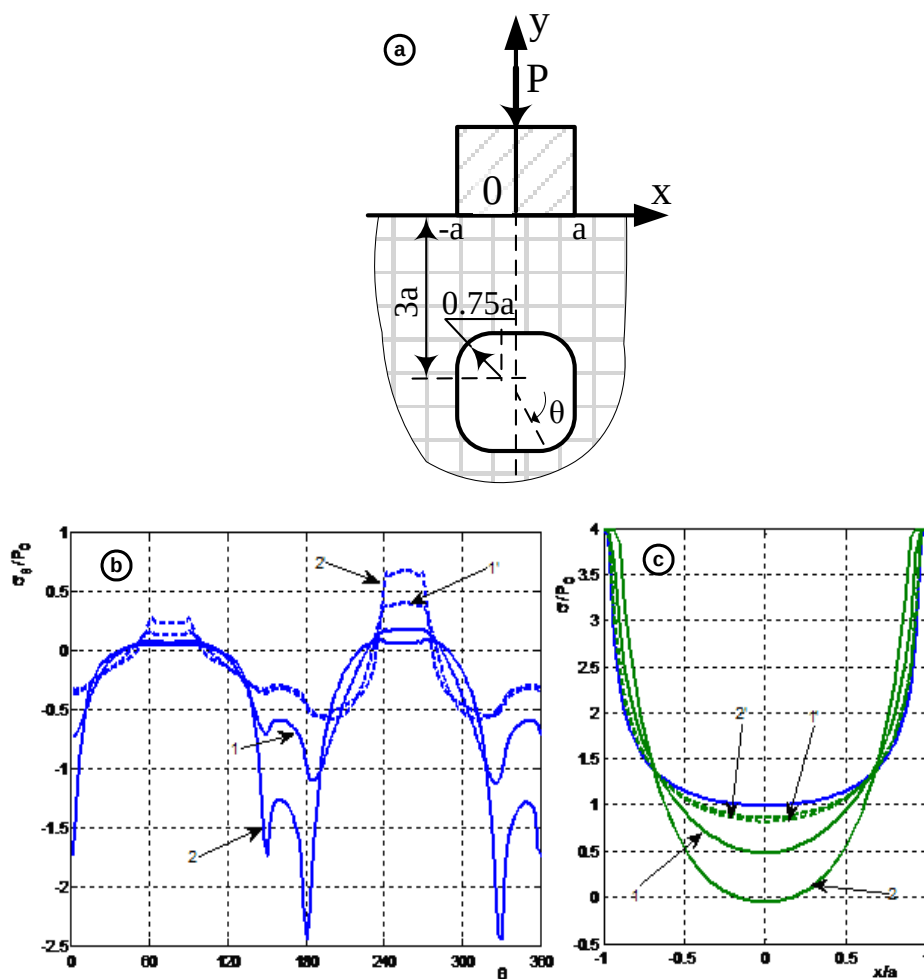


Рис. 2.8. Схема задачі (а), відносні напруження на межі отвору (b) та контактний тиск (с) для скло-епоксидної (криві 1) та бор-епоксидної (криві 2) півплощин

Розрахунки виконано для ізотропного матеріалу та склопластиків *EF32*, *ETF*, *CF2*, механічні характеристики яких наведено в таблиці 1.1.

Розглянемо випадок, коли півплощина послаблена двома круговими отворами радіуса $r = 0.2a$ з центрами в точках із координатами $\pm a, -1.5r$ (рис. 2.9).

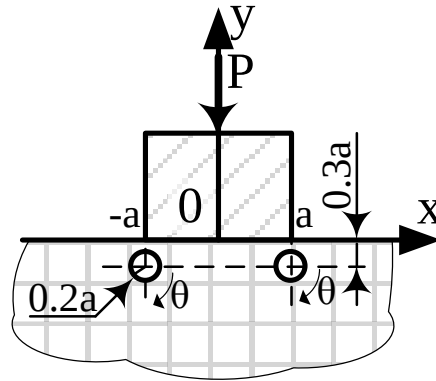


Рис. 2.9. Схема задачі

На рис. 2.10 наведено результати розрахунків відносних колових напружень $\sigma = a\sigma_\theta/P$ на межі лівого отвору залежно від кутової координати, яку відраховуємо від самої правої точки отвору за годинниковою стрілкою. Кривій 1 відповідає ізотропний матеріал, 2 – матеріал *EF*, 3 – матеріал *ETF*.

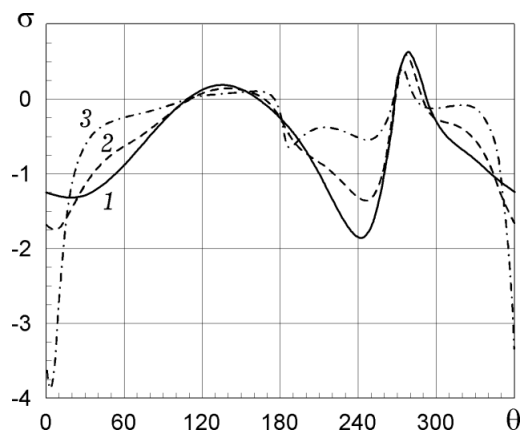


Рис. 2.10. Відносні напруження на межі лівого отвору

Із рис. 2.10 видно, що на межі отворів, розміщених біля кінців штампа, виникають значні стискальні напруження, які виявились найбільшими для матеріалу *ETF*. На отворах виникають також розтягувальні напруження, які є значно меншими за величиною.

Досліджували напруження на межі отворів залежно від їх розміщення відносно штампа. Для цього розглядали випадок, коли центри отворів розміщено

в точках із координатами $\pm ka, -1.5r$, якщо $k = 0.8, 0.9, \dots, 1.2$. Розраховані відносні напруження на межі лівого отвору для ізотропного матеріалу наведено на рис. 2.11, де біля кривих вказано значення k .

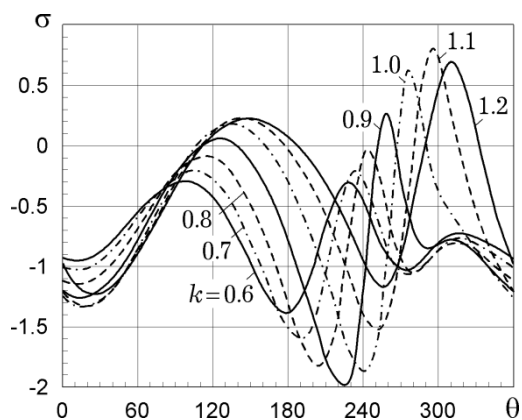


Рис. 2.11. Відносні напруження на межі лівого отвору для ізотропного матеріалу

Аналогічні результати для матеріалів EF , ETF зображено на рис. 2.12 і рис. 2.13.

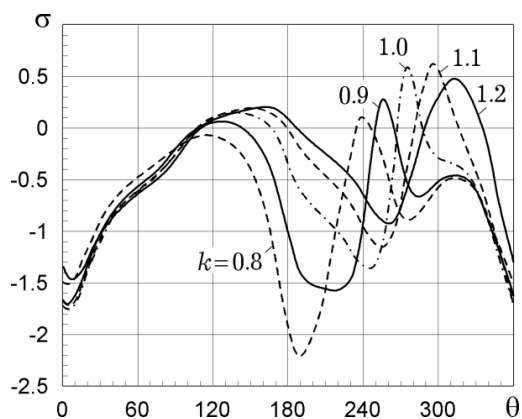


Рис. 2.12. Відносні напруження на межі лівого отвору, матеріал – EF

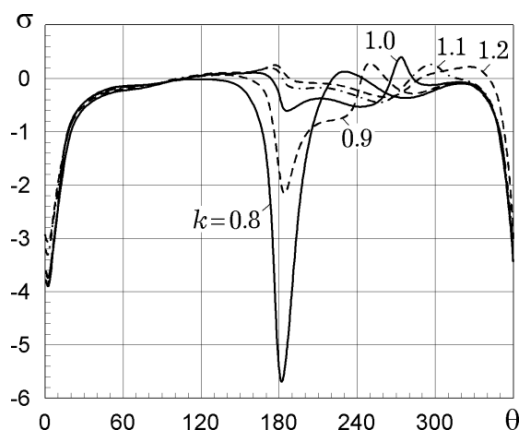


Рис. 2.13. Відносні напруження на межі лівого отвору, матеріал – ETF

Отже, анізотропія істотно впливає на розподіл напружень біля отворів. Найбільші стискальні напруження виявились біля кругових отворів малих розмірів, розміщених біля кінців штампів й дещо зміщених до його центра. Найвідчутніше анізотропія вплинула на напруження для півплощини з матеріалу *ETF*. Розтягальні напруження на межі отворів виявились значно меншими, ніж стискальні.

2.5. Напруження в півплощині з отворами за дії параболічного штампів

2.5.1. Постановка задачі та приклади реалізації методики її вирішення

Розглянута задача визначення напружень у півплощині з одним отвором із центром у точці x_c, y_c , яка перебуває під дією параболічного штампів з радіусом закруглення у вершині R . Прийmemo, що до штампів прикладені вертикальна сила P та момент M (рис. 2.14).

Для визначення напружень виходимо з інтегрального зображення (2.21), у якому:

$$\Phi_D z = -\frac{s_2}{s_1 - s_2} F_D z, \quad \Psi_D z = \frac{s_1}{s_1 - s_2} F_D z,$$

$$F_D z = -\frac{1}{2i\mu R} \left(z + \varepsilon R - \frac{z^2 + -x_0 + \varepsilon R \quad z - x_0 \varepsilon R - l^2/2 + P\mu R/\pi}{X \quad z} \right), \quad x_0 = \frac{c + d}{2},$$

де $\varepsilon = \frac{2\mu}{\pi l^2} (M - x_c P_y - \frac{x_c}{R})$, c і d – межі області контакту.

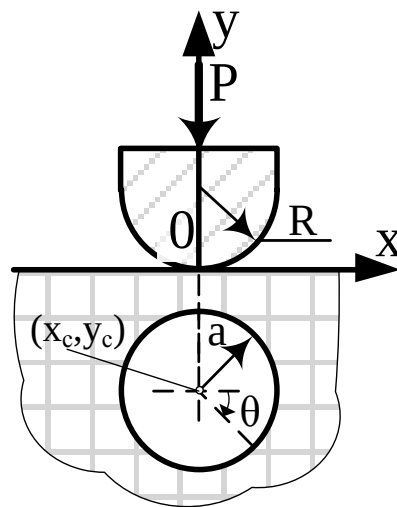


Рис. 2.14. Схема задачі

Для розв'язування цієї задачі додатково необхідно визначити межі області контакту c і d , які є наперед невідомими. Їх знаходили з умови, що напруження, які відповідають потенціалам (2.21), є обмеженими. Тобто, для визначення цих величин маємо умови:

$$\sigma_y c = \sigma_y d = 0.$$

Для їх знаходження вводили величину

$$Q_{c,d} = [S_y c]^2 + [S_y d]^2,$$

де

$$S_y a = 2 \operatorname{Re} [\Phi a - i s_1 \varepsilon + \Psi a - i s_1 \varepsilon],$$

Φ , Ψ – потенціали (2.21), ε – мале число.

При числовому розв'язуванні задачі потенціали (2.21) замінялись наведеними вище квадратурними формулами. Сталі c і d визначались із умови мінімуму величини $Q_{c,d}$ при додаткових умовах (рівняннях) (2.23). Тобто, прийшли до відомої задачі на умовний екстремум, яка добре вивчена в розділі математики – методи оптимізації. Для таких задач у комп'ютерних математичних пакетах розроблено стандартні програми, які апробовані й дозволяють проводити при відповідній адаптації розрахунки з заданою точністю. При цьому задавалось початкове наближення, за яке приймали межі для області контакту для суцільної півплощини:

$$c = x_c - l, \quad d = x_c + l, \quad l = \sqrt{\frac{2|P|\mu R}{\pi}}, \quad x_c = \frac{M}{P_y}, \quad \varepsilon R = -\frac{M}{P_y}.$$

Розглянуто круговий отвір радіуса a при $x_c = 0$, $y_c = -1.5a$, $R/a = 1$ (постановку задачі схематично наведено на рис. 2.15а). Прийmemo, що заданий головний вектор і момент сил, які прикладені до штампа, дорівнюють P і $M = 0$.

Розрахунки виконано за різних значень навантажень та радіусів основи штампа. Кривій 1 відповідає навантаження, при якому $p_0 = 200$ МПа, кривій 2 – $p_0 = 300$ МПа, а кривій 3 – $p_0 = 400$ МПа. Штриховими лініями наведені контактний тиск під штампом (на рис. 2.15с ці криві збігаються із суцільними, тобто, в даному випадку отвір практично не впливає на контактні напруження при різних рівнях навантаження).

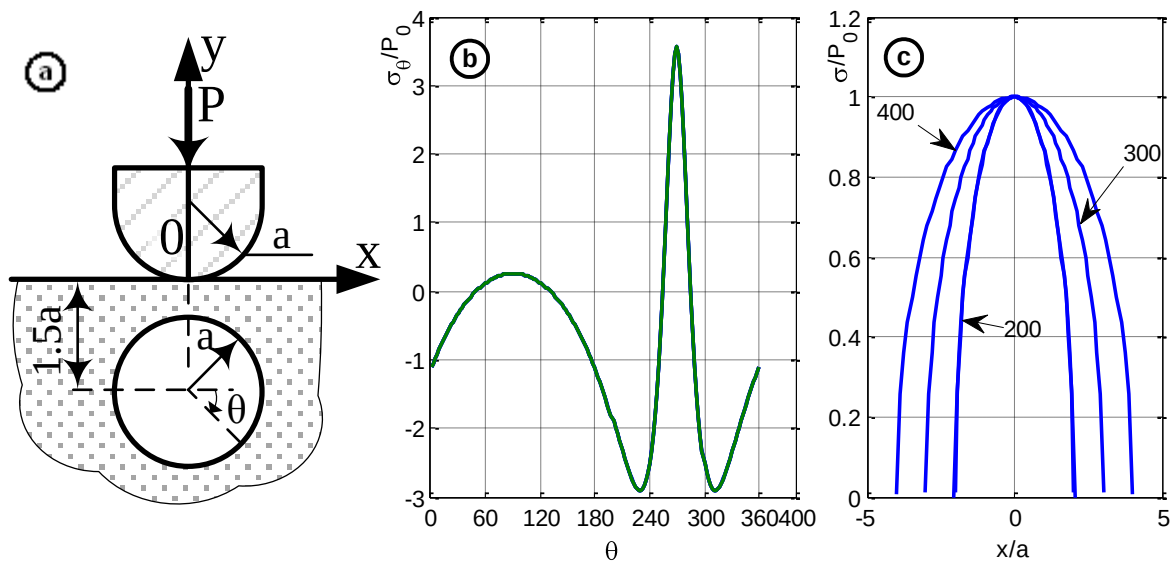


Рис. 2.15. Схема задачі (а), напруження на межі отвору (b) та під штампом (с) для ізотропного матеріалу

На рис. 2.15с суцільними лініями наведено розрахований контактний тиск σ , який віднесений до величини p_0 . Тут і далі p_0 – максимальний тиск під штампом у суцільній півплощині при заданому навантаженні P , причому ці величини пов’язані співвідношенням

$$P = \frac{\pi p_0^2 \lambda_2 R}{2}.$$

На рис. 2.15b наведено віднесені до величини $P_0 = |P|/a$ кільцеві напруження σ_θ залежно від кутової координати θ , яку відлічуємо від самої правої точки межі отвору за годинниковою стрілкою. Для всіх розглянутих навантажень відносні кільцеві напруження виявились однаковими (криві налягають).

Розглянуто композитний матеріал графіт-епоксид, для якого пружні сталі наведено в таблиці 2.1 [154].

Таблиця 2.1

Пружні сталі

	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{66}
<i>Графіт-епоксид</i>	14.92	6.92	6.44	160.7	7.07
<i>Скло-епоксид</i>	14.93	6.567	5.244	47.27	4.745

Отримані результати розрахунків для випадку плоскої деформації наведено графічно на рис. 2.16.

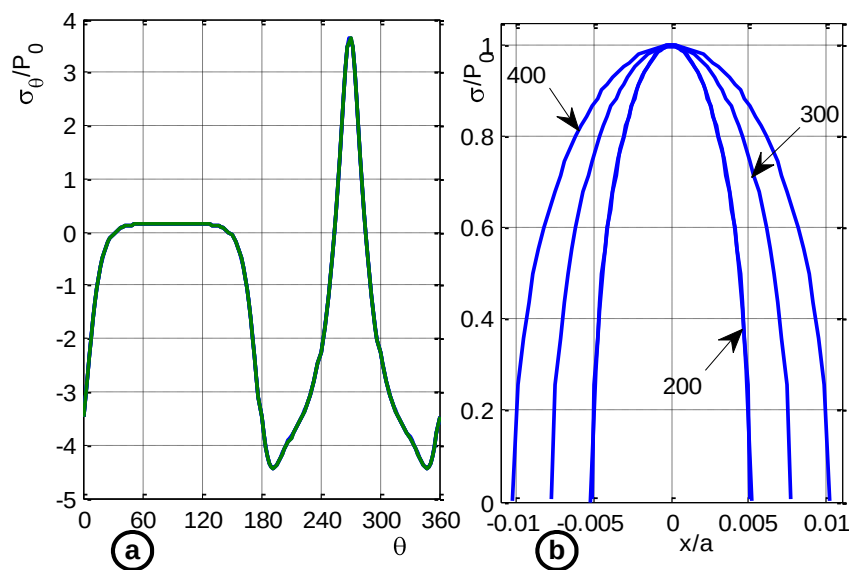


Рис. 2.16. Напруження на межі отвору (a) і під штампом (b) для матеріалу графіт-епоксид, плоска деформація

На рис. 2.17 для порівняння наведено результати розрахунків для цього ж матеріалу для випадку плоскої деформації (суцільні криві) та плоского напруженого стану (ПНС – штрихові лінії), коли $p_0 = 200$ МПа і $p_0 = 400$ МПа (значення p_0 вказано біля кривих на рис. 2.17b). Розраховані відносні напруження на межі отворів для двох розглянутих навантажень майже не відрізняються між собою.

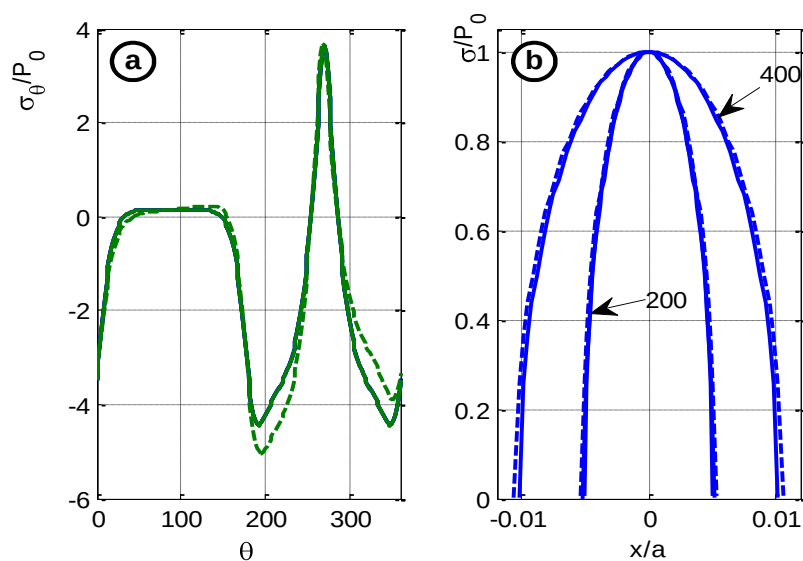


Рис. 2.17. Напруження на межі отвору (a) і під штампом (b) для матеріалу графіт-епоксид, плоска деформація – суцільні криві, ПНС – штрихові лінії

Розглянуто квадратний отвір із стороною a , вершини якого закруглені дугами кола радіуса $0.5a$ (рис. 2.18). Віднесені до P_0 напруження на межі отвору при $p_0 = 200$ МПа наведено рис. 2.18а. Тут p_0 – максимальний тиск під штампом, який виникає у півплощині без отвору (при цьому $P = 0.5\pi p_0^2 \mu R$, де μ визначається через пружні сталі матеріалу). На рис. 2.18а вказано точки А і В з межі отвору, зображеного на рис. 2.18с. Кривим 1 відповідає випадок ізотропного матеріалу, кривим 2 – матеріал бор-епоксид, коли $E_y > E_x$. Кривими 2_x зображено аналогічні результати для цього ж матеріалу при $E_y < E_x$. Віднесений до величини p_0 тиск під штампом наведено на рис. 2.18b.

Встановлено, що за малих радіусів закруглення основи штампа (при $R/a < 1$) отвір практично не впливає на контактні напруження. Тобто, контактні напруження під штампом для ізотропного й композитних матеріалів для випадків плоскої деформації і ПНС можуть бути розраховані на основі точного розв'язку для суцільної півплощини. Введені відносні напруження на межі отвору також не залежать від прикладеного навантаження. З рис. 2.17 видно, що контактні напруження під штампом у випадку плоскої деформації та ПНС також виявились близькими за величиною, як і розподіл відносних напружень на межі отвору. Тому далі розрахунки виконано для випадку ПНС, оскільки для нього в літературі наведено пружні сталі для великої кількості композитних матеріалів.

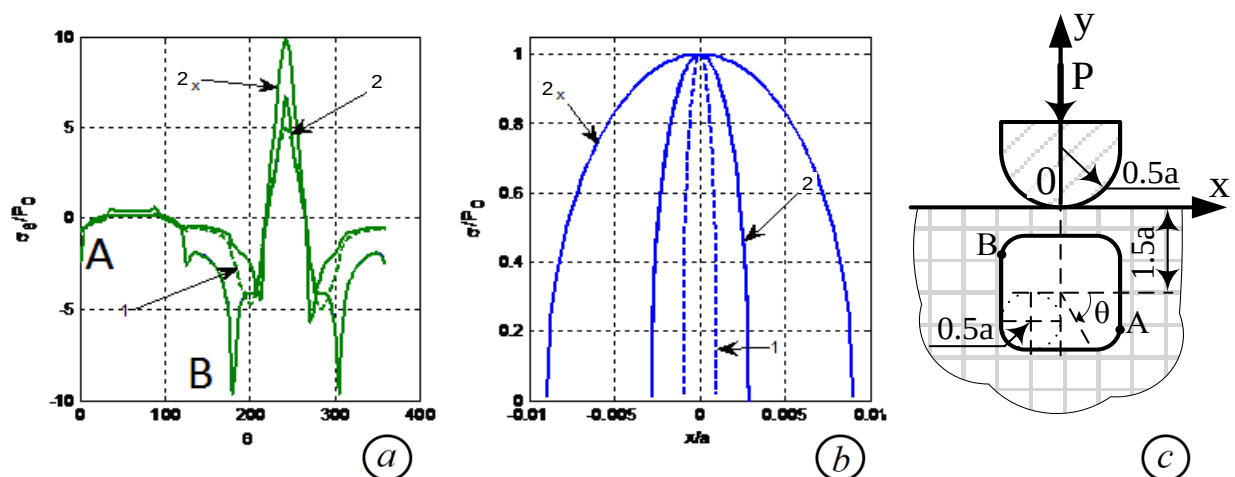


Рис. 2.18. Напруження на межі квадратного отвору з заокругленими кутами (а), контактний тиск під штампом (b) та схема задачі (с)

Із рис. 2.18 можна зробити висновок, що форма отвору істотно змінила характер розподілу напружень на межі отвору. Зокрема, максимальні розтягувальні напруження виявились для композитного матеріалу з максимальною жорсткістю у горизонтальному напрямку.

У всіх розглянутих випадках область контакту виявилась малою та отвір мало впливав на контактні напруження під штампом. В зв'язку з цим для розрахунку напружень біля отвору можуть бути використані простіші методи розрахунку. З цією метою розглянуто два наступних підходи.

У першому визначався контактний тиск у суцільній півплощині $p \times$. Приймалось, що до межі півплощини з отвором при $c < x < d$ прикладено навантаження: $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_y = -p \times$. Далі розв'язувалась ця, більш проста задача, методом інтегральних рівнянь, знаходились напруження на межі отвору $\sigma_\theta^{(1)}$ та визначалась відносна похибка $\delta_1 = 100 \frac{\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_\theta}{\sigma_\theta}$, де σ_θ – напруження на межі отвору, які знайдені за строгим підходом.

У другому підході покладалось, що до межі півплощини в т. $\left(\frac{c+d}{2}, 0\right)$ прикладена вертикально сила P . Далі розв'язувалась ця задача методом інтегральних рівнянь, знаходились напруження на межі отвору $\sigma_\theta^{(2)}$ та визначалась відносна похибка $\delta_2 = 100 \frac{\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_\theta}{\sigma_\theta}$. На рис. 2.19 наведено графіки відносних похибок на контурі квадратного отвору (див. рис. 2.18).

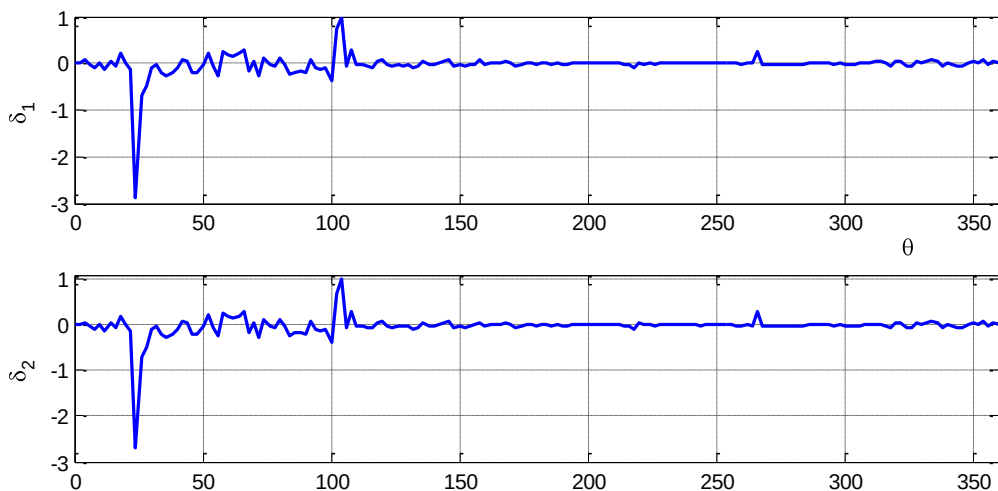


Рис. 2.19. Відносні похибки для знайдених напружень наближеними підходами

З наведених даних видно, що обидва підходи дозволяють визначати напруження на межі отвору з високою точністю (максимальна відносна похибка не перевищує 3%, причому вона виникає в областях, де напруження є малими за величиною).

Проведено розрахунки для більших радіусів основи штампа. На рис. 2.20 наведено результати розрахунків для різних матеріалів при $R/a = 100$, $p_0 = 400$ МПа за умови, що має місце ПНС. Кривим 1 відповідає випадок ізотропного матеріалу, кривим – 2 матеріал бор-епоксид. Кривими 2_x зображено аналогічні результати для цього ж матеріалу, в якого максимальною є жорсткість у напрямку вісі Ox . Суцільними лініями на рисунку справа для порівняння зображено розподіл тиску в півплощині з отвором, а штриховими – у суцільній півплощині.

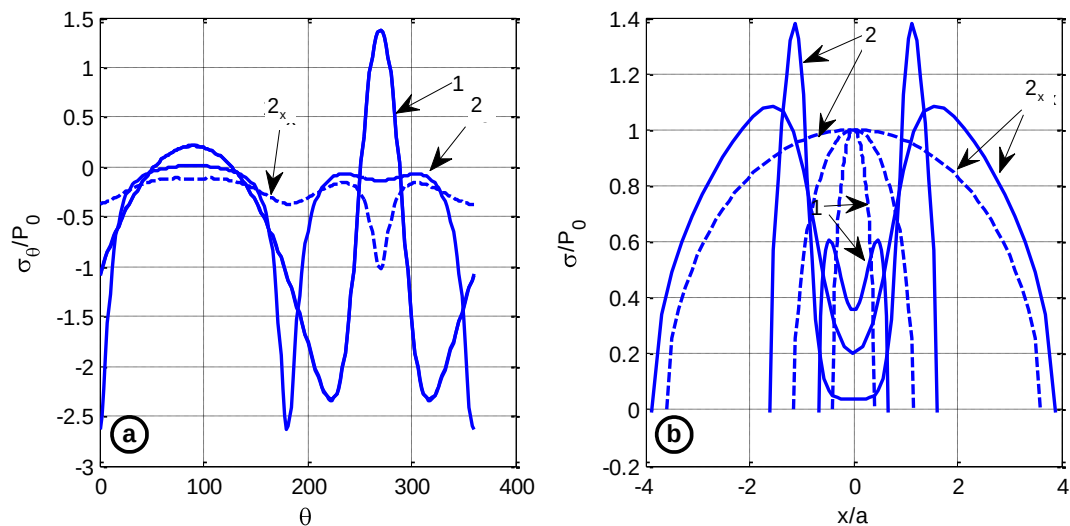


Рис. 2.20. Напруження на межі отвору (а) і під штампом (б) для ізотропного матеріалу і композиту бор-епоксид

Аналогічні результати розрахунків для випадку, коли центр кругового отвору зміщений наведено на рис. 2.21.

Із рис. 2.20-2.21 видно, що за великих радіусів закруглення основи штампа розподіл контактних напружень у півплощині з отвором має складний характер і істотно відрізняється від напружень у суцільній півплощині. Максимальні контактні напруження досягаються на деякій відстані від центру області, причому вони найбільші для композитного матеріалу при $E_y > E_x$. Характер розподілу

напружень на межі отвору має складний характер і його дослідження необхідно проводити для конкретних випадків. Зокрема, у разі симетричного розміщення отвору відносно штампа: максимальні стискувальні напруження виникають для композитного матеріалу при $E_y > E_x$; у випадку, коли $E_x > E_y$, напруження виявились найменшими; максимальні розтягувальні напруження виникають для ізотропного матеріалу, а для композитних матеріалів ці напруження значно менші за величиною. При несиметричному розміщенні отвору розподіл напружень на межі отвору має аналогічний характер. Контактні напруження виявились максимальними лівіше від центру області контакту.

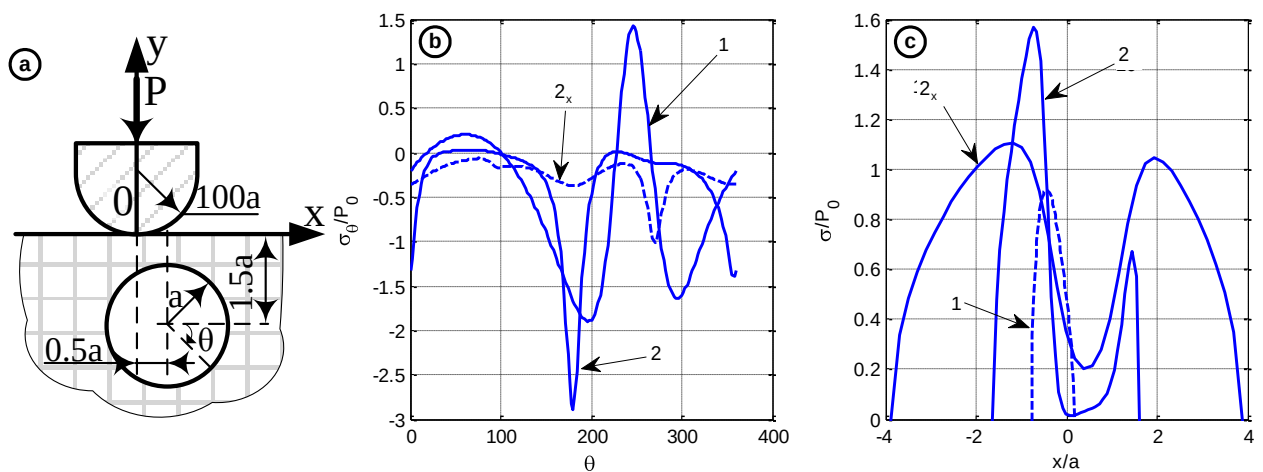


Рис. 2.21. Схема задачі (а), напруження на межі отвору (b) і під штампом (с)

2.5.2. Перевірка достовірності запропонованої методики

Проведено дослідження достовірності результатів, які отримано на основі розробленого алгоритму, що базується на інтегральних рівняннях зі строгим задоволенням умов контакту під штампом. З цією метою розглянуто ізотропну півплощину, послаблену круговим отвором радіуса r , з центром в т. $0.5r, -0.5r$, радіус закруглення штампа $R = 50r$, $p_0 = 2000$ МПа (тут вибрано велике значення p_0 з метою тестування алгоритму) (рис. 2.22a). Розраховані за розробленим алгоритмом відносні напруження на межі отвору наведено на рис. 2.23a суцільними лініями, а відносний контактний тиск під штампом – на рис. 2.23b, кривою 1 (кривою 0 зображено контактний тиск у суцільній півплощині). Далі розглянуто півплощину з отвором (без дії штампа) (рис. 2.22b) до межі якої в

знайденій області контакту c, d в точках $x_j = c + jh$, $j = \overline{0, 40}$ прикладено зосереджені сили $Y_j = hp$, де p – знайдений контактний тиск, $h = (d - c) / 40$.

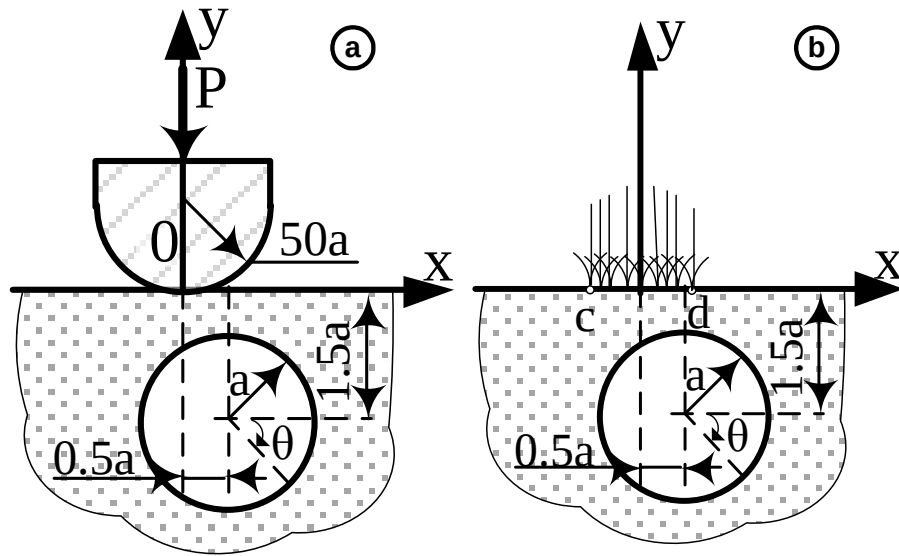


Рис. 2.22. Схема задачі

Для розв'язування задачі використаємо модифіковані інтегральні рівняння (2.21), у яких допоміжні потенціали Φ_j^D , Ψ_j^D визначаються із розгляду півплощини із вільною від навантаження межею – формули (2.25)–(2.26).

Для знаходження потенціалів Φ_D , Ψ_D , які визначають прикладене навантаження до півплощини, і входять у зображення (2.21), розглянемо півплощину $y < 0$, на межі якої в точках x_k прикладено зосереджені сили X_k, Y_k , $k = \overline{0, M}$. Тоді на основі [12] для цього випадку потенціали Лехніцького будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_p(z_1) &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{s_1 - s_2} \sum_{k=1}^M \frac{X_k + s_2 Y_k}{z_1 - x_k}, \\ \Psi_p(z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{s_1 - s_2} \sum_{k=1}^M \frac{X_k + s_1 Y_k}{z_2 - x_k}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Тоді для розглянутого випадку $\Phi_D = \Phi_p$, $\Psi_D = \Psi_p$ при $X_k = 0$, $M = 40$.

Розраховані відносні напруження на межі отвору зображено крапками на рис. 2.23а.

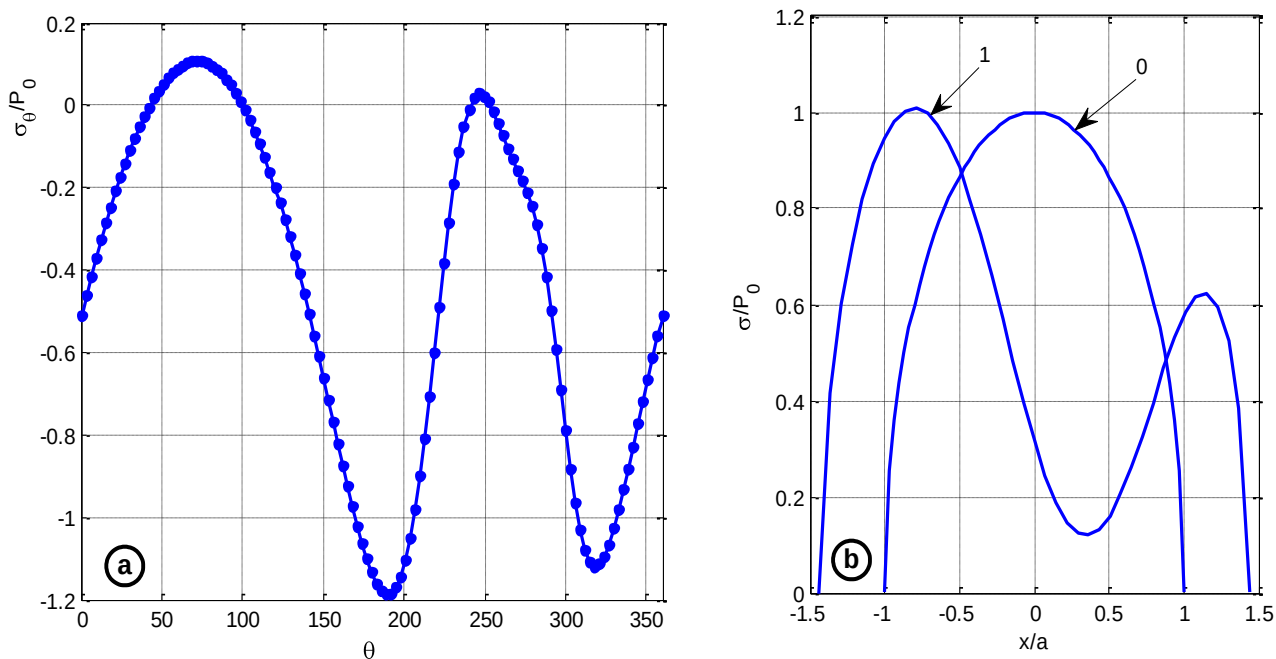


Рис. 2.23. Напруження на межі отвору (а) і контактний тиск (б) для ізотропної півплощини

Аналогічні результати для бор-епоксиду зображено на рис. 2.24.

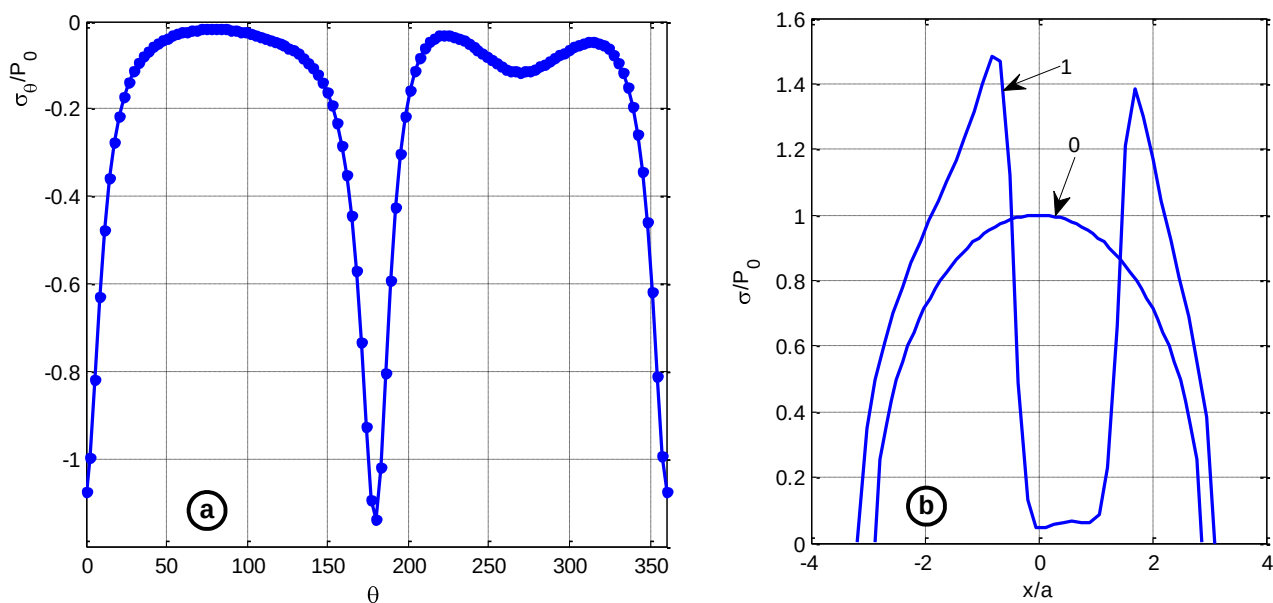


Рис. 2.24. Напруження на межі отвору (а) і контактний тиск (б) для бор-епоксидної півплощини

Із наведених рисунків видно, що знайдені різними підходами (на основі різних інтегральних рівнянь) напруження на межі отвору є практично однаковими, що вказує на достовірність отриманих вище результатів.

2.6. Напруження біля тріщин у анізотропній півплощині за дії плоского штампа

У пружному тілі в околі штампа виникають стискувальні напруження і тоді береги тріщин, що розміщені біля штампа, контактують. Тому контактні задачі для тіл з тріщинами є достатньо складними в математичному відношенні. У літературі для спрощення таких задач, які в основному розглядались для ізотропних матеріалів, найчастіше наближено приймають, що контактні напруження під штампом описуються за розподілом Герца [36, 38]. У строгій постановці контактна задача для плоского гладкого штампа для ізотропних пластинок розглядалась у [38, 93]. Контактна задача для ізотропної півплощини для штампа криволінійної форми без урахування контакту берегів тріщин розглянута у [104]. Широкий огляд виконаних досліджень для контактних задач стосовно до ізотропних матеріалів наведено в [38].

Проведемо розв'язування цієї задачі для анізотропних матеріалів на основі модифікованих інтегральних рівнянь, за яких умови на прямолінійній межі півплощини, в тому числі під штампом, задовольняються тотожно. Аналогічний шлях на основі методу рядів використовувався для дослідження плоских контактних задач теорії пружності для деяких форм ізотропних і анізотропних пластинок з отворами [50]. Запропонований підхід дозволяє істотно спростити алгоритм розв'язування контактної задачі, оскільки інтегральні рівняння при цьому записуються тільки на кривих, на яких розміщені тріщини. Крім цього в такому підході можуть бути безпосередньо використані методи розрахунку контактних напружень на берегах тріщин, які запропоновані в [78].

2.6.1. Постановка задачі

Розглянемо анізотропну півплощину $y < 0$, послаблену тріщинами, які лежать на кривих L_j , $j = \overline{1, J}$. Прийmemo: півплощина вздовж межі $y = 0$ при $a < x < b$ (область L_u) взаємодіє зі штампом, основа якого $y = f(x)$ та межа поза штампом (область L_σ) вільна від навантаження; дотичні напруження під штампом відсутні; відомі головний вектор P та момент сил M , прикладених

до штампа (рис. 2.25); береги тріщин контактують без тертя; прикладені до протилежних берегів тріщин зусилля поза ділянками контакту є однаковими й дорівнюють P_x^T, P_y^T на лівому березі відносно вибраного обходу.

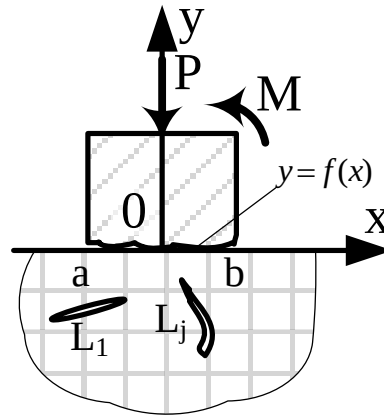


Рис. 2.25. Схема задачі

2.6.2. Інтегральні рівняння задачі відносно стрибків переміщень

Для побудови загального розв'язку задачі спочатку розглянемо нескінченну область, що містить тріщини, береги яких не контактують. На основі [12] та теореми Коші для аналітичних функцій стосовно цього випадку для потенціалів Лехніцького маємо інтегральні зображення вигляду [12, 38]

$$\begin{aligned}\Phi_{z_1} &= \int_L [g'_1 \Phi_{1, z_1, t_1} + g'_2 \Phi_{2, z_1, t_1}] ds + \Phi_s z_1, \\ \Psi_{z_2} &= \int_L [g'_1 \Psi_{1, z_2, t_2} + g'_2 \Psi_{2, z_2, t_2}] ds + \Psi_s z_2,\end{aligned}\quad (2.32)$$

де $L = L_1 + \dots + L_J$, $\Phi_j z_1, t_1 = \frac{A_j}{t_1 - z_1}$, $\Psi_j z_2, t_2 = \frac{B_j}{t_2 - z_2}$, $g'_j = dg_j/ds$, $j = \overline{1, 2}$,

$g_1 = u^+ - u^-$, $g_2 = v^+ - v^-$; $u^\pm$, $v^\pm$ – граничні значення переміщень при підході до розрізу зліва і справа відносно вибраного напрямку, S – дугова координата. Зазначимо, що функції g_1 , g_2 – стрибки переміщень на берегах тріщини, які приймаються нульовими у її вершинах.

Тут $t_j = \zeta + s_j \eta$, $\zeta, \eta \in L$ – точка, за якою проводиться інтегрування, ds – диференціал дуги на кривій L , $\Phi_s z_1$, $\Psi_s z_2$ – потенціали для суцільної пластинки, які відповідають прикладеним на нескінченності зусиллям та внутрішнім зосередженим силам.

2.6.3. Модифіковане інтегральне зображення

Розглянемо випадок, коли пружна анізотропна пластинка займає задану область D із вільною від навантаження межею або однорідними умовами (наприклад, на частині межі задані нульові переміщення, а решта межі – вільна від навантаження). Побудуємо інтегральні рівняння для такої пластинки з тріщинами таким чином, щоб умови на межі області D виконувались автоматично. З цією метою спочатку побудуємо комплексні потенціали Лехніцького Φ_j^D, Ψ_j^D ($j=\overline{1,2}$), які є розв'язком задачі теорії пружності для області D з вибраними однорідними умовами на межі за умови, що ці функції мають такі особливості:

$$\Phi_j^D \sim -\frac{A_j}{z_1 - z_{1,0}}, \quad \Psi_j^D \sim -\frac{B_j}{z_2 - z_{2,0}}, \quad (2.33)$$

де $z_{1,0} = x_0 + s_1 y_0$, $z_{2,0} = x_0 + s_2 y_0$, $x_0, y_0 \in D$.

Позначимо ці потенціали через $\Phi_j^D z_{1,T}$, $\Psi_j^D z_{2,T}$, де T – точка з координатами x_0, y_0 . Тоді загальний розв'язок задачі теорії пружності (потенціали Лехніцького) для області D з тріщинами набуде вигляду [12, 173]:

$$\begin{aligned} \Phi z_1 &= \int_L [\Phi_1^D z_{1,T} g'_1 s + \Phi_2^D z_{1,T} g'_2 s] ds + \Phi_D z_1, \\ \Psi z_2 &= \int_L [\Psi_1^D z_{2,T} g'_1 s + \Psi_2^D z_{2,T} g'_2 s] ds + \Psi_D z_2, \end{aligned} \quad (2.34)$$

де $\Phi_D z_1 = \Phi_D^P z_1 + \Phi_D^\infty z_1$, $\Psi_D z_2 = \Psi_D^P z_2 + \Psi_D^\infty z_2$, T – точка ξ, η , за якою проводиться інтегрування. Тут потенціали $\Phi_D^\infty, \Psi_D^\infty$ та Φ_D^P, Ψ_D^P – розв'язки задач теорії пружності для області D з однорідними граничними умовами за дії прикладених до пластинки на нескінченності зусиль (для обмежених пластинок ці потенціали дорівнюють нулеві) або зосереджених сил відповідно.

За побудовою, потенціали (2.34) тотожно задовільняють задані умови на межі області D за довільних функцій g'_1, g'_2 .

Підставивши співвідношення (2.34) у граничні умови, отримуємо інтегральні рівняння для знаходження $g'_1 s, g'_2 s$ для випадку тріщин, береги яких не контактують, у вигляді:

$$\int_L [g'_1 s Q_1 Z, T + g'_2 s Q_2 Z, T] ds = Q Z, \quad Z \in L, \quad (2.35)$$

де $Q Z = Q_T Z - Q_D Z$; $Q_j Z, T$ – вектор напружень q_L у точці Z з координатами x, y на кривій L , який визначається за формулою (2.34) через комплексні потенціали $\Phi_j^D z_1, T, \Psi_j^D z_2, T$, $j = \overline{1, 2}$; $Q_D Z$ – вектор напружень, що відповідає потенціалам $\Phi_D z_1, \Psi_D z_2$, $Q_T = X_T + iY_T$.

Наприклад,

$$Q_j Z, T = s_1 + i z'_1 \Phi_j^D z_1, T + \overline{s_1 + i z'_1 \Phi_j^D z_1, T} + \\ + s_2 + i z'_2 \Psi_j^D z_2, T + \overline{s_2 + i z'_2 \Psi_j^D z_2, T}, \quad j = \overline{1, 2}.$$

Інтегральні рівняння (2.35) розв'язано методом механічних квадратур [9, 12, 105]. Урахування контакту берегів проведено на основі розгляду відповідної задачі квадратичного програмування [78].

2.6.4. Результати розрахунків

Розглянемо півплощину $y < 0$, послаблену тріщиною, у яку при $-l < x < l$ втискається без тертя плоский штамп. Прийmemo, що головний вектор і момент сил, які прикладені до штампа рівні P і M .

Розглянемо детальніше випадок, коли тріщина прямолінійна, півдовжина її a , нахилена під кутом α до вісі Ox , координати центру $(x_c, -y_c)$. (рис. 2.26).

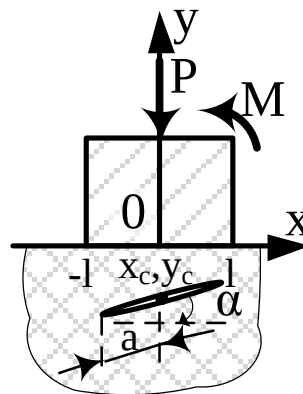


Рис. 2.26. Схема задачі

Під час знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) K_{II} враховуємо контакт берегів тріщин. Функції Φ_D і Ψ_D , які входять у зображення (2.34),

визначаються через наведені вище потенціали для контактної задачі, що отримані для суцільної півплощини, коли до штампа прикладена вертикальна сила P і момент M .

Горизонтальні тріщини. Розрахунки величини K_{II} виконані для випадку, коли тріщина горизонтальна і розміщена симетрично відносно центру штампа при $M = 0$, відносних значеннях довжин тріщин $a/l = 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$. Результати розрахунків відносної величини $F_{II} B / \max |F_{II} B|$ ($F_{II} B = K_{II} B \sqrt{l} / P \sqrt{\pi}$) залежно від відносних відстаней тріщин h/l ($h = -y_c$) для ізотропного матеріалу наведено на рис. 2.27, на якому біля кривих вказано значення a/l . Тут прийнято точкою B вважати праву вершину тріщини (відповідно ліву – позначають через точку A). Максимальні значення величини $F_{II} B$ при вибраних вище відносних значеннях довжин тріщин відповідно дорівнюють: 0.00049, 0.0014, 0.0055, 0.016, 0.03, 0.049.

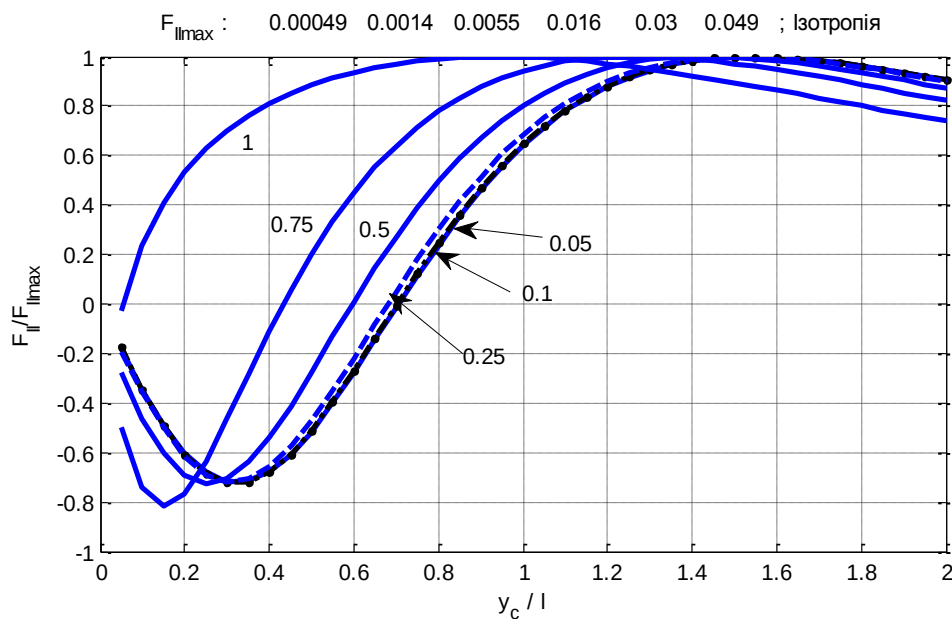


Рис. 2.27. Відносні КІН для горизонтальної тріщини в ізотропній пластинці

Розраховані для ізотропного матеріалу КІН при $a/l = 0.05, 0.25$ збігаються із відповідними даними роботи [38], які отримані іншим методом.

Аналогічні результати для матеріалу LU , коли напрямок із максимальною жорсткістю матеріалу паралельний до осі Oy або осі Ox наведено на рис. 2.28-

2.29. Тут і далі для випадків, коли напрямок з максимальною жорсткістю нахилений під деяким кутом до осі Oy , то біля назви матеріалу будемо вказувати цей кут нахилу у вигляді індексу.

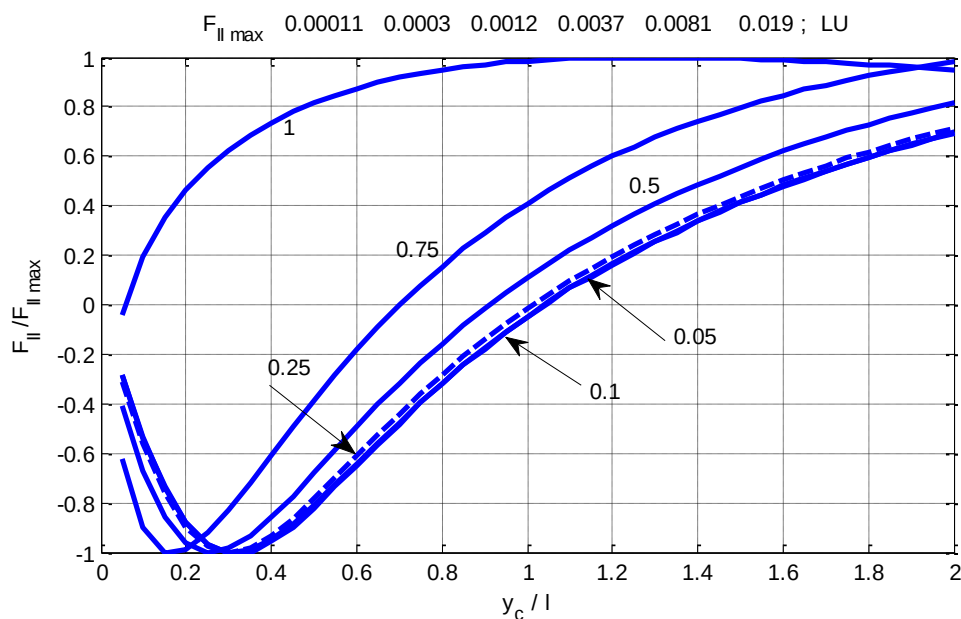


Рис. 2.28. Відносні КІН для горизонтальної тріщини в пластинці з матеріалу LU

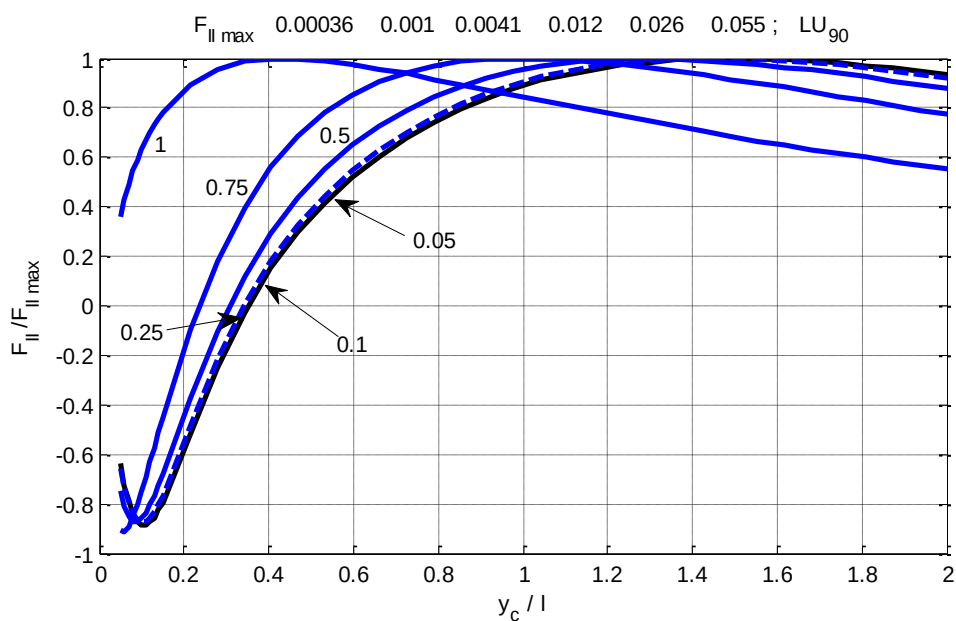


Рис. 2.29. Відносні КІН для горизонтальної тріщини в пластинці з матеріалу LU_{90}

На рис. 2.30-2.36 наведено результати розрахунків безпосередньо значень відносних КІН F_{II} для матеріалів EF та ETF , які мають незначну анізотропію властивостей та істотно анізотропних матеріалів $CF2$ та $CF1$.

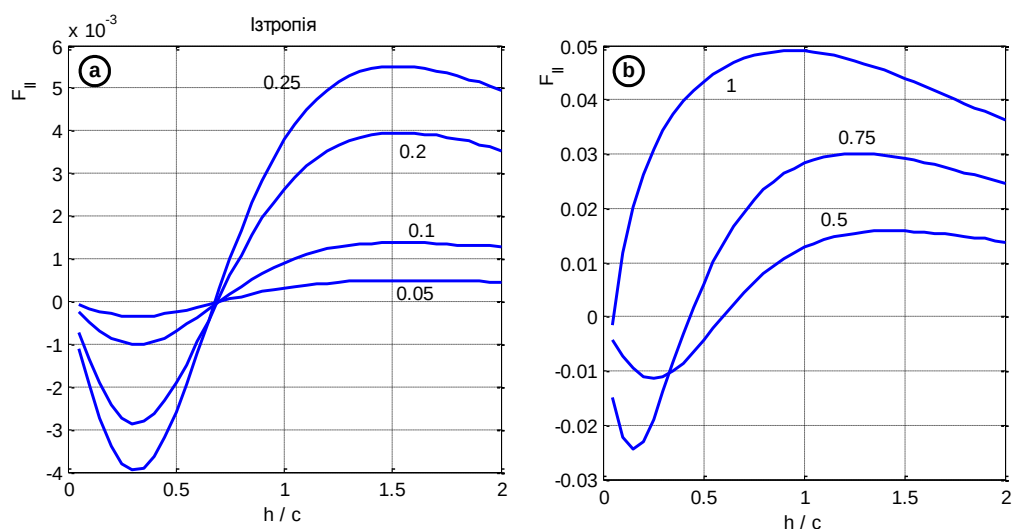


Рис. 2.30. Відносні КІН F_{II} для ізотропного матеріалу

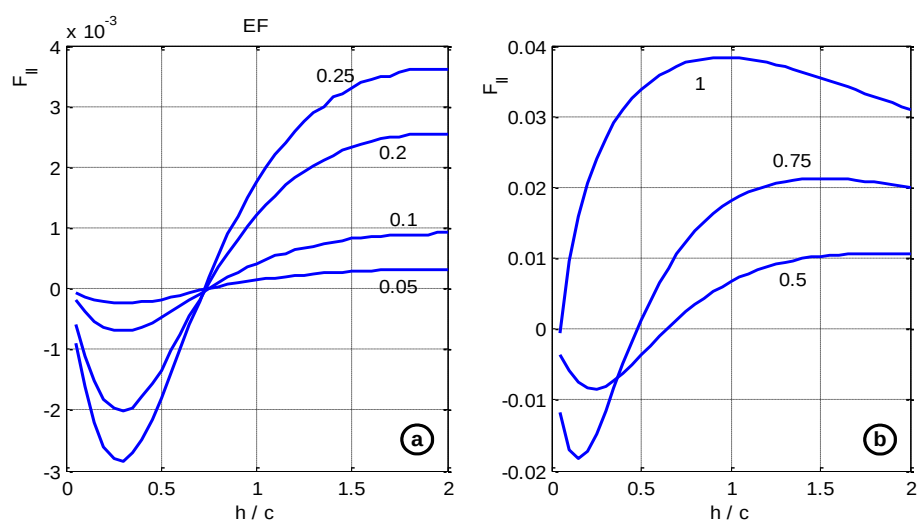


Рис. 2.31. Відносні КІН F_{II} для матеріалу EF

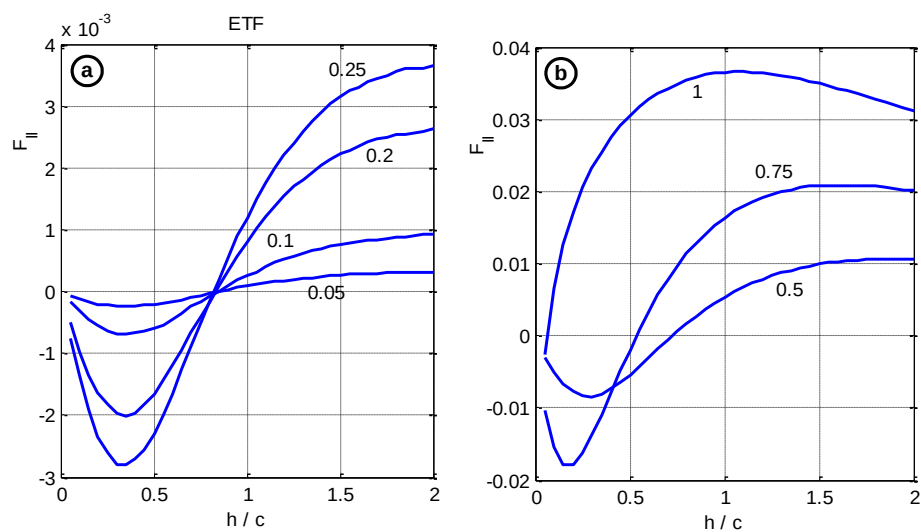


Рис. 2.32. Відносні КІН F_{II} для матеріалу ETF

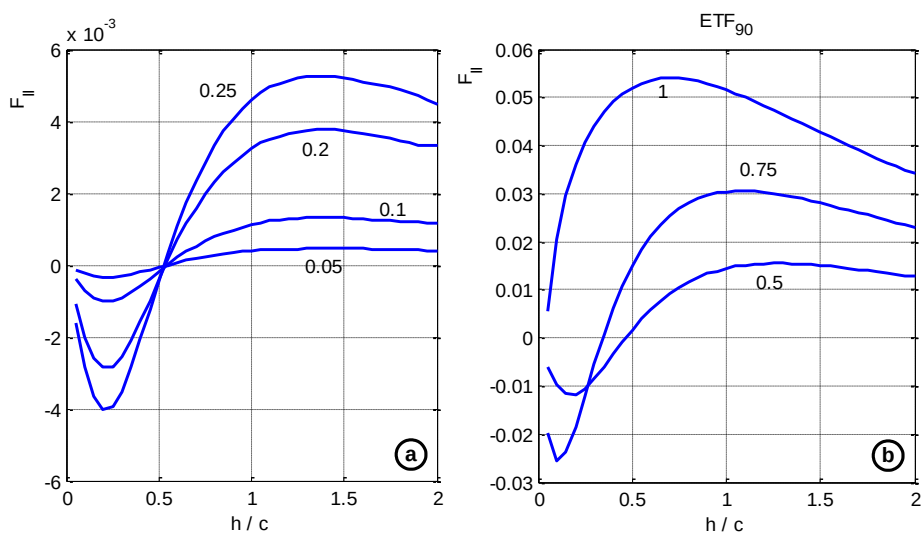


Рис. 2.33. Відносні КІН F_{II} для матеріалу ETF_{90}

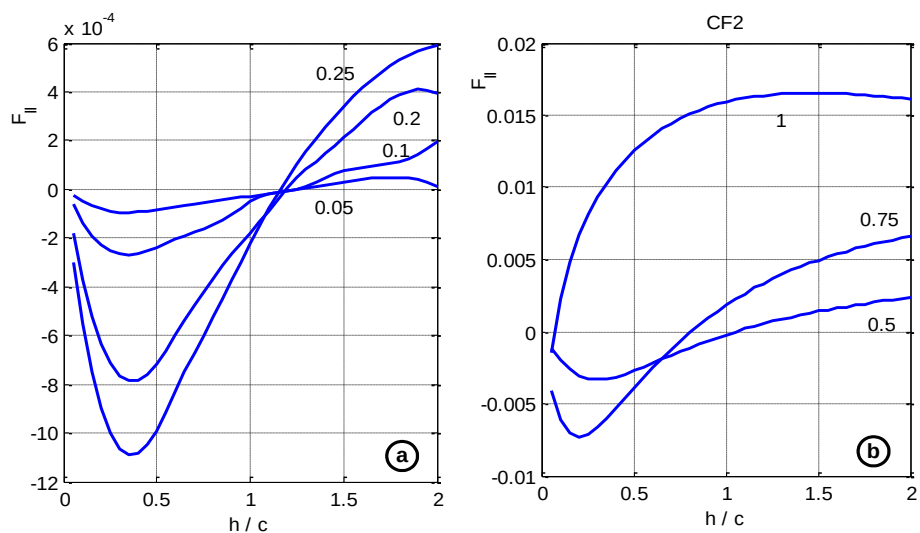


Рис. 2.34. Відносні КІН F_{II} для матеріалу CF_2

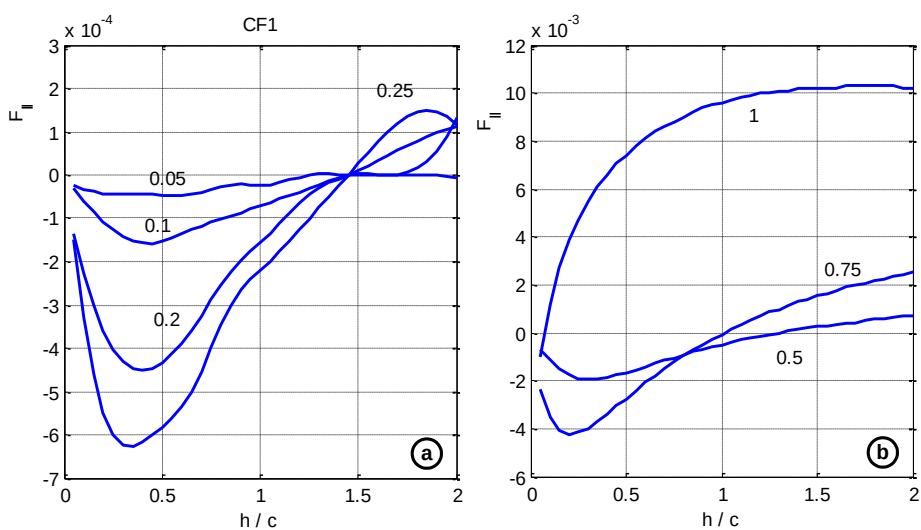


Рис. 2.35. Відносні КІН F_{II} для матеріалу CF_1

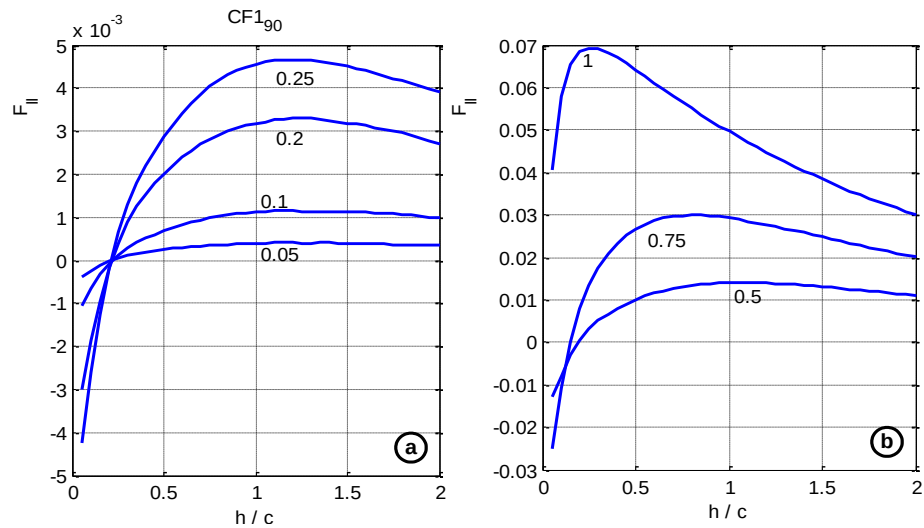


Рис. 2.36. Відносні КІН F_{II} для матеріалу $CF1_{90}$

Розраховані значення величин $\max |F_{II} B|$ у правій вершині для розглянутих матеріалів наведено в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2.

Максимальні значення величини $|F_{II}(B)|$ для горизонтальної тріщини

a/l	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	1
Ізотропія	0.00049	0.0014	0.0055	0.016	0.03	0.049
LU	0.00011	0.0003	0.0012	0.0037	0.0081	0.019
LU₉₀	0.00036	0.001	0.0041	0.012	0.026	0.055
EF	0.0002	0.0009	0.0035	0.01	0.021	0.038
ETF	0.0003	0.0009	0.0036	0.011	0.0205	0.037
ETF₉₀	0.0003	0.0014	0.0052	0.015	0.03	0.054
CF2	0.00011	0.00025	0.0011	0.003	0.006	0.0017
CF1	0.00005	0.00015	0.0012	0.0003	0.002	0.001
CF1₉₀	0.0003	0.0012	0.0046	0.014	0.03	0.069

На основі проведених розрахунків впливає, що для тріщин, які паралельні до межі півплощини та вісі ортотропії паралельні координатним осям:

- анізотропія істотно впливає на розподіл напружень біля тріщин;
- КІН K_{II} є найменшими у випадку, коли жорсткість матеріалу максимальна у вертикальному напрямку;
- для всіх розглянутих матеріалів максимальні значення КІН K_{II} є найбільшими для ізотропного матеріалу, при цьому ці величини зменшуються у разі збільшення міри анізотропії.

Для композитних матеріалів при контакті берегів тріщин біля вершин КІН K_I виявилися відмінними від нуля [173]. Отримані результати узгоджуються із розв'язками іншими методами аналогічних КЗ [173].

Вертикальні тріщини. Результати розрахунків відносних КІН F_{II}^+ для випадку вертикальної тріщини у нижній вершині при $a/l = 0.05, 0.25$ для ізотропної пластинки наведено на рис. 2.37a. Тут суцільним кривим відповідають значення $y_b/l = -0.2$, а штриховим – $y_b/l = -0.5$, де y_b – координата верхньої вершини тріщини. Аналогічні результати для верхньої вершини наведено на рис. 2.37b. Наведені тут результати практично збігаються із графіками, які отримані в [38]. Зазначимо, що в [38] розрахунки проведено для штампа, який не повертається.

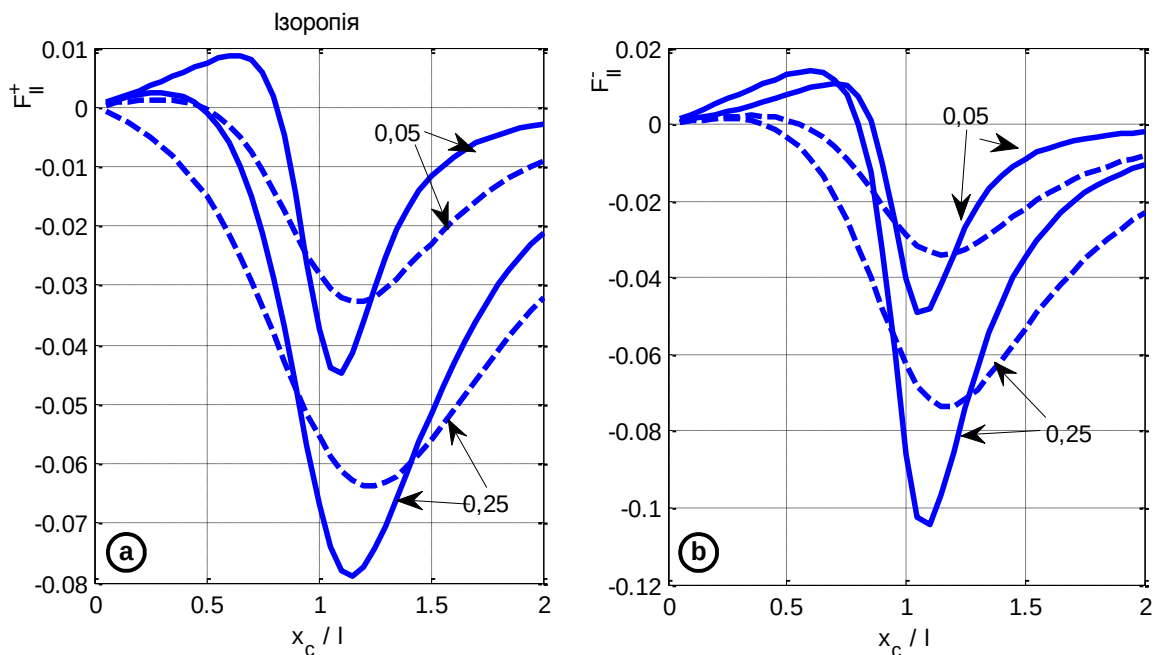


Рис. 2.37. Відносні КІН для вертикальної тріщини при $y_b/l = -0.2$ (суцільні лінії) та $y_b/l = -0.5$ (штрихові лінії). Нижня вершина – (a), верхня – (b)

Аналогічні результати для матеріалів LU , LU_{90} , у нижній вершині тріщини наведено на рис. 2.38a та рис. 2.39a. Тут суцільним кривим відповідає відношення $y_b/l = -0.2$, а штриховим – $y_b/l = -0.5$, де y_b – координата верхньої вершини тріщини. Аналогічні результати для верхньої вершини наведено на рис. 2.38b та рис. 2.39b.

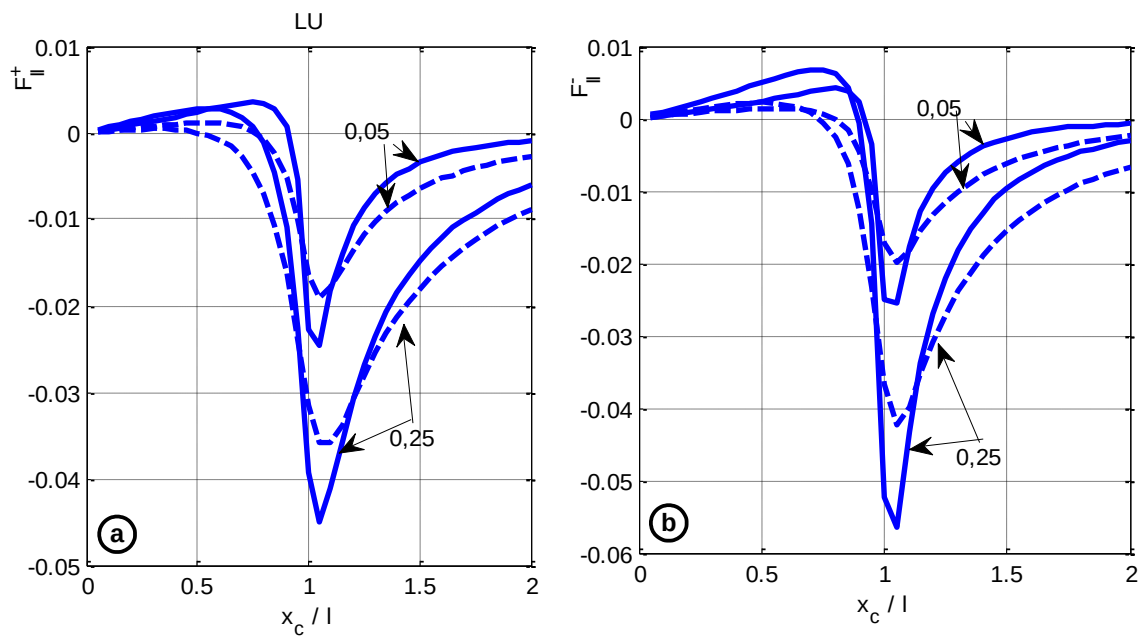


Рис. 2.38. Відносні КІН для вертикальної тріщини при $y_b/l = -0.2$ (суцільні лінії) та $y_b/l = -0.5$ (штрихові лінії). Нижня вершина – (а), верхня – (б)

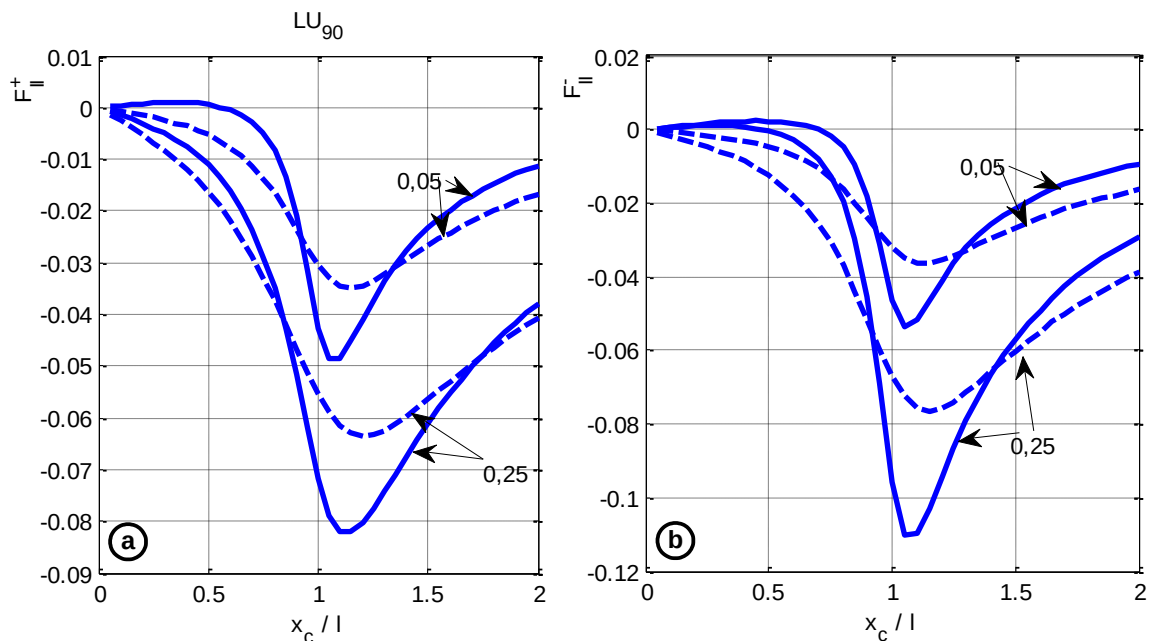


Рис. 2.39. Відносні КІН для вертикальної тріщини при $y_b/l = -0.2$ (суцільні лінії) та $y_b/l = -0.5$ (штрихові лінії). Нижня вершина – (а), верхня – (б)

Із наведених рисунків видно, що найбільші КІН K_{II} для вертикальних тріщин досягається для тріщин, що розміщені біля краю штампа, причому біля ближчої до межі вершини тріщини вони є дещо більшими за величиною. Для всіх розглянутих випадків значення КІН K_I виявились набагато меншими, ніж КІН K_{II} , тому їх не наводимо.

2.7. Напруження у півплощині біля параболічного штампа та тріщин

Розглянута задача визначення напружень у ізотропній півплощині з тріщинами, яка перебуває під дією гладкого параболічного штампа. Дослідження виконано за врахування контакту берегів тріщин. Поставленій проблемі в літературі присвячена значна кількість робіт, детальний огляд яких наведено в [38]. Однак, у них, як правило, умови контакту під штампом задовольнялись наближено – наперед задавався герцівський розподіл контактних напружень або приймалися певні допущення. Крім цього, в більшості робіт не враховувався контакт берегів тріщин.

Розглянемо півплощину $y < 0$ із тріщинами, що взаємодіє при $|x - c| < a$ із штампом, до якого прикладена вертикальна сила P та момент M (постановку задачі схематично зображено на рис. 2.40).

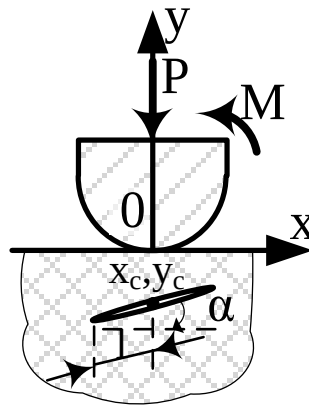


Рис. 2.40. Схема задачі

Будемо розглядати штамп, що має параболічну форму, і який перед навантаженням дотикається до півплощини в початку координат. У процесі навантаження центр штампа може зміститись у горизонтальному напрямку на деяку величину c . Позначимо через R – радіус вершини основи штампа.

Для розв'язування задачі використаємо розроблений вище алгоритм, який ґрунтується на методі інтегральних рівнянь. Позначимо a_0 – півдовжина ділянки контакту розглядуваної задачі у випадку відсутності тріщини (для суцільної півплощини). Величина a_0 визначається за формулою

$$a_0 = \frac{\sqrt{PR} \chi + 1}{\sqrt{2\pi G}},$$

де G – модуль зсуву, χ – стала, введена Мусхелішвілі [87].

Розглянуто прямолінійну тріщину з центром у точці x_c, y_c і півдовжиною l , що нахилена під кутом α до осі Ox , перед втисканням центр штампа знаходиться в початку координат, момент прикладених сил до штампа відносно цієї точки прийнято рівним нулю. Під час знаходження КІН враховано контакт берегів тріщин.

Приймемо відомою величину a_0 . Далі всі величини віднесемо до неї. Розраховані відносні контактні напруження під штампом $\sigma = a_0 \sigma_y / P$ при відносній довжині $d = l/a_0 = 1$, куті нахилу тріщини $\alpha = 0^\circ$, $x_c = 0$, $y_c/a_0 = 1.1$ наведено на рис. 2.41 кривою 1. Розміри області контакту видно з рисунка. На цьому ж рисунку кривою 1' зображено відносні контактні напруження на берегах тріщини $\sigma_T = a_0 \sigma_n / P$. Значення відносних КІН K_{II} у вершинах тріщини наведено над графіком, при цьому КІН $K_I = 0$. Для порівняння порівняння наведено наближений розв'язок поставленої задачі, в якому контактні напруження під штампом були задані наперед. Наближено вони приймалися такими, які виникають під штампом у суцільній півплощині (тобто були задані герцівським розподілом). Тут вони будуть наведені кривою 2, а кривою 2' позначатимемо відповідні відносні контактні напруження на берегах тріщини.

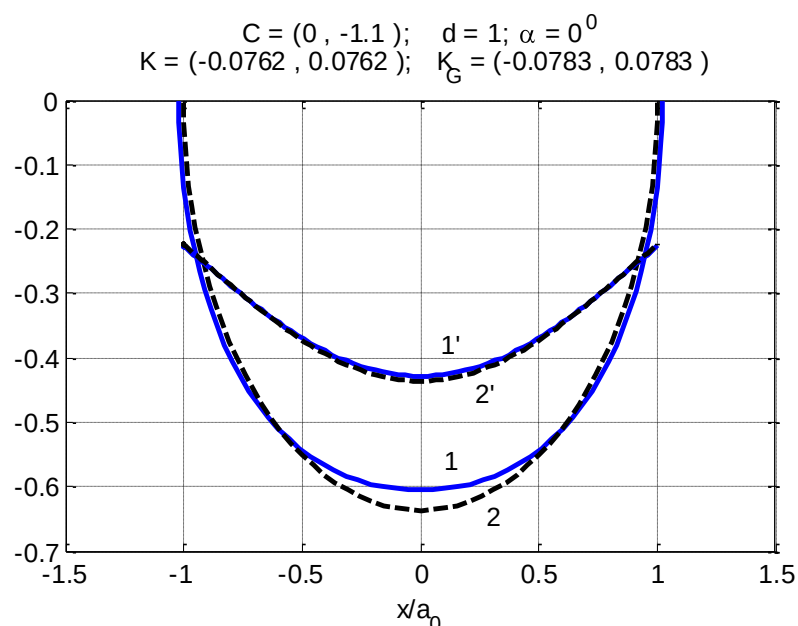


Рис. 2.41. Відносні КН та КІН за дії штампа при $\alpha = 0^\circ$

На рис. 2.41, крім кута повороту α , величини $C = x_c/a_0, y_c/a_0$, наведено також значення відповідних КІН K_{II} у лівій та правій вершинах тріщини (для випадку розподілу 1' позначено через K , а для 2' – через K_G). Зазначимо, що аналогічним чином будуть розглянуті різні випадки нахилу тріщини та її зміщення.

Зафіксувавши величину C , розглянемо випадки нахилів тріщини при наступних значеннях кута повороту α : -30° , -45° , -60° та -90° . Відповідні відносні контактні напруження під штампом та на берегах тріщини будуть наведені на рис. 2.42–2.45.

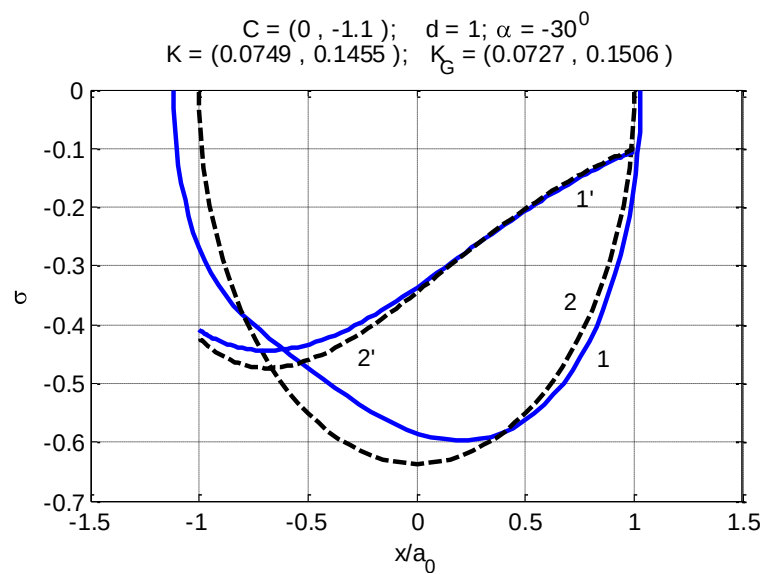


Рис. 2.42. Відносні КН та КІН при $\alpha = -30^\circ$

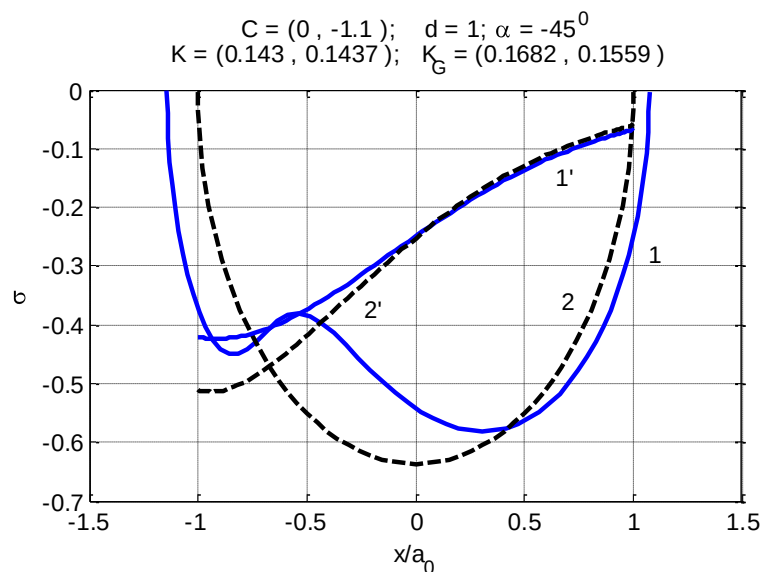
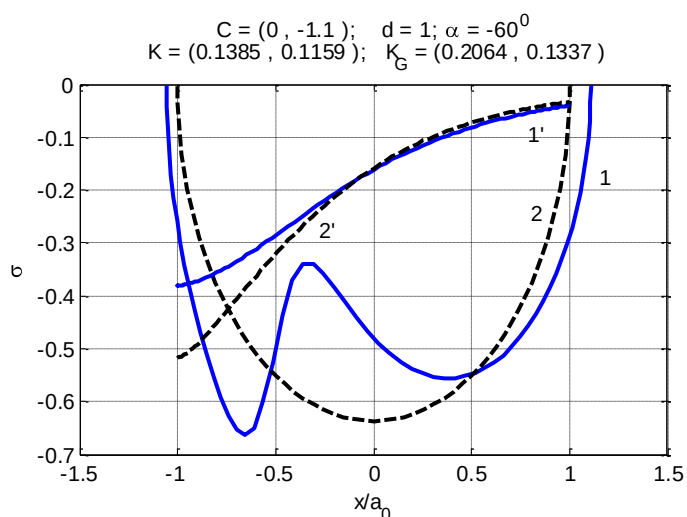
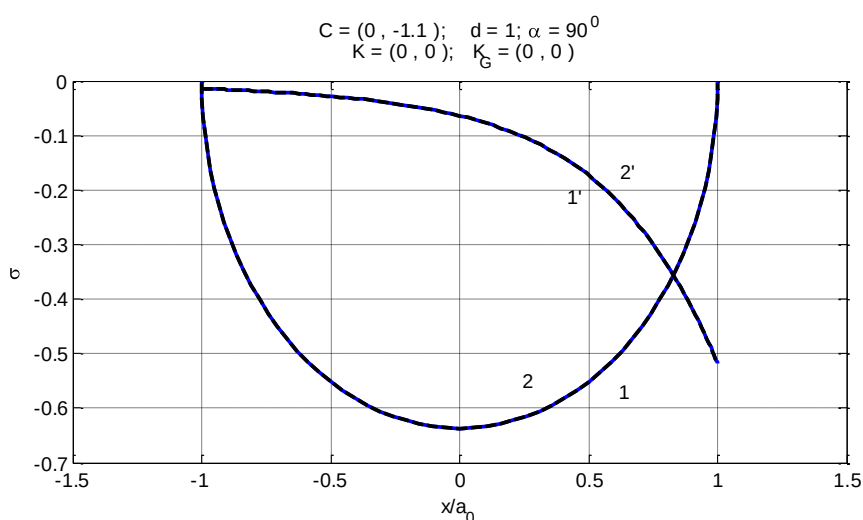
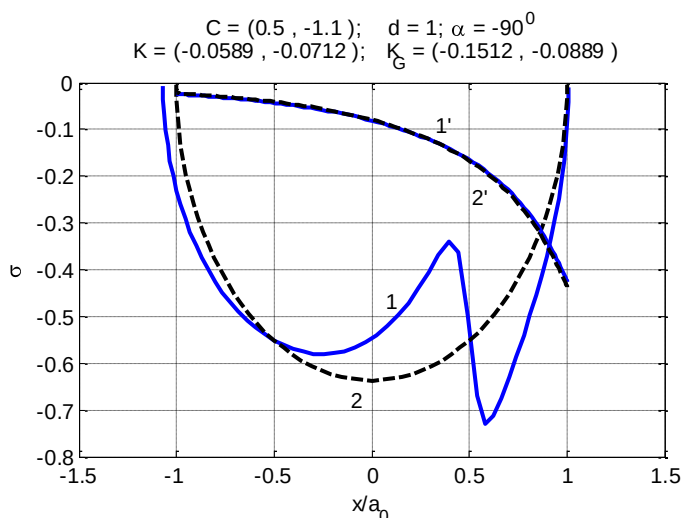


Рис. 2.43. Відносні КН та КІН при $\alpha = -45^\circ$

Рис. 2.44. Відносні КН та КІН при $\alpha = -60^\circ$ Рис. 2.45. Відносні КН та КІН при $\alpha = -90^\circ$

Аналогічні результати для зсунутої тріщини при $x_c/a_0 = 0.5$ та нахилів на кути $\alpha : -90^\circ, -60^\circ, -45^\circ, -30^\circ, 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ наведено на рис. 2.46–2.53.

Рис. 2.46. Відносні КН та КІН для зсунутої тріщини при $\alpha = -90^\circ$

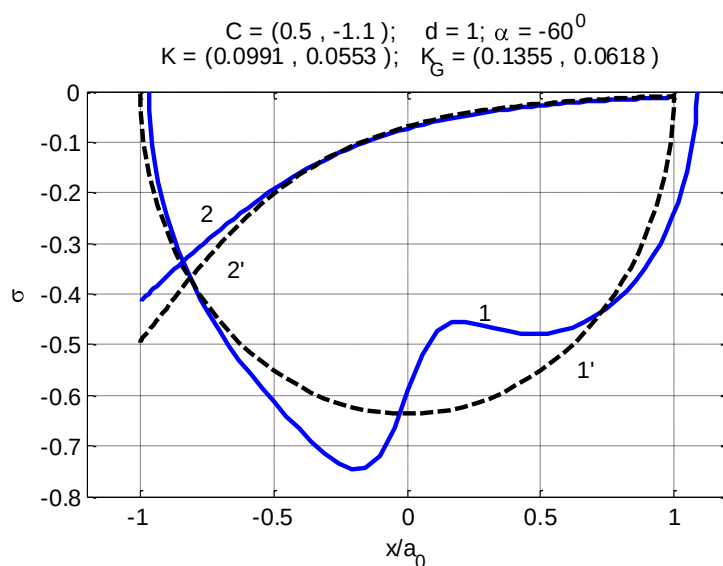


Рис. 2.47. Відносні КН та КІН для зсунутої тріщини при $\alpha = -60^\circ$

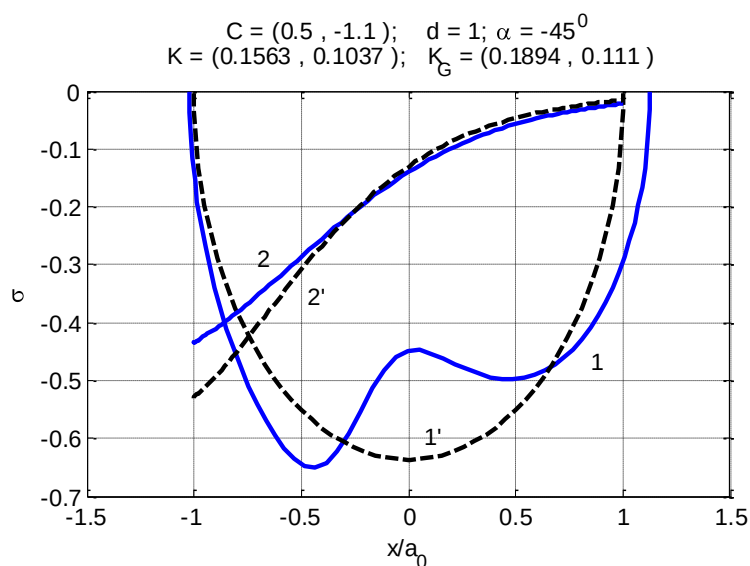


Рис. 2.48. Відносні КН та КІН для зсунутої тріщини при $\alpha = -45^\circ$

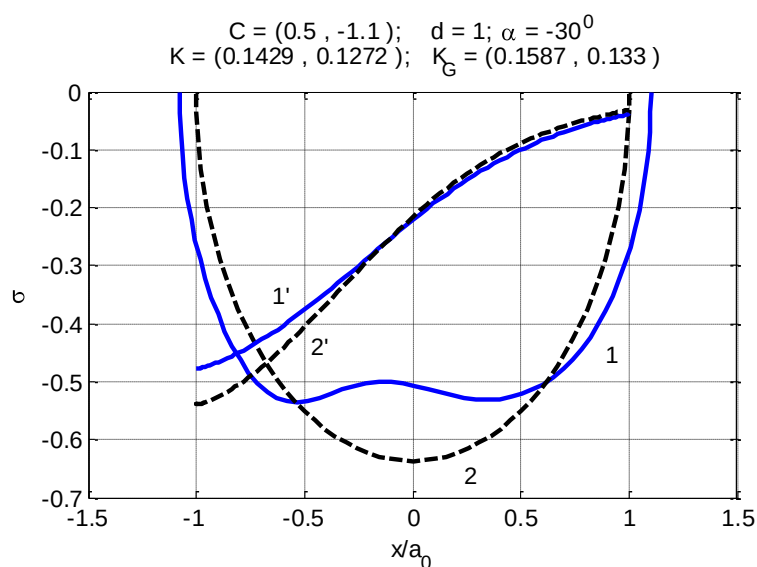


Рис. 2.49. Відносні КН та КІН для зсунутої тріщини при $\alpha = -30^\circ$

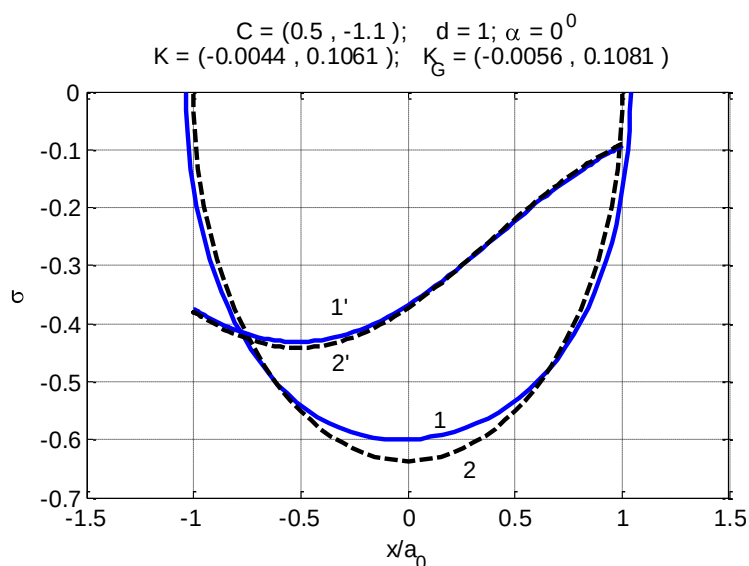


Рис. 2.50. Відносні КН та КІН для зсунутої тріщини при $\alpha = 0^\circ$

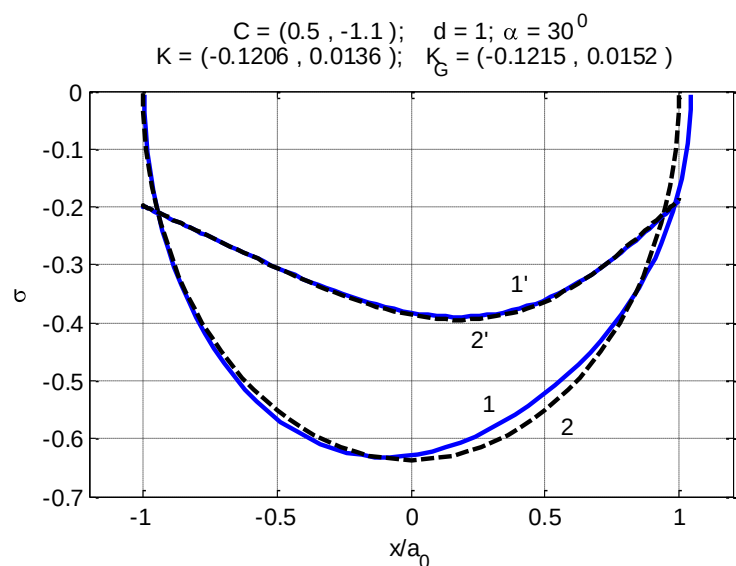


Рис. 2.51. Відносні КН та КІН для зсунутої тріщини при $\alpha = 30^\circ$

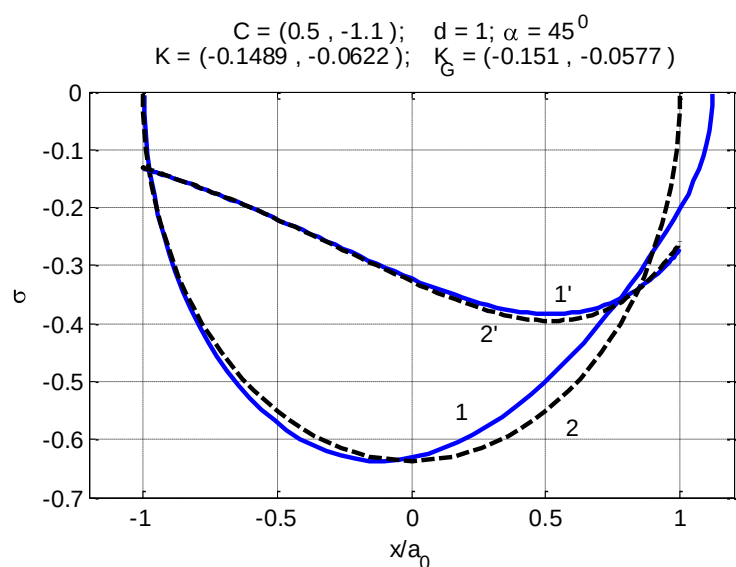


Рис. 2.52. Відносні КН та КІН для зсунутої тріщини при $\alpha = 45^\circ$

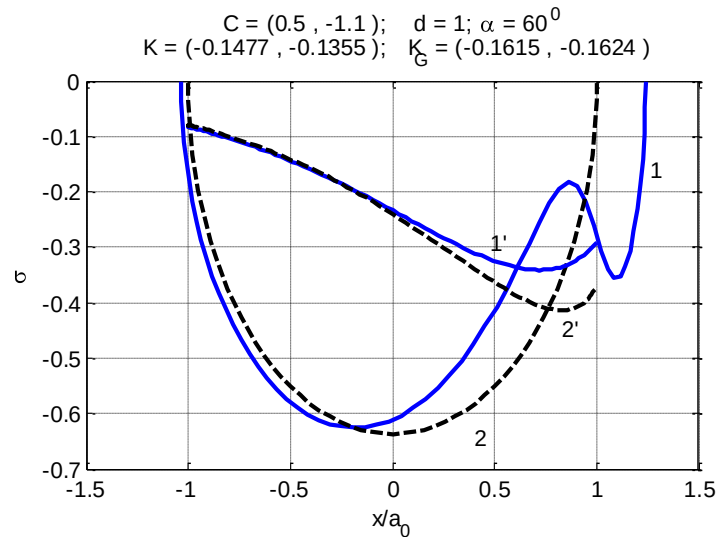


Рис. 2.53. Відносні КН та КІН для зсуної тріщини при $\alpha = 60^\circ$

Для всіх вищерозглянутих випадків мав місце контакт берегів тріщин в околі вершин. З наведених вище результатів розрахунків відносних КІН та КН під штампом випливає, що лише при симетричному розташуванні вертикальної тріщини відносно центра штампа ефективним буде підхід, у якому застосовують наперед заданий розподіл Герца (називатимемо цей підхід наближеним). Для випадків горизонтальних тріщин наближений підхід дає порівняно незначну похибку. У інших більш складніших випадках розташування тріщини розподіли відносних КН під параболічним штампом суттєво відрізняються від герцівського розподілу, а тому у таких задачах застосування наближеного підходу для обчислення КІН на практиці може призвести до значних похибок.

2.8. Напруження біля висвердлених отворів у околі вершин тріщин

Для зупинки тріщин у околі їх вершин висвердлюють отвори, переважно кругової форми. При циклічних навантаженнях на межі отвору часто виникають нові мікротріщини, що призводить до подальшого росту тріщини. Причиною їх росту є високі напруження, які виникають на межі отвору напроти основної тріщини. Виконаємо дослідження концентрації напружень на межі отворів із крайовою тріщиною та КІН залежно від їх форми й довжини тріщини. Такі дослідження дозволять оцінити можливість регулювати концентрацію напружень формою отворів. Питанням дослідження напружень біля отворів із тріщинами в літературі присвячено значна кількість робіт [103, 105]. Однак у цих роботах основна увага спрямовувалась на дослідження напружень біля вершин тріщин.

2.8.1. Постановка задачі

Розглянемо пластинку з отвором, яка знаходиться під дією прикладеного навантаження на нескінченності. Прийmemo, що отвір послаблений крайовою прямолінійною тріщиною довжиною L , межа отвору та береги тріщини вільні від навантаження.

2.8.2. Результати розрахунків

Розрахунки виконано стосовно пластинки з отворами наступних форм:

1), 2) квадрата із стороною a та закругленими вершинами у його кутах з радіусами: $R/a = 0.25$ і $R/a = 0.5$ (рис. 2.54a);

3) знайденого в [12] отвору оптимальної форми, біля якого виникає низький рівень напружень (рис. 2.54b);

4) кругового з радіусом R ;

5) межа отвору близька до перетину кіл (рис. 2.54c).

Прийmemo, що ці отвори послаблені крайовими тріщинами довжиною L (рис. 2.54) та пластинка розтягується в напрямку осі Oy зусиллями P_y . Зазначимо, що для вибраних отворів без тріщин коефіцієнти концентрації напружень (ККН) для отворів 1)–4) рівні відповідно: 3.38, 2.94, 2.24 та 3.

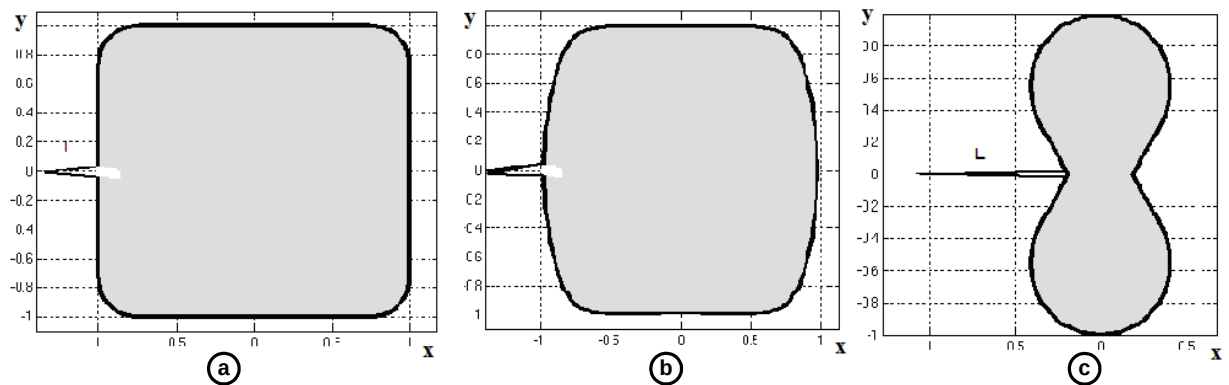


Рис. 2.54. Форми отворів з тріщинами.

Розраховані відносні КІН $F_I = K_I / P_y \sqrt{\pi L}$ для отворів із тріщинами залежно від довжини тріщини зображено на рис. 2.55a кривими 1-5.

Знайдені ККН для цих отворів із тріщиною зображено на рис. 2.55b кривими 1-5. Кривими $1'$ і $3'$ зображено значення відносних напружень на отворі в точці на осі Ox , протилежній тріщині для закругленого квадрата при $R/a = 0.25$ та оптимального отвору.

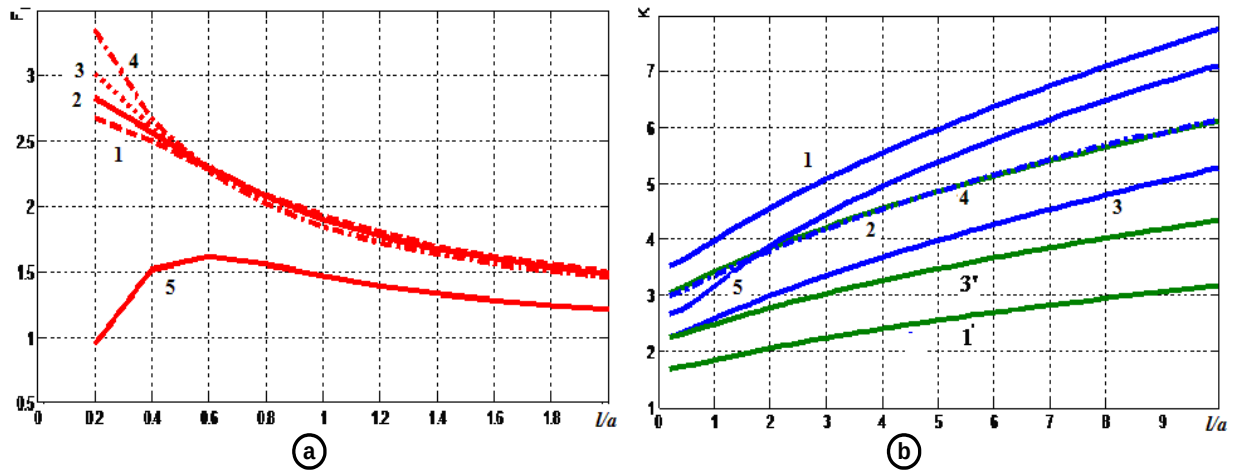


Рис. 2.55. Значення КІН (а) та ККН (b) для отворів різної форми залежно від відносної довжини тріщини

На основі виконаних розрахунків можна зробити висновки: при малих довжинах тріщин найменші КІН на квадратних отворах, за винятком отвору, зображеного на рис. 2.54с. При відносних відстанях $L/a > 0.4$ КІН для всіх отворів близькі між собою. Руйнування для випадків отворів з номерами 1)-3) розпочинатиметься в точках напроти тріщини, які віддалені від осі Ox (оскільки тут досягаються найбільші напруження). Для цих же отворів напруження в точці на межі, що лежить на осі Ox напроти тріщини є меншими за величиною – криві 1 і 1' та 3 і 3' на рис. 2.55b.

Таким чином, для отворів, близьких за формою до кругового, значення ККН виявились найменшими для оптимального отвору (рис. 2.54b), причому при збільшенні розмірів тріщини ефективність цього отвору в порівнянні із іншими формами отворів не зменшується. У зв'язку з цим, для загальмовування тріщини доцільно створювати оптимальний отвір (рис. 2.54b), на якому найменша ймовірність виникнення нових тріщин.

2.9. Розрахунок на контактну міцність композитних елементів конструкцій

2.9.1. Розрахунок на міцність області біля отворів

Проведемо розрахунок прикладених до штампа зусиль, за яких напруження біля отворів не перевищують допустимих значень.

Будемо виходити із критерію міцності Гофмана, який широко використовується для оцінки міцності пластинок [163]. Розглянемо плоский зразок прямокутної форми, що виготовлений із композитного матеріалу, що перебуває під дією двостороннього розтягу та зсуву. Позначимо напруження, що виникають у зразку через σ_1 , σ_2 , τ_{12} (рис. 2.56). Зазначимо, що напруження σ_1 діють у напрямку, в якому жорсткість матеріалу є максимальною.

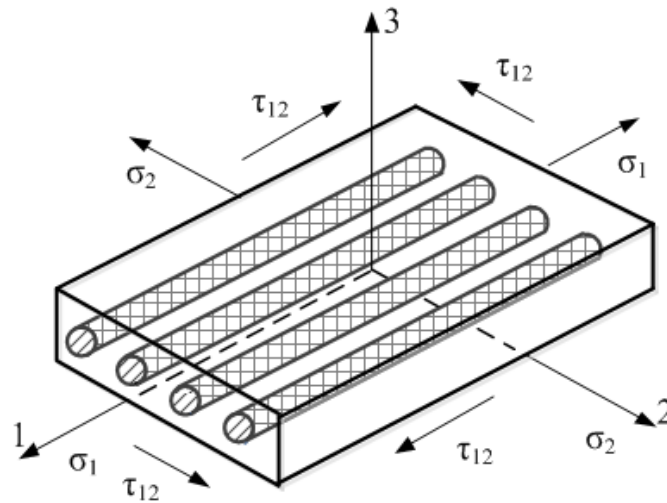


Рис. 2.56. Напруження в композитному матеріалі

На основі критерію міцності Гофмана впливає, що руйнування зразка почнеться, якщо має місце умова [163]:

$$f = -\frac{\sigma_1^2}{X_c X_t} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_c X_t} - \frac{\sigma_2^2}{Y_c Y_t} + \frac{X_c + X_t}{X_c X_t} \sigma_1 + \frac{Y_c + Y_t}{Y_c Y_t} \sigma_2 + \frac{\tau_{12}^2}{S_{12}^2} = 1, \quad (2.36)$$

де X_t, Y_t – граничні значення для напружень за одновісного розтягу зразка вздовж першої і другої осей, X_c, Y_c – аналогічні величини при стиску, які є від’ємними, S_{12} – граничні значення дотичних напружень для зразка, який знаходиться при чистому зсуві.

Підкреслимо, що формула (2.36) є справедливою для випадку, коли в напрямку 1 жорсткість матеріалу є більшою, ніж в напрямку 2. Тобто, функція f є критеріальною, на основі якої може бути виконано розрахунок на міцність (при досягненні цієї функції значення 1 прогнозується початок руйнувань).

Пружні сталі та граничні значення напружень для чотирьох характерних композитних матеріалів наведено в таблиці 2.3 [163].

Таблиця 2.3.

Пружні сталі та величини у формулі (2.36)

<i>Величини</i>	<i>Скло- епоксид</i>	<i>Бор- епоксид</i>	<i>Графіт- епоксид</i>	<i>Кевлар- епоксид</i>
$E_1, ГПа$	54	207	207	76
$E_2, ГПа$	18	21	5	5.5
ν_{12}	0.25	0.3	0.25	0.34
$G_{12}, ГПа$	9	7	2.6	2.1
$X_t, МПа$	1035	1380	1035	1380
$Y_t, МПа$	28	83	41	28
$S_{12}, МПа$	41	124	69	44
$X_c, МПа$	1035	2380	689	276
$Y_c, МПа$	138	276	117	138

Приймемо, що напруження в пластинці пропорційно зростають за умови збільшення навантаження й визначаються параметром навантаження m , при цьому напруження можуть бути зображені у вигляді $\sigma_1 = mS_1$, $\sigma_2 = mS_2$, $\tau_{12} = mT_{12}$, де S_{12} , T_{12} – відомі величини. Знайдемо допустимі значення напружень, тобто максимальне значення параметра навантаження m . Його знайдемо з рівняння

$$Am^2 + Bm - 1 = 0,$$

де

$$A = -\frac{S_1^2}{X_c X_t} + \frac{S_1 S_2}{X_c X_t} - \frac{S_2^2}{Y_c Y_t} + \frac{T_{12}^2}{S_{12}^2}, \quad B = \frac{X_c + X_t}{X_c X_t} S_1 + \frac{Y_c + Y_t}{Y_c Y_t} S_2.$$

Звідси знайдемо, що

$$m = -\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} + \frac{1}{A}}. \quad (2.37)$$

Проведемо розрахунки на міцність пластинок із отворами. Розглянемо півплощину $y < 0$ з отворами, в яку, якщо $y = 0$, $-a < x < a$, втискається без тертя плоский штамп. Приймемо, що головний вектор і момент сил, які прикладені до штамп, дорівнюють P і $M = 0$.

Розрахунки виконано для бор-епоксидної півплощини з круговим отвором радіуса $r = a$ з центром у точці із координатами $(0, -3a)$ (постановку задачі схематично зображено на рис. 2.57a). На рис. 2.57b наведено результати розрахунків відносних колових напружень $\sigma = \sigma_\theta / P_0$ ($P_0 = P/a$) на межі отвору залежно від кутової координати, яку відлічуємо від самої правої точки отвору за годинниковою стрілкою. Суцільній кривій 2 відповідає випадок, коли жорсткість матеріалу є максимальною в вертикальному напрямку, а 2' – в горизонтальному.

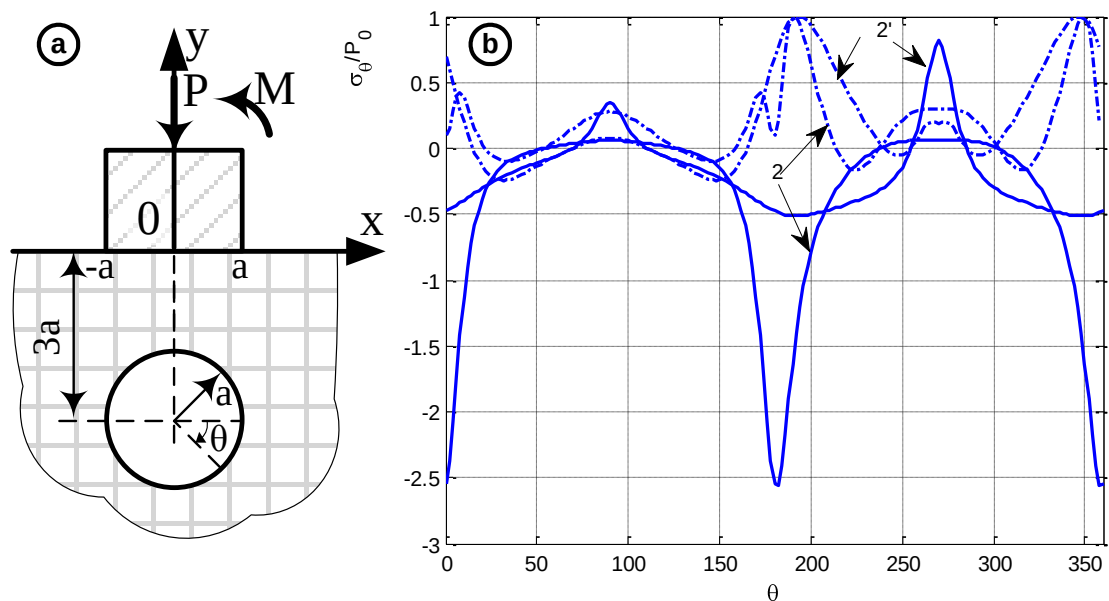


Рис. 2.57. Схема задачі (a), розподіл напружень та значення критеріальної функції на межі отвору (b), матеріал – бор-епоксид

Для знаходження граничного навантаження, яке може бути прикладено до штампа знайдено напруження на межі отвору S_{12} , T_{12} , які виникають при $P/a = -1$. Далі на основі формули (2.37) знайдено значення величини m для всіх точок на межі отвору і серед них вибрано мінімальне. Таким чином знайдено допустимі значення навантаження для півплощини:

- $P_{\max}/a = 491.7$ МПа – для випадку, коли жорсткість максимальна у вертикальному напрямку;

- $P_{\max}/a = 536$ МПа – для випадку, коли жорсткість максимальна у горизонтальному напрямку.

На рис. 2.57b штриховими лініями наведено значення критеріальної функції f , яку отримали поклавши $P = P_{\max}$. Видно, що в обох випадках руйнування починатиметься при кутах дещо більших за 180° і в симетричній їй точці відносно осі Oy (в цих точках $f = 1$).

Аналогічні результати розрахунків для скло-епоксидної півплощини наведено на рис. 2.58.

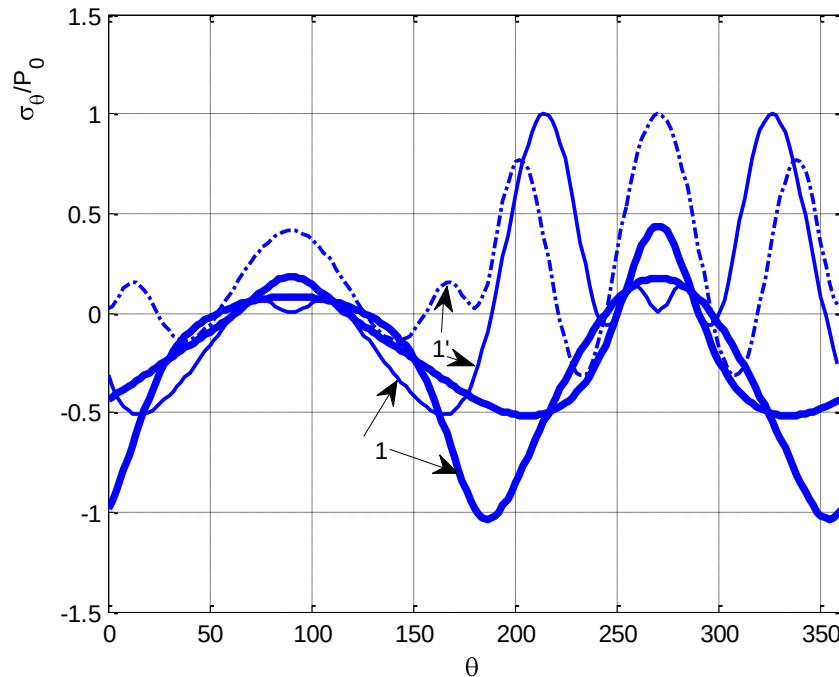


Рис. 2.58. Розподіл напружень та критеріальної функції на межі отвору, матеріал – скло-епоксид

Знайдені допустимі значення навантаження:

- $P_{\max}/a = 158.9$ МПа – для випадку, коли жорсткість максимальна в вертикальному напрямку;
- $P_{\max}/a = 225$ МПа – для випадку, коли жорсткість максимальна в горизонтальному напрямку.

Виконано розрахунки граничних навантажень та кутів θ , за яких вони досягаються при різних відстанях центру отвору від штампа. Результати розрахунків для скло-епоксидного, бор-епоксидного, графіт-епоксидного і кевлар-епоксидного матеріалів наведено в таблицях 2.4–2.7.

Таблица 2.4.

Скло-эпоксид

	$E_y > E_x$		$E_y < E_x$	
y_c/a	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$
-2.75	202	162.4	216	203.3
-3	270	158.9	214	225.0
-3.25		155.5		247.2
-3.5		157.0	212	269.7
-3.75		161.2		292.3
-4		167.3	210	315.2
-4.25		174.5		338.0
-4.5		182.6		361.0
-4.75		191.4	208	384.2
-5		200.7		407.2

Таблица 2.5.

Бор-эпоксид

	$E_y > E_x$		$E_y < E_x$	
y_c/a	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$
-2.75	192	462.3	194	496.6
-3	190	491.7		536.0
-3.25		520.4	192	574.8
-3.5		548.4		613.4
-3.75		576.0	190	651.9
-4		603.2		690.0
-4.25		630.0		728.2
-4.5		656.6	188	766.6
-4.75		682.9		804.8
-5		709.0		842.8

Таблиця 2.6.

Графіт-епоксид

	$E_y > E_x$		$E_y < E_x$	
y_c/a	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$
-2.75	182	126.3	202	286.8
-3		133.4	200	311.9
-3.25		140.3	198	336.8
-3.5		147.0	196	361.5
-3.75		153.6		386.1
-4		160.0	194	410.6
-4.25		166.3		435.0
-4.5		172.4		459.5
-4.75		178.4	192	483.8
-5		184.4		508.2

Таблиця 2.7.

Кевлар-епоксид

	$E_y > E_x$		$E_y < E_x$	
y_c/a	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$
-2.75	182	86.2	214	243.8
-3		91.3	212	267.2
-3.25		96.2	210	290.6
-3.5		101.0	208	313.8
-3.75		105.7	206	337.0
-4		110.3	204	359.9
-4.25		114.9	202	382.8
-4.5		119.3		405.5
-4.75		123.7	200	428.0
-5		128.1	198	450.6

Прийнято, що центр кругового отвору радіуса a розміщений у т. 0, –та при $m = 2.75, 3, \dots, 4.75$. На рис. 2.59 зліва наведено результати розрахунків віднесених до кільцевих напружень на межі отвору $P_0 = P/a$ для скло-епоксидної

півплощини, жорсткість максимальна у вертикальному напрямку. Кривим 1-5 – відповідають значення $m = -2.75, -3.25, -3.75, -4.25, -4.75$. На рис. 2.59 справа наведено розраховані напруження наближено: розглядалась суцільна півплощина, коли до її межі прикладено нормальні зусилля, які виникають під штампом.

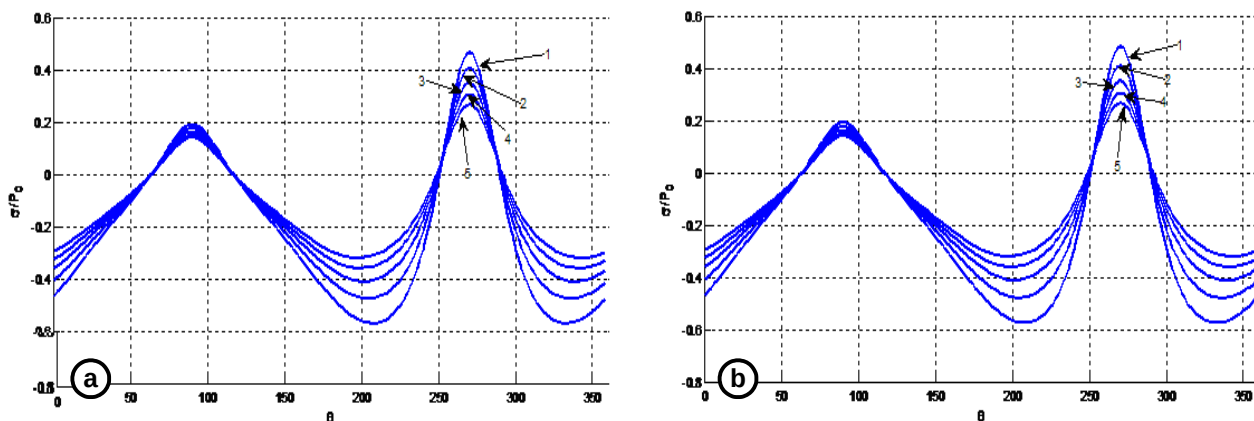


Рис. 2.59. Відносні напруження на межі отвору: (а) – строгий розв'язок, (б) – контактні напруження на основі розгляду суцільної півплощини

На рис. 2.60 наведено розраховані напруження на межі отвору при розгляді півплощини, до межі якої в початку координат прикладена нормально зосереджена сила P .

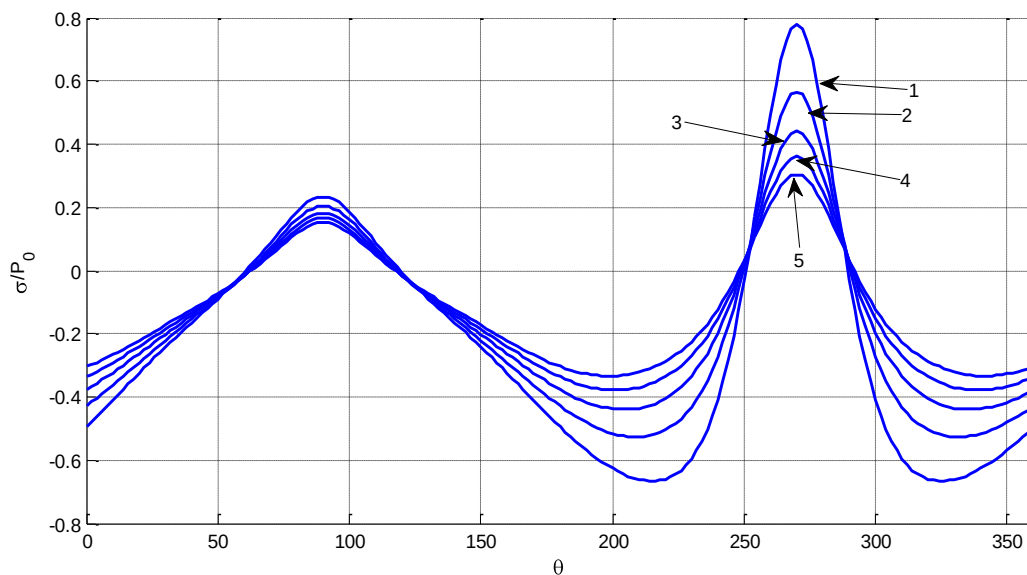


Рис. 2.60. Відносні напруження на межі отвору під час дії зосередженої сили

Розраховані граничні навантаження (значення сил, при яких починається руйнування на межі отвору) для розглянутих трьох випадків наведено в таблиці 2.8.

Таблиця 2.8.

Значення сил, при яких починається руйнування на межі отвору

<i>Сила</i>			<i>Штамп</i>		<i>Набл. шт.</i>	
y_c/a	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$
-2.75	220	167.27	216	203.3	216	200.6
-3	218	191.97	214	225.0	214	223.3
-3.25	216	216.6		247.2		246.0
-3.5	214	241.3	212	269.7	212	268.8
-3.75		265.7		292.3		291.7
-4	212	290.2	210	315.2	210	314.8
-4.25		314.5		338.0		337.6
-4.5	210	338.9	208	361.0	208	360.8
-4.75		363.0		384.2		384.0
-5		387.3		407.2		407.0

Як видно із рис. 2.59–2.60 та таблиці 2.8, для розрахунку напружень на межі отвору для всіх розглянутих випадків може бути застосований наближений підхід, у якому розглядається півплощина з отвором, коли до її межі на місці дії штампа прикладено зусилля, які виникають під штампом у суцільній півплощині. В той же час заміна штампа дією зосередженої сили може призвести до значних похибок у розрахунках.

2.9.2. Розрахунок на контактну міцність

Проведемо розрахунки на міцність областей пластинки, які прилягають до штампа.

Розглянемо випадок, коли дотичні напруження під штампом відсутні. Тоді під штампом $\sigma_x = 2\operatorname{Re}[\gamma F_x] = \gamma\sigma_y$, де $\gamma = -s_1s_2 = \sqrt{E_x/E_y}$. Позначимо максимальний тиск під штампом через p_0 , тоді для матеріалу під штампом за максимальної жорсткості в горизонтальному напрямку в умові (2.36) маємо $\sigma_2 = -p_0$, $\sigma_1 = -\gamma p_0$, $\tau_{12} = 0$. Підставляючи їх в умову (2.36) отримуємо рівняння для допустимого тиску під штампом

$$Ap_0^2 - Bp_0 = 1,$$

де $A = -\frac{\gamma^2 - \gamma}{X_c X_t} - \frac{1}{Y_c Y_t}$, $B = \frac{X_c + X_t}{X_c X_t} \gamma + \frac{Y_c + Y_t}{Y_c Y_t}$, причому тут $\gamma > 1$.

Для матеріалу під штампом при максимальній жорсткості в вертикальному напрямку в умові (2.36) маємо $\sigma_1 = -p_0$, $\sigma_2 = -\gamma p_0$, $\tau_{12} = 0$, при цьому

$$A = \frac{\gamma - 1}{X_c X_t} - \frac{\gamma^2}{Y_c Y_t}, \quad B = \frac{Y_c + Y_t}{Y_c Y_t} \gamma + \frac{X_c + X_t}{X_c X_t}, \quad \gamma < 1.$$

Враховуючи, що $B > 0$, $A > 0$ отримуємо граничне значення для контактних напружень:

$$p_0 = \frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} + \frac{1}{A}}.$$

Результати розрахунків граничних значень для контактного тиску в суцільній півплощині для наведених в таблиці 2.3 матеріалів наведено в таблиці 2.9.

Таблиця 2.9.

Граничні значення для контактного тиску

<i>Величини</i>	<i>Скло- епоксид</i>	<i>Бор- епоксид</i>	<i>Графіт- епоксид</i>	<i>Кевлар- епоксид</i>
$E_x < E_y$	238.1	887.5	590.3	363.7
$E_x > E_y$	137.5	282.7	91.7	97.8

2.10. Висновки до другого розділу

У розділі розглянуто контактні задачі для ортотропної півплощини з отворами й тріщинами. Для визначення НДС використано модифіковані інтегральні рівняння, за яких умови на межі півплощини, в тому числі й під штампом задовольняються тотожно. Розв'язки типу Гріна, через які записуються ядра рівняння, знайдено з використанням методу Мусхелішвілі. Для розв'язування отриманих інтегральних рівнянь використано метод механічних квадратур.

Детально досліджено концентрацію напружень у ортотропній півплощині з отворами, яка перебуває під дією плоского штампа. Розв'язування цієї задачі спрощується, оскільки при цьому виникає інтегральне рівняння тільки від невідомих функцій на межі отворів. Виконано дослідження напружень біля кругового отвору, залежно від їх розміщення та механічних характеристик матеріалу.

Розглянуто також отвори квадратної форми з закругленими вершинами та систему двох отворів.

Розглянуто випадок дії на півплощину параболічного штампа. Задача знаходження меж області контакту зведена до задачі оптимізації, в якій ключова функція формується на основі розв'язків модифікованих інтегральних рівнянь. Виконано дослідження контактних напружень під штампом та на межі отворів залежно від форми штампа розміщення отворів та механічних характеристик матеріалу.

Наведено модифіковані інтегральні рівняння для навантаженої штампом півплощини з тріщинами. Рівняння розв'язувались чисельно з використанням квадратурних формул Лобатто [12, 58]. Під час розв'язування задачі враховувався контакт берегів тріщин. Виконано дослідження КІН для випадку плоского та параболічного штампа. Показано, що отримані для ізотропного матеріалу результати узгоджуються із відомими в літературі даними.

Проведено дослідження, які підтверджують достовірність розрахунків за розробленим алгоритмом. З цією метою розглянуті задачі паралельно розв'язували за відомим у літературі алгоритмом для першої основної задачі, в якому приймалось, що до півплощини з отвором прикладено зусилля, які дорівнюють знайденому контактному тиску.

На основі знайдених напружень виконано розрахунок допустимих навантажень на штамп, за яких забезпечується міцність зон концентрації напружень (біля отворів і штампа). При розрахунках виходили з критерію міцності Гофмана, у якому враховано: нормальні та дотичні напруження, різниця в їх граничних значеннях під час розтягу і стиску. Зокрема, встановлено, що для забезпечення допустимих напружень біля отвору прикладені до штампа максимальні зусилля для армованих у горизонтальному напрямку матеріалів виявились вищими, ніж за армування в вертикальному напрямку.

Виконано також розрахунок граничних зусиль, за яких напруження в околі штампа задовольняють умову міцності.

РОЗДІЛ 3

НАПРУЖЕННЯ БІЛЯ ОТВОРІВ, ТРІЩИН ТА ШТАМПІВ У КОМПОЗИТНІЙ ПІВПЛОЩИНІ ЗА ВРАХУВАННЯ ТЕРТЯ

У розділі розглянуто контактні задачі для композитних півплощин із отворами та тріщинами, які мають загальні механічні анізотропні характеристики. Розроблений алгоритм може також бути застосований і для ортотропних матеріалів, коли їх головні напрямки не паралельні до межі півплощини. Також додатково прийнято, що під штампом має місце тертя.

Основні результати цього розділу опубліковані в працях [79, 76].

3.1. Контактна задача для анізотропної суцільної півплощини за врахування тертя

Розглянемо анізотропну півплощину $y < 0$, яка навантажена в області L_u $c < x < d$ штампом з основою $y = f(x)$. Прийmemo, що напруження під штампом задовольняють умови: $\int_c^d \sigma_y(x) dx = P_y$, $\int_c^d x \sigma_y(x) dx = M$, P і M – сила та момент, що прикладені до штампа. Прийmemo, що границя поза областю контакту (область L_σ) вільна від навантаження, відома проекція P_y головного вектора сил на вісь Oy , та момент M , прикладених до штампа. Під штампом має місце тертя, причому тут $\tau_{xy} = k\sigma_y$, де k – коефіцієнт тертя, який далі приймаємо сталим.

Зазначимо, що контактна задача для суцільної півплощини при загальній анізотропії розв'язана за допомогою методу інтегральних рівнянь у роботі Галіна [21]. Нижченаведений більш повний розв'язок цієї задачі методом спряження, який використовувався Мусхелішвілі під час розгляду ізотропних матеріалів. Отриманий розв'язок записаний у вигляді, який дає можливість також у простому вигляді побудувати ядра інтегральних рівнянь, які базуються на розв'язках типу Гріна.

Граничні умови для знаходження комплексних потенціалів Лехніцького, що визначені при $y < 0$, запишуться у вигляді:

$$\operatorname{Re}\left[s_1\Phi(x) + s_2\Psi(x)\right] = 0, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{Re}\left[\Phi(x) + \Psi(x)\right] = 0, \text{ при } x \in L_\sigma, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[s_1 + k\Phi(x) + s_2 + k\Psi(x)\right] &= 0, \\ 2\operatorname{Re}\left[q_1\Phi(x) + q_2\Psi(x)\right] &= f'(x), \text{ при } x \in L_u, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$p_j = a_{11}s_j^2 + \alpha_{12} - \alpha_{16}s_j, \quad q_j = \alpha_{12}s_j + \alpha_{22}/s_j - \alpha_{26}.$$

На основі [21] потенціали можуть бути зображені у вигляді:

$$\Phi(z) = \frac{S_2}{S_2 - S_1} F(z), \quad \Psi(z) = -\frac{S_1}{S_2 - S_1} F(z), \quad (3.4)$$

де $S_j = k + s_j$, $F(z)$ – аналітична при $y < 0$ функція.

Напруження та переміщення на межі півплощини на основі формул (3.1)–(3.4) через функцію F визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}\left[\gamma F(x)\right], \quad \sigma_y = 2\operatorname{Re} F(x), \quad \tau_{xy} = 2k\operatorname{Re} F(x) = k\sigma_y, \\ v' &= 2\operatorname{Re}\left[\lambda F(x)\right], \end{aligned}$$

де

$$\lambda = \frac{S_2 q_1 - S_1 q_2}{S_2 - S_1} = -k \left(\alpha_{12} - \frac{\alpha_{22}}{s_1 s_2} \right) + \alpha_{22} \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) - \alpha_{26}, \quad \gamma = -s_1 s_2 - k(s_1 + s_2).$$

Під час використання зображення (3.4) умова $\tau_{xy} = k\sigma_y$ виконується автоматично всюди на межі півплощини.

Тоді умова (3.3) при $x \in L_u$ запишеться у вигляді:

$$2\operatorname{Re}\left[\lambda F(x)\right] = f'(x). \quad (3.5)$$

Вимагаючи, щоб при $x \in L_\sigma$, $\sigma_y = 0$ маємо умову

$$\operatorname{Re} F(x) = 0. \quad (3.6)$$

Легко перевірити, що при $x \in L_\sigma$ також виконується умова $\tau_{xy} = 0$.

Знайдемо функцію $F(z)$ методом лінійного спряження [87]. Для цього продовжимо її, поклавши при $y > 0$ $F(z) = -\overline{F(z)}$. Тоді умови (3.5) і (3.6) перепишуться у вигляді:

$$F^+ - F^- = 0, \text{ при } x \in L_\sigma;$$

$$F^+ - gF^- = f_1 x, \text{ при } x \in L_u,$$

де $g = \lambda / \bar{\lambda}$, $f_1 x = -f' x / \bar{\lambda}$.

На основі [87] звідси знаходимо зображення функції F у вигляді:

$$F z = \frac{1}{2\pi i X z} \int_c^d \frac{f_1 t X^+ t dt}{t - z} + \frac{C}{X z} = -\frac{1}{2\pi i \bar{\lambda} X z} \int_c^d \frac{f' t X^+ t dt}{t - z} + \frac{C}{X z}, \quad (3.7)$$

де $X z = z - c^\rho z - d^{1-\rho}$, причому $X^- = gX^+$, $\rho = \frac{\ln g}{2\pi i}$, C – довільна дійсна стала.

Для визначення сталої C , врахуємо те, що у випадку, коли до межі півплощини прикладено навантаження з рівнодійною X, Y , то потенціали Лехніцького $z \rightarrow \infty$ будуть [21]

$$\Phi z_1 \sim -\frac{1}{2\pi i} \frac{X + s_2 Y}{s_1 - s_2} \frac{1}{z_1} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{S_2}{s_1 - s_2} \frac{Y}{z_1},$$

$$\Psi z_2 \sim \frac{1}{2\pi i} \frac{X + s_1 Y}{s_1 - s_2} \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2\pi i} \frac{S_1}{s_1 - s_2} \frac{Y}{z_2}.$$

Звідси випливає, що для розглядуваної контактної задачі при $z \rightarrow \infty$

$$F z \sim \frac{Y}{2\pi i} \frac{1}{z}.$$

Тоді в розв'язку (3.7) маємо $C = P/2\pi i$.

Таким чином для F отримуємо наступне представлення

$$F z = -\frac{1}{2\pi i \bar{\lambda} X z} \int_c^d \frac{f' t X^+ t dt}{t - z} + \frac{P_y}{2\pi i X z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i |\lambda| X z} \int_c^d \frac{f' t |X t| dt}{t - z} + \frac{P_y}{2\pi i X z}. \quad (3.8)$$

Тут враховано $X^+ t = |X t| e^{\pi i^{1-\rho}} = -|X t| e^{-\pi \rho i} = -|X t| \sqrt{\bar{\lambda} / \lambda}$.

Контактні напруження знаходяться за формулою

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re} F^-.$$

Знайдемо момент M сил, які виникають під штампом при отриманому розв'язку (3.7) відносно початку координат. Він визначається за формулою

$$M = 2 \operatorname{Re} F_M ,$$

$$\text{де } F_M = \int_c^d t F^{-}(t) dt .$$

Для знаходження величини F_M врахуємо:

$$\int_{\Gamma} z F(z) dz = \int_c^d (F^{+} - F^{-}) dt = (g-1) \int_c^d t F^{-} dt + \int_c^d t f_1 dt ,$$

де Γ – замкнений контур, який вміщує відрізок c, d , інтегрування вздовж якого проходить за годинниковою стрілкою.

Звідси

$$F_M = \frac{1}{g-1} \int_{\Gamma} z F(z) dz - \frac{1}{g-1} \int_c^d t f_1 dt .$$

Далі будуть виникати інтеграли вигляду:

$$I = \int_c^d s(t) X^{+}(t) dt , \quad I_1 = \int_c^d \frac{s(t) dt}{X^{+}(t)} ,$$

які також аналогічно [87] можна звести до знаходження контурних інтегралів

$$I = \frac{1}{1-g} \int_{\Gamma} s(t) X(t) dt , \quad I_1 = \frac{g}{g-1} \int_{\Gamma} \frac{s(t) dt}{X(t)} . \quad (3.9)$$

де $s(z)$ – аналітична функція.

Ці контурні інтеграли можуть бути обчислені за допомогою методу лишків, якщо врахувати розклади в ряди Лорана при $z \rightarrow \infty$:

$$X(z) = z + l D_1 + \frac{l^2 D_2}{z} + \frac{l^3 D_3}{z^2} + \dots , \quad \frac{1}{X(z)} = \frac{1}{z} + \frac{l C_1}{z^2} + \dots , \quad (3.10)$$

$$\text{де } D_1 = d_1 - \frac{x_c}{l} , \quad D_2 = d_2 , \quad D_3 = d_3 + \frac{d_2 x_c}{l} , \quad C_1 = -D_1 , \quad x_c = \frac{d+c}{2} , \quad l = \frac{d-c}{2} ,$$

$$d_1 = -1 - 2\rho , \quad d_2 = 2\rho - 1 , \quad d_3 = \frac{2}{3}\rho - 1 - 2\rho - 1 .$$

Для знаходження контурного інтегралу врахуємо, що при $z \rightarrow \infty$:

$$F_z = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{P}{z} + \frac{1}{z^2} \left(lC_1 P_y - \int_c^d f_1(t) X^+(t) dt \right) + \dots \right].$$

Тоді використовуючи теорему про лишки знаходимо:

$$F_M = - \frac{lC_1 P_y + \frac{1}{\lambda} \int_c^d f'(t) X^+(t) dt}{g-1} + \frac{1}{\bar{\lambda} g-1} \int_c^d t f' dt.$$

Звідси отримуємо:

$$\begin{aligned} M = 2 \operatorname{Re} F_M &= lC_1 P - \frac{1}{\lambda_2} \operatorname{Im} \left[\int_c^d f'(t) X^+(t) dt \right] = \\ &= lC_1 P - \frac{\sin \pi \rho}{\lambda_2} \int_c^d f'(t) |X^+(t)| dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Тут враховано:

$$X^+(x) = |X(x)| e^{\pi i (1-\rho)} = -|X(x)| e^{-\pi i}, X^- = gX^+ = -|X(x)| e^{\pi i},$$

$$\text{де } |X(x)| = x - c^\rho d - x^{1-\rho}.$$

Приклади:

а) Розглянемо випадок плоского штампа, що повертається на кут ε , до якого прикладено вертикальну силу P_y . Тоді покладаючи в (3.8) $f' = \varepsilon$, отримуємо для функції F

$$\begin{aligned} F_A(z) &= - \frac{\varepsilon}{2\pi i \bar{\lambda} (1-g)} \int_{\Gamma} \frac{X(t) dt}{t-z} + \frac{P_y}{2\pi i X(z)} = \\ &= - \frac{\varepsilon}{\bar{\lambda} (1-g)} \left(1 - \frac{z + lD_1}{X(z)} \right) + \frac{P}{2\pi i X(z)} = \frac{\varepsilon}{2i\lambda_2} \left(1 - \frac{z + lD_1}{X(z)} \right) + \frac{P_y}{2\pi i X(z)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Момент знаходимо за формулою (3.11):

$$M = lC_1 P_y - \frac{\varepsilon}{2\lambda_2^2} \operatorname{Re} \left[\bar{\lambda} \int_{\Gamma} X(z) dz \right] = lC_1 P_y + \frac{\pi \varepsilon}{\lambda_2} l^2 D_2. \quad (3.13)$$

$$\text{Тут враховано, що } \int_{\Gamma} X dz = -2\pi i l^2 D_2.$$

З цієї формули може бути визначений кут повороту у випадку, коли заданий момент M , який прикладено до штампа:

$$\varepsilon = -\frac{\lambda_2 P_y l C_1 - M}{\pi l^2 D_2}. \quad (3.14)$$

Звідси для контактних напружень отримаємо

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re} F_A \quad x - i0 = \frac{\sin \pi \rho}{\pi |X \quad x|} \left[P_y + \frac{\pi \varepsilon}{\lambda_2} l D_1 - x \right].$$

Наведені напруження при $\varepsilon = 0$ (саме такий випадок розглянуто в [21]) збігаються з наведеними в [21] співвідношеннями.

Звідси, зокрема, для випадку ізотропного матеріалу маємо:

$$a_{22} = 1/E, \quad a_{12} = -\nu/E, \quad \alpha_{26} = 0, \quad s_1 \rightarrow i, \quad s_2 \rightarrow i, \\ \lambda = -k \left(\alpha_{12} - \frac{\alpha_{22}}{s_1 s_2} \right) + \alpha_{22} \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) = \frac{-k(1-\nu) - 2i}{E}, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{E},$$

та при $c = -l, d = l$: $C_1 = 1 - 2\rho, D_2 = 2\rho \rho - 1$.

З формули (3.14) отримаємо

$$\varepsilon = \frac{P_y l (1 - 2\rho) - M}{E \pi \rho \rho - 1 l^2}.$$

Цей розв'язок збігається з наведеними в [87] співвідношеннями для ізотропної задачі.

б) Розглянемо випадок параболічного штампа, коли $f' = x/R + \varepsilon$, до якого прикладена сила P , де ε – кут повороту штампа, R – радіус закруглення. Тоді

$$F_B \quad z = -\frac{1}{2\pi i \lambda R X \quad z} \int_{L_u} \frac{t + \varepsilon R \quad X \quad t \quad dt}{t - z} + \frac{P_y}{2\pi i X \quad z} = \\ = \frac{1}{2i \lambda_2 R} \left(z + \varepsilon R - \frac{z^2 + l D_1 + \varepsilon R \quad z + l D_1 \varepsilon R + l^2 D_2 - \frac{P_y \lambda_2 R}{\pi}}{X \quad z} \right). \quad (3.15)$$

Момент знаходимо за формулою (3.11):

$$M = l C_1 P_y - \frac{1}{2R \lambda_2^2} \operatorname{Re} \left[\bar{\lambda} \int_{\Gamma} z + \varepsilon R \quad X \quad z \quad dz \right] = l C_1 P_y + \frac{l^2}{2R \lambda_2^2} 2\pi \lambda_2 \quad D_2 \varepsilon R + l D_3 =$$

$$= lC_1P_y + \frac{\pi l^2}{R\lambda_2} D_2\varepsilon R + lD_3 .$$

$$\text{Тут враховано, що } \int_{\Gamma} z + \varepsilon R \, X dz = -2\pi i l^2 \varepsilon R D_2 + lD_3 .$$

З цієї формули може бути визначений кут повороту у випадку, коли заданий момент, який прикладено до штампа:

$$D_2R\varepsilon = M - lC_1P_y \frac{R\lambda_2}{\pi l^2} - lD_3 . \quad (3.16)$$

Розглянемо випадок, коли область контакту невідома. Використаємо заміну $z = \zeta + x_c$. Тоді з (3.15) отримуємо

$$F_B = \frac{1}{2i\lambda_2 R} \left(\zeta + \varepsilon' - \frac{\zeta^2 + l d_1 + \varepsilon' \zeta + l d_1 \varepsilon' + l^2 d_2 - P_y \lambda_2 R / \pi}{X_0(\zeta)} \right),$$

$$\text{де } \varepsilon' = x_c + \varepsilon R, \quad X_0(\zeta) = (\zeta + l)^\rho (\zeta - l)^{1-\rho} .$$

Область контакту знаходимо з умов обмеженості напружень при $\zeta = \pm l$, які набувають вигляду:

$$l d_1 + \varepsilon' = 0, \quad l^2 + l d_1 \varepsilon' + l^2 d_2 - P_y \lambda_2 R / \pi = 0 .$$

До цих рівнянь долучаємо взаємозв'язок між моментом і поворотом штампа

$$d_2 \varepsilon' = M - lC_1P_y \frac{R\lambda_2}{\pi l^2} - l d_3 .$$

Із цих рівнянь отримуємо

$$\varepsilon' = -l d_1, \quad l = \sqrt{\frac{|P\lambda_2|R}{2\rho(1-\rho)\pi}}, \quad x_c = \frac{M}{P_y} + \frac{d_1}{3}l, \quad \varepsilon R = -\frac{M}{P_y} - \frac{4d_1}{3}l. \quad (3.17)$$

Тоді

$$F_B \, z = \frac{1}{2i\lambda_2 R} \left(\zeta + \varepsilon' - \frac{\zeta^2 - l^2}{X_0 \zeta} \right) = \frac{P_y}{4\pi i \rho(1-\rho)l^2} \left[\zeta - l d_1 + \frac{l^2 - \zeta^2}{X_0 \zeta} \right].$$

$$\text{Тут враховано, що: } d_1 = -\frac{1}{1-2\rho}, \quad d_2 = \frac{2\rho}{\rho-1}, \quad d_3 = \frac{2}{3}\rho \frac{\rho-1}{2\rho-1} .$$

$$\frac{1}{\lambda_2 R} = \frac{P_y}{2\rho(1-\rho)\pi l^2} .$$

Тоді контактні напруження під штампом будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{2P_y}{4\pi\rho} \frac{1-\rho}{1-\rho} \frac{1}{l^2} \operatorname{Re} \frac{1}{i} \frac{l^2 - \xi^2}{X_0 \xi} = \frac{\sin \pi\rho P_y}{2\pi\rho} \frac{1-\rho}{l^2} \frac{l^2 - \xi^2}{\left| X_0 \xi \right|} = \\ &= P_y \frac{\sin \pi\rho}{2\pi\rho} \frac{1-\rho}{l^2} l + \xi^{1-\rho} l - \xi^\rho,\end{aligned}$$

де $\xi = x - x_c$.

З умови екстремуму знаходимо, що максимальні за величиною контактні напруження досягаються при $\xi = l(1-2\rho)$, при цьому

$$\max|\sigma_y| = -P_y \frac{\sin \pi\rho}{2\pi\rho} \frac{1-\rho}{l^2} 2l(1-\rho)^{1-\rho} \rho^\rho = -P_y \frac{\sin \pi\rho}{\pi l} (1-\rho)^{-\rho} \rho^{\rho-1} = p_0.$$

Тобто, максимальний тиск під штампом буде визначатись за формулою

$$p_0 = -\frac{P_y}{l} g(\rho), \quad g(\rho) = \frac{\sin \pi\rho}{\pi\rho} \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right)^\rho. \quad (3.18)$$

Тобто, максимальний тиск визначається через параметр ρ . Графік функції $g(\rho)$ наведено на рис. 3.1.

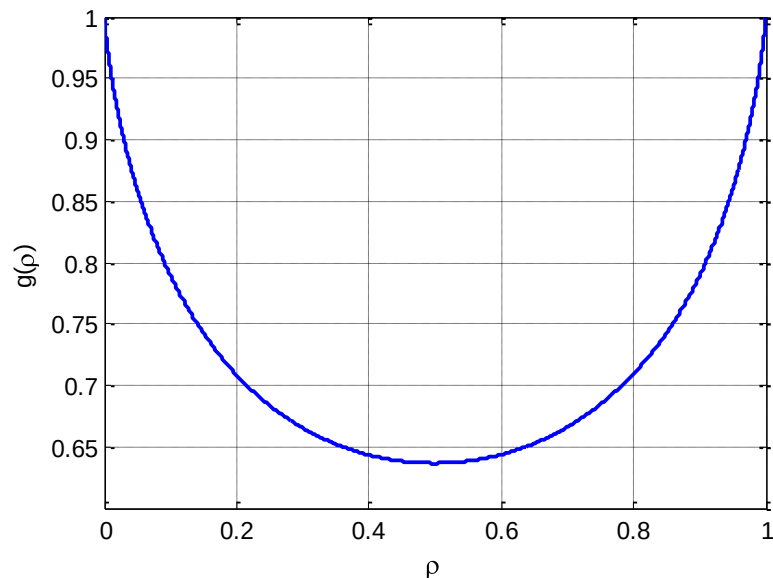


Рис. 3.1. Графік функції $g(\rho)$

Враховуючи, що при $0 \leq \rho \leq 1$:

$$\frac{2}{\pi} \leq g(\rho) \leq 1,$$

отримаємо, що максимальні напруження змінюються в межах

$$\frac{2}{\pi} \frac{P}{l} \leq |\sigma_y| \leq \frac{P}{l}, \quad (3.19)$$

причому найменше значення досягається при $\rho = 0.5$, тобто при коефіцієнті тертя $k = 0$.

Приймемо, що відомий максимальний тиск під штампом p_0 . Визначимо сумарну силу, яка прикладена до штампа. Для цього врахуємо, що

$$P = p_0 l / g \quad \rho \quad \text{та} \quad l = - \frac{p_0 \lambda_2 R}{2\rho \frac{1-\rho}{g} \rho \pi}.$$

Тоді отримаємо взаємозв'язок виду:

$$P_y = -p_0 l / g = \frac{p_0^2 \lambda_2 R}{2g^2 \rho \frac{1-\rho}{\pi}}. \quad (3.20)$$

Контактний тиск може бути переписаний у вигляді:

$$\sigma_y \xi = p_0 U \xi / l,$$

де

$$U(x) = \frac{1 + x^{1-\rho} - x^\rho}{2 \frac{1-\rho}{\rho}},$$

причому при $-l < \xi < l$ максимального значення функція U досягає при $\xi = l \frac{1-2\rho}{\rho}$ і дорівнює 1.

Основна функція має вигляд:

$$F_B z = \frac{p_0}{4\pi i \rho \frac{1-\rho}{g} \rho} \left[\eta + 1 - 2\rho - \eta + 1^{1-\rho} \eta - 1^\rho \right], \quad (3.21)$$

де $\eta = z - x_c / l$.

3.2. Дислокаційний розв'язок для анізотропної півплощини, що знаходиться під дією плоского штампа за врахування тертя

Для знаходження потенціалів, які входять у інтегральне зображення (2.21) необхідно визначити потенціали, які мають задані особливості:

$$\Phi_{z_1} \sim \frac{A}{z_1 - z_{1,0}}, \quad \Psi_{z_2} \sim \frac{B}{z_2 - z_{2,0}},$$

коли під штампом (у області L_u) похідна від переміщень $v' = \varepsilon$ та $\tau_{xy} - k\sigma_y = 0$, поза штампом межа не навантажена, головний вектор та момент сил, прикладе-

них до штампа дорівнюють нулю (із останньої умови визначається незадана стала ε).

Тут $A, B, z_{j,0}$ – довільні комплексні сталі, причому $\text{Im } z_{j,0} < 0, j = \overline{1,2}$.

Розв'язок задачі зобразимо у вигляді сум:

$$\Phi z = \Phi_1 z + \Phi_2 z, \Psi z = \Psi_1 z + \Psi_2 z,$$

де функції Φ_1, Ψ_1 є потенціалами для півплощини з вільною межею, що мають задані особливості (вони визначаються за формулами (2.25), $\Phi_2 z, \Psi_2 z$ – корегувальний розв'язок.

Функції $\Phi_2 z, \Psi_2 z$ знаходимо з умови, що відповідні їм напруження і нормальні переміщення v на межі задовольняють умови: $v' + v'_1 = \varepsilon, \tau_{xy} - k\sigma_y = 0$ в області $L_u, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$ в області $L_\sigma, v'_1 = dv_1/dx, v_1$ – нормальні переміщення, які відповідають потенціалам Φ_1, Ψ_1 .

Похідна від переміщень при $x \in L_u$, яка відповідає потенціалам Φ_1, Ψ_1 , буде

$$v'_1 = R x = 2 \text{Re} [q_1 \Phi_1 x + q_2 \Psi_1 x] = 2 \text{Re} [\alpha \Phi_0 x + \beta \Psi_0 x],$$

де $\alpha = q_1 + \overline{\alpha_1 q_1} + \overline{\alpha_2 q_2}, \beta = q_2 + \overline{\beta_1 q_1} + \overline{\beta_2 q_2},$

$$\alpha_1 = \frac{\overline{s_1} - s_2}{\delta_1}, \beta_1 = \frac{\overline{s_2} - s_2}{\delta_1}, \alpha_2 = \frac{s_1 - \overline{s_1}}{\delta_1}, \beta_2 = \frac{s_1 - \overline{s_2}}{\delta_1}, \delta_1 = s_2 - s_1.$$

Після перетворень маємо:

$$\alpha = \alpha_{22} \frac{(\overline{s_1} - s_1)(\overline{s_2} - s_1)}{s_1 s_1 s_2} = \Delta_1 \frac{s_2}{s_1 - s_2}, \beta = \alpha_{22} \frac{(\overline{s_1} - s_2)(\overline{s_2} - s_2)}{s_2 s_1 s_2} = -\Delta_2 \frac{s_1}{s_1 - s_2},$$

$$R x = \frac{A'}{x - z_{1,0}} + \frac{B'}{x - z_{2,0}} + \frac{\overline{A'}}{x - \overline{z_{1,0}}} + \frac{\overline{B'}}{x - \overline{z_{2,0}}},$$

де $A' = \alpha A, B' = \beta B_2$.

Тоді потенціали Φ_2, Ψ_2 є розв'язком контактної задачі для півплощини при $f' = -R + \varepsilon$ за умови, що головний вектор і момент сил, прикладених до штампа дорівнюють нулю. На основі (3.4), (3.8) маємо:

$$\begin{aligned}\Phi_2 z &= \frac{S_2}{S_2 - S_1} [F_2 z + F_\varepsilon z] \\ \Psi_2 z &= -\frac{S_1}{S_2 - S_1} [F_2 z + F_\varepsilon z]\end{aligned}\quad (3.22)$$

де функція F_2 – відповідає $f' = -R$ і на основі (3.8) буде мати вигляд:

$$F_2 z = \frac{1}{2\pi i \bar{\lambda} X z} \int_c^d \frac{R t X^+ t dt}{t - z_0},$$

а функція F_ε , яка відповідає випадку $f' = \varepsilon$, визначається за формулою (3.12) при $P = 0$.

Функція F_2 визначається за формулою

$$F_2 z = \frac{1}{\bar{\lambda} X z} \left[A' W_{z, z_{1,0}} + B' W_{z, z_{2,0}} + \bar{A}' W_{z, \bar{z}_{1,0}} + \bar{B}' W_{z, \bar{z}_{2,0}} \right],$$

де

$$W_{z, c} = \frac{1}{2\pi i} \int_c^d \frac{X^+(t) dt}{t - z - t - c}.$$

Використовуючи метод лишків, знаходимо

$$W_{z, c} = \frac{1}{2\pi i (1 - g)} \int_{\Gamma} \frac{X t dt}{t - z - t - c} = \frac{1}{1 - g} \left[\frac{X z - X c}{z - c} - 1 \right].$$

Далі розглядається випадок, коли $\operatorname{Re} A' + B' = 0$. Тоді

$$F_2 z = \frac{i}{2\lambda_2 X z} \left[A' w_{z, z_{1,0}} + B' w_{z, z_{2,0}} + \bar{A}' w_{z, \bar{z}_{1,0}} + \bar{B}' w_{z, \bar{z}_{2,0}} \right],$$

де

$$w_{z, c} = \frac{X z - X c}{z - c}.$$

Знайдемо момент, який відповідає потенціалам Φ_2 , Ψ_2 на основі формули (3.11)

$$\begin{aligned}M_2 &= \frac{1}{\lambda_2} \operatorname{Im} \left[\int_c^d R t X^+ t dt \right] = \frac{1}{2\lambda_2^2} \operatorname{Re} \left[\bar{\lambda} \int_{\Gamma} R z X z dz \right] = \\ &= \frac{1}{2\lambda_2^2} \operatorname{Re} \bar{\lambda} 2\pi i \left[A' H_2 z_{1,0} + B' H_2 z_{2,0} + \bar{A}' H_2 \bar{z}_{1,0} + \bar{B}' H_2 \bar{z}_{2,0} \right] =\end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_2} \operatorname{Re} \left[A' H_2 z_{1,0} + B' H_2 z_{2,0} \right],$$

де

$$H_2 z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{X(t)}{t-z} dt = X(z) - z + iD_1.$$

Тобто

$$M_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \operatorname{Re} \left[A' w_0 z_{1,0} + B' w_0 z_{2,0} \right],$$

де $w_0(z) = X(z) - z$.

Щоби забезпечити відсутність навантаження, прикладеного до штампа, в розв'язку (3.12), (3.13) для F_ε покладемо $M = -M_2$, $P = 0$. Звідси отримуємо

$$F_\varepsilon z = \frac{M_2 i}{\pi l^2 D_2} \left(1 - \frac{z + iD_1}{X(z)} \right).$$

Зазначимо, що

$$A'_1 = -\frac{i}{2\pi} \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2}, \quad B'_1 = -A'_1, \quad A'_2 = \frac{i}{2\pi} \frac{s_2}{s_1 - s_2}, \quad B'_2 = -\frac{i}{2\pi} \frac{s_1}{s_1 - s_2}.$$

3.3. Розрахунок напружень у півплощині з отворами під час дії плоского штампа за врахування тертя

Розглянемо півплощину $y < 0$ з отворами, в яку, якщо $y = 0$, $-a < x < a$, втискається з тертям плоский штамп. Прийнемо, що головний вектор і момент сил, які прикладені до штампа, дорівнюють P і $M = 0$.

Для знаходження потенціалів Φ_D^j та Ψ_D^j , $j = \overline{1, 2}$, які входять в інтегральне зображення (2.21), знайдемо згідно особливості, яка задається залежностями (2.20). При цьому шукану функцію $F(z)$ будемо задавати у представленні (3.12). А момент для даної постановки шукатимемо за формулою (3.13). Розрахунки виконано для склопластику, механічні характеристики якого наведено в таблиці 1.1.

Розглянуто випадок (постановку задачі схематично наведено на рис. 3.2a), коли скло-епоксидна півплощина послаблена круговим отвором, коефіцієнт тертя під штампом становить $k = 0.5$.

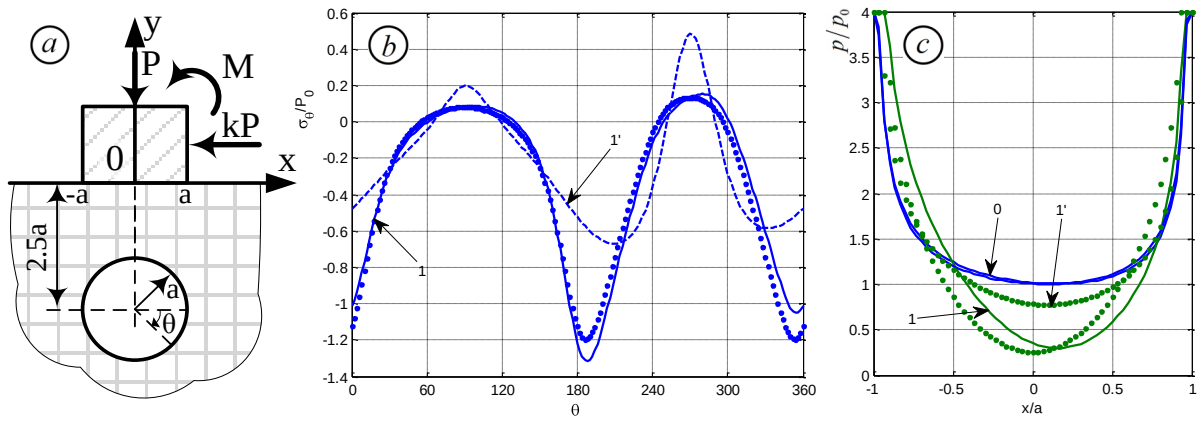


Рис. 3.2. Схема задачі (а), відносні напруження на межі отвору (b) та контактний тиск (с) для скло-епоксидної півплощини

На рис. 3.2b наведено результати розрахунків відносних колових напружень $\sigma = \sigma_\theta / P_0$ ($P_0 = P/a$) на межі отвору залежно від кутової координати, яку відлічуємо від самої правої точки отвору за годинниковою стрілкою. Кривим 1 відповідає випадок, коли $E_y > E_x$, а кривим 1' – $E_x > E_y$. Крапками наведено для порівняння розподіл відносних напружень за умови відсутності тертя.

Відносний контактний тиск під штампом p/p_0 ($p_0 = P/\pi a$) наведено на рис. 3.2c. Тут додатково наведено відносний контактний тиск для випадку суцільної півплощини – крива 0.

Аналогічні результати для матеріалу бор-епоксид наведено на рис. 3.3.

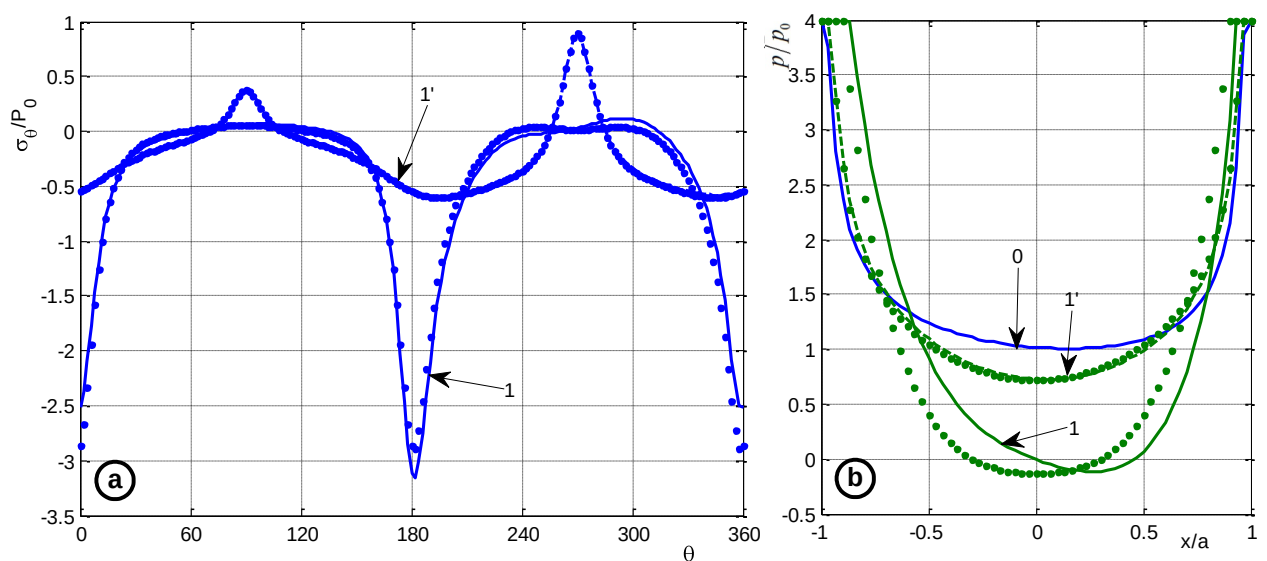


Рис. 3.3. Відносні напруження на межі отвору (а) та контактний тиск (b)

Із рисунків видно, що врахування тертя неістотно змінює напруження на межі отвору, особливо для матеріалів із $E_x > E_y$. Дещо більше впливає тертя на розподіл контактних напружень під штампом для матеріалів із $E_y > E_x$.

Аналогічні результати для скло-епоксидної півплощини у випадку, коли отвір зсунутий (рис. 3.4a) наведено на рис. 3.4.

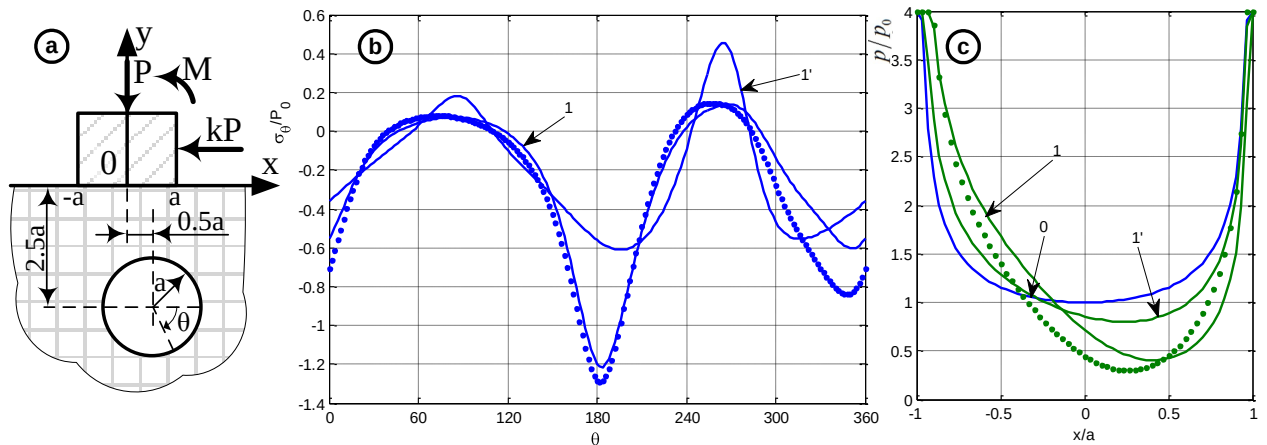


Рис. 3.4. Схема задачі (a), відносні напруження на межі зсунутого отвору (b) та контактний тиск (c) для скло-епоксидної півплощини

Видно, що для зсунутого вправо отвору тертя також неістотно вплинуло на розподіл напружень на межі отвору і більше змінює контактні напруження.

На рис. 3.5 наведено результати розрахунків для скло-епоксидної півплощини у випадку, коли отвір зсунутий вліво і його центр розміщено в точку $-0.5a, -2.5a$.

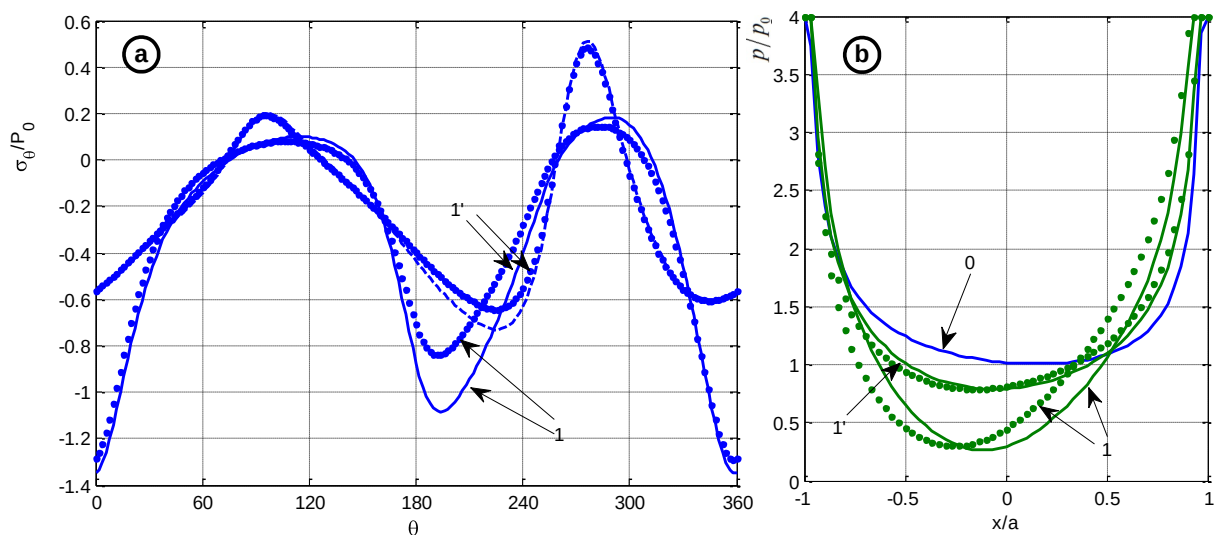


Рис. 3.5. Відносні напруження на межі зсунутого вліво отвору (a) та контактний тиск (b) для скло-епоксидної півплощини

Із наведених графіків видно, що для зсунутого вліво отвору (в напрямку дії горизонтальної сили, що прикладена до штампа) тertia більш істотно впливає на напруження в півплощині.

Розглянуто отвір еліптичної форми (рис. 3.6a). Розраховані відносні напруження наведено на рис. 3.6.

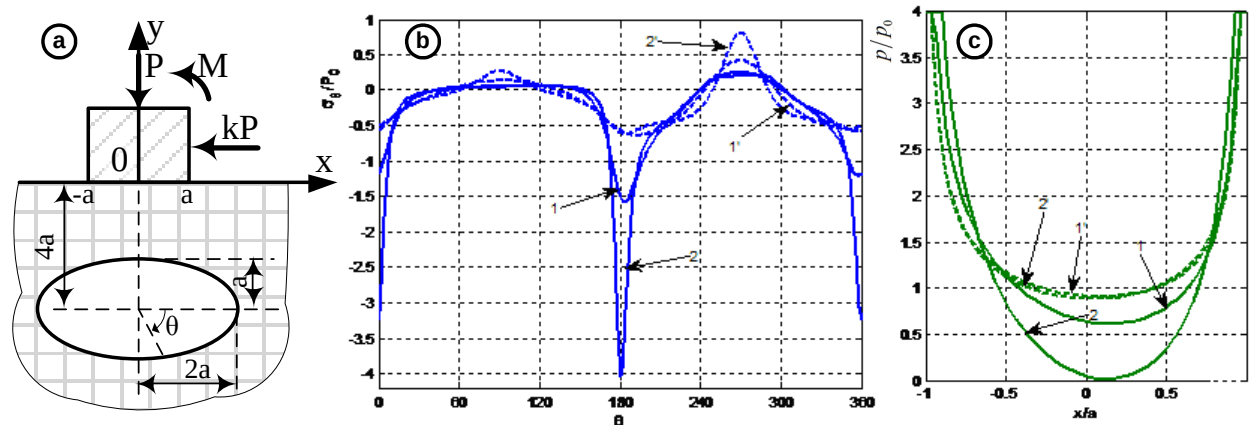


Рис. 3.6. Схема задачі (a), відносні напруження на межі еліптичного отвору (b) та контактний тиск (c) для скло-епоксидної і бор-епоксидної півплощин

Для істотно анізотропного матеріалу (бор-епоксид) при відстанях центру еліптичного отвору від межі півплощини, менших за $4a$, в центральній частині штампа починається відлипання.

Виконано розрахунки для випадку, коли отвір має квадратну форму з півстороною a із закругленими вершинами (рис. 3.7a), центр отвору розміщено в точках $ma, -2a$ при $m = 0, \pm 0.5, \pm 1$. Результати розрахунків відносного тиску під штампом для ізотропної пластинки при $k = 0.2$ наведено на рис. 3.7b, на якому біля кривих вказано значення параметра m . На рис. 3.7c наведено відносні кільцеві напруження на межі отвору. Тут на кривих вказано точки $A_1, \dots, A_8$, які розміщені на межі (рис. 3.7a).

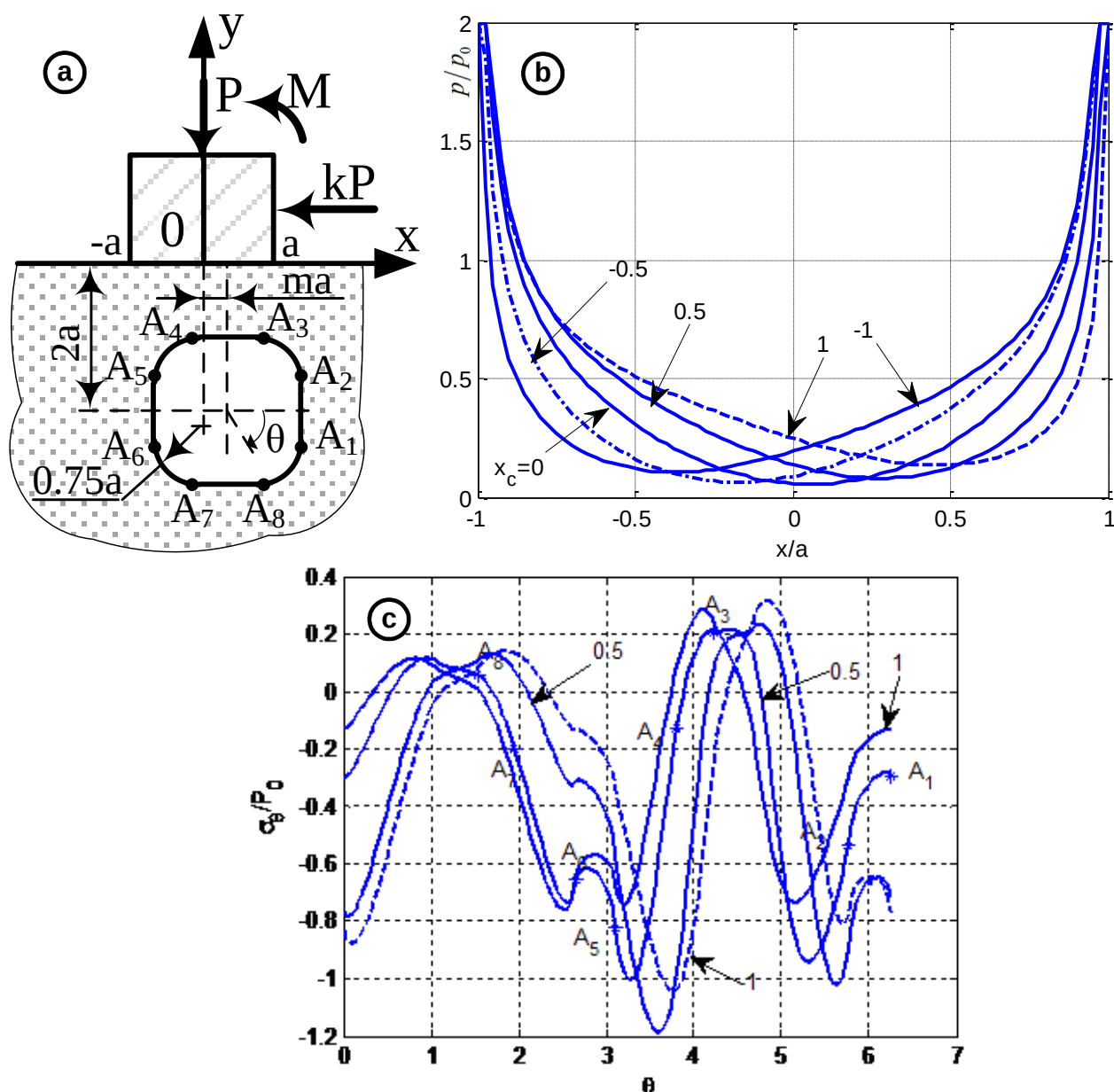


Рис. 3.7. Схема задачі (а), тиск під штампом (b) та відносні кільцеві напруження на межі отворів (с) у ізотропній півплощині залежно від розміщення штампа

Аналогічні результати розрахунків для бор-епоксиду наведено на рис. 3.8.

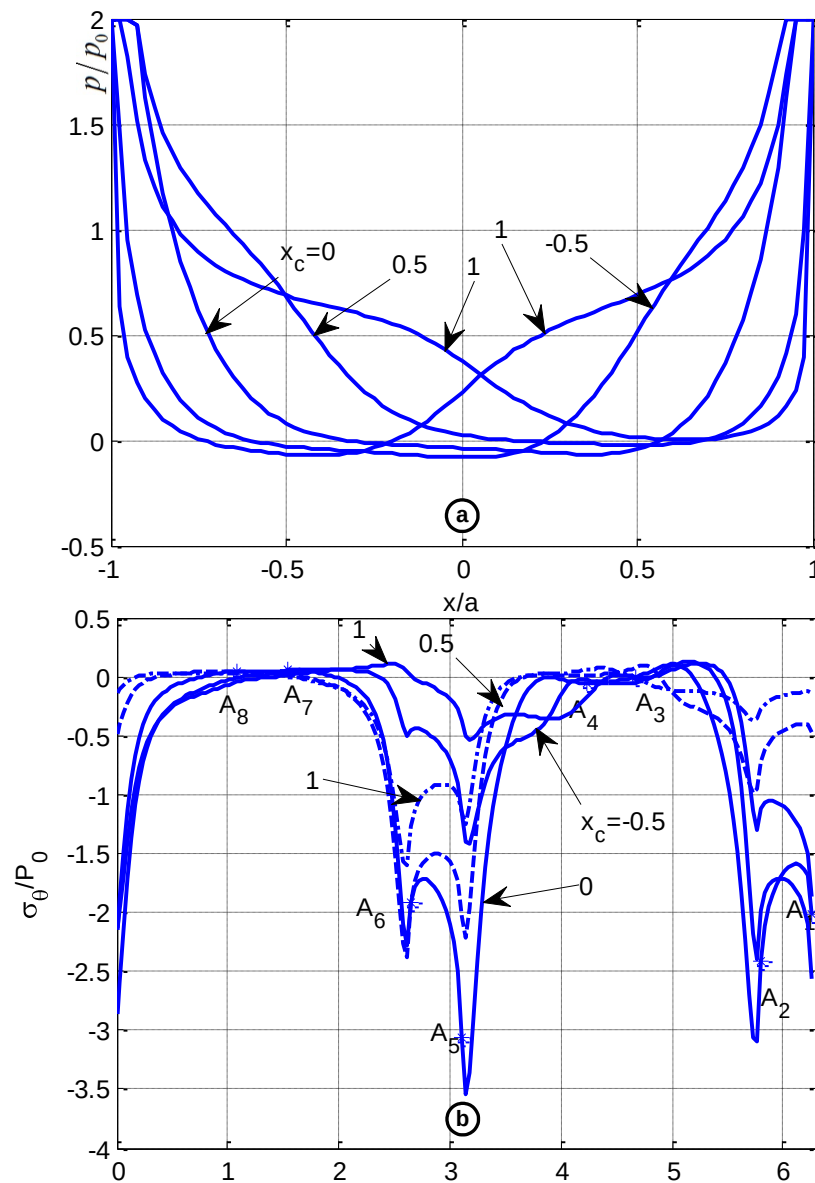


Рис. 3.8. Відносні контактний тиск під штампом (а) та кільцеві напруження на межі отворів (б) у бор-епоксидній півплощині залежно від розміщення штампа

3.4. Напруження в анізотропній півплощині з отворами за дії параболічного штампа та врахування тертя

3.4.1. Постановка задачі та приклади реалізації методики її вирішення

Виконано дослідження напружень у півплощині з одним отвором із центром у точці x_c, y_c , яка перебуває під дією параболічного штампа з радіусом закруглення у вершині R за врахування тертя. Тут прийнято, що центр основи штампа до навантаження розташований в початку координат, і до нього прикладені сила P та момент M .

Проведено дослідження напружень на межі отворів та під штампом при малих радіусах закруглення основи штампа (при $R/a < 1$). Аналогічно, як і у випадку відсутності тертя (див. розд. 2), область контакту виявилась малою, а тому отвір мало впливав на контактні напруження під штампом. В зв'язку з цим контактні напруження під штампом для ізотропного й композитних матеріалів для випадків плоскої деформації і ПНС можуть бути розраховані на основі точного розв'язку для суцільної півплощини. Тому для розрахунку напружень біля отвору можуть бути використані простіші методи розрахунку, наприклад, шляхом заміни штампа зосередженою силою. Нижче розглянуто контактні задачі при великих радіусах закруглення основи штампа.

Розрахунки виконано для півплощини з круговим отвором радіуса a , при $R/a = 50$ і $k = 0.5$ для випадку ізотропного матеріалу залежно від рівня прикладеного навантаження (рис. 3.9). Прийmemo, що $M = 0$. На рис. 3.9с кривій 1 відповідає віднесений до p_0 контактний тиск, який виникає при $p_0 = 200$ МПа, кривій 2 – $p_0 = 400$ МПа. Штриховими лініями наведені контактний тиск під штампом у суцільній півплощині. Тут і далі p_0 – максимальний тиск під штампом у суцільній півплощині при заданому навантаженні P , причому ці величини пов'язані співвідношенням (3.18) у вигляді:

$$P = -p_0 l / g = \frac{p_0^2 \lambda_2 R}{2g^2 \rho (1-\rho) \pi}, \text{ де } g \rho = \frac{\sin \pi \rho}{\pi \rho} \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right)^{\rho}.$$

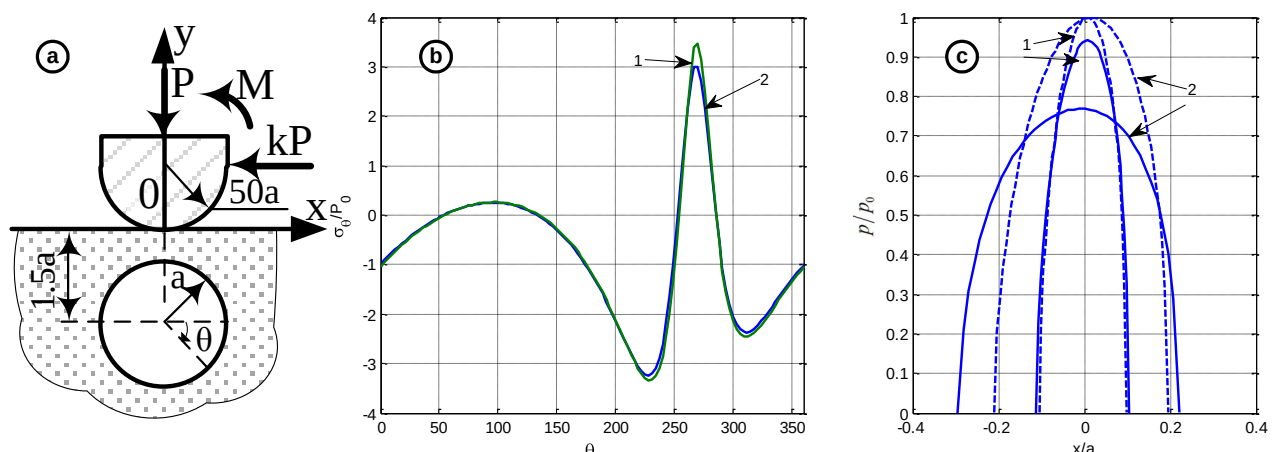


Рис. 3.9. Схема задачі (а), напруження на межі отвору (б) та під штампом (с) для ізотропного матеріалу

На рис. 3.9а наведено віднесені до величини $P_0 = -P/a$ кільцеві напруження σ_θ залежно від кутової координати θ , яку відлічуємо від самої правої точки межі отвору за годинниковою стрілкою.

Видно, що контактний тиск істотно залежить від рівня прикладених до штампа зусиль, в той же час відносні напруження на межі отвору виявились близькими при різних навантаженнях.

Розглянуто композитний матеріал графіт-епоксид, для якого пружні сталі наведено в таблиці 2.1.

Отримані результати розрахунків при $p_0 = 200$ МПа, $R/a = 50$ для випадку плоскої деформації наведено графічно на рис. 3.10 суцільними кривими 2. Аналогічні дані для випадку ПНС – штриховими лініями 1.

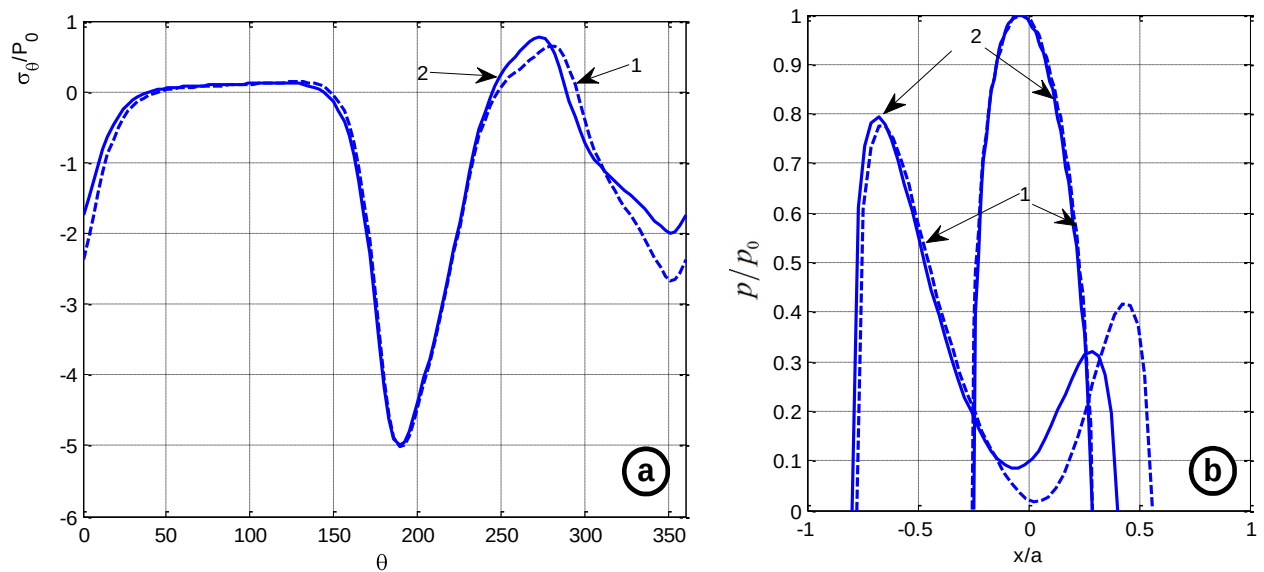


Рис. 3.10. Напруження на межі отвору (а) і під штампом (б) для матеріалу графіт-епоксид, плоска деформація і ПНС

З рис. 3.10 видно, що контактні напруження під штампом у випадку плоскої деформації та ПНС близькі за величиною, як і розподіли відносних напружень на межі отвору. Тому далі розрахунки виконано для випадку ПНС, оскільки для нього в літературі наведено значення пружних сталей для великої кількості композитних матеріалів.

Розраховані напруження при $R = 50a$, $x_c = 0$, $y_c = -1,5a$, $p_0 = 200$ МПа, та $k = 0.5$ для ізотропного матеріалу наведено на рис. 3.11 кривими 1, а для бор-епоксиду – кривими 2 (коли $E_y > E_x$) і кривим 3 (коли $E_x > E_y$).

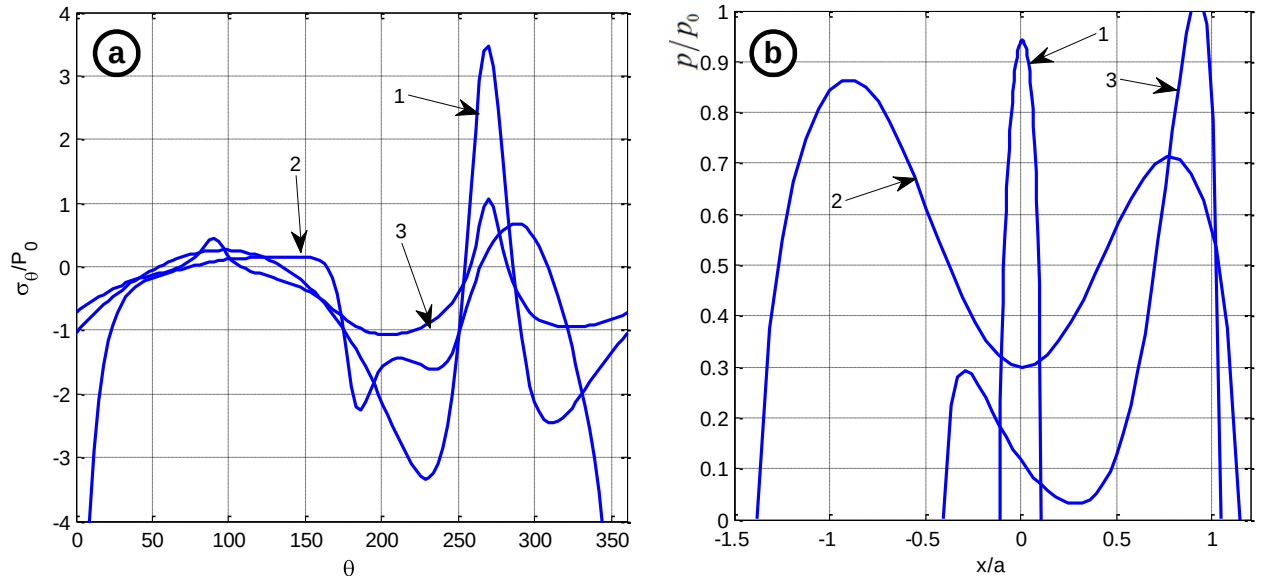


Рис. 3.11. Напруження на межі квадратного отвору (а) і під штампом (б) для ізотропного матеріалу і композиту бор-епоксид

Із рис. 3.11 видно, що розподіли контактних напружень під штампом істотно залежать від матеріалу. Найменшою виявилась область контакту для ізотропного матеріалу. Напрямок армування істотно змінює і характер розподілу контактних напружень: вони є максимальними біля лівої межі області контакту при $E_y > E_x$ і біля правої межі – при $E_x > E_y$. Також найбільшими виявились напруження на межі отвору в ізотропній півплощині, причому вони є розтягувальними.

3.4.2. Перевірка достовірності підходу

Проведено дослідження достовірності результатів, які отримано на основі розробленого алгоритму, що базується на інтегральних рівняннях, за яких строго задовольняються умови контакту під штампом. З цією метою розглянуто бор-епоксидну півплощину, послаблену круговим отвором; $p_0 = 400$ МПа. Тут вибрано велике значення p_0 з метою тестування алгоритму (постановку задачі схематично зображено на рис. 3.12d). Розраховані за розробленим алгоритмом

відносні напруження на межі отвору при $E_y > E_x$ наведено на рис. 3.12a суцільними лініями, а відносний контактний тиск під штампом – на рис. 3.12b кривою 0 (кривою 1 зображено відповідний контактний тиск у суцільній півплощині). На рис. 3.12c наведено розраховані похідні від нормальних переміщень під штампом, які знайдено на основі методу інтегральних рівнянь. Далі розглянуто півплощину з отвором (без дії штампa), до межі якої в знайденій області контакту L_u в точках $x_j = c + jh$, $j = \overline{1, 40}$ прикладено зосереджені сили (рис. 3.13b) $Y_j = -hp \ x_j$, $X_j = kY_j$, де $p \ x$ – знайдений контактний тиск, $h = \frac{d-c}{40}$. Розраховані відносні напруження на межі отвору зображено на рис. 3.13a крапками.

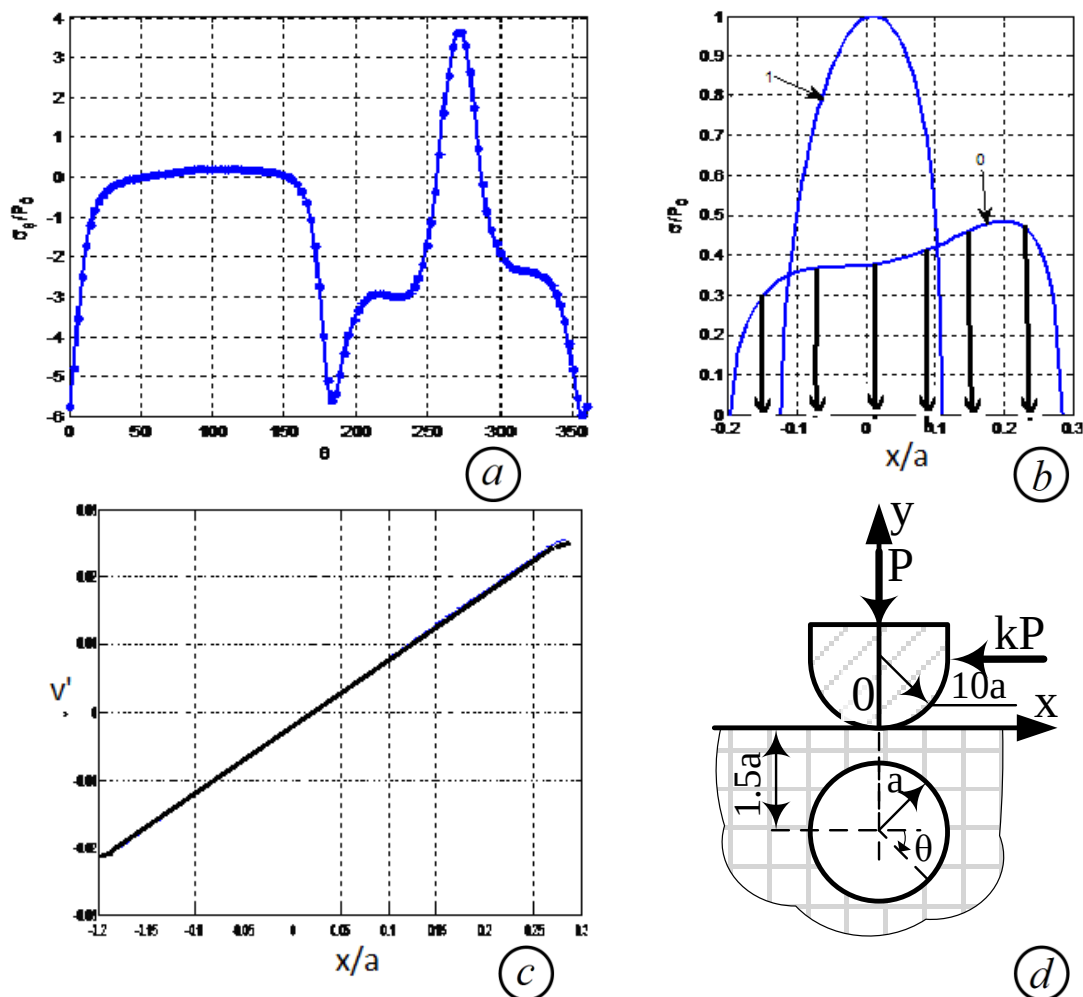


Рис. 3.12. Напруження на межі отвору (a), контактний тиск (b), похідна від переміщень (c) та схема задачі (d)

Аналогічні результати при $E_x > E_y$ зображено на рис. 3.13.

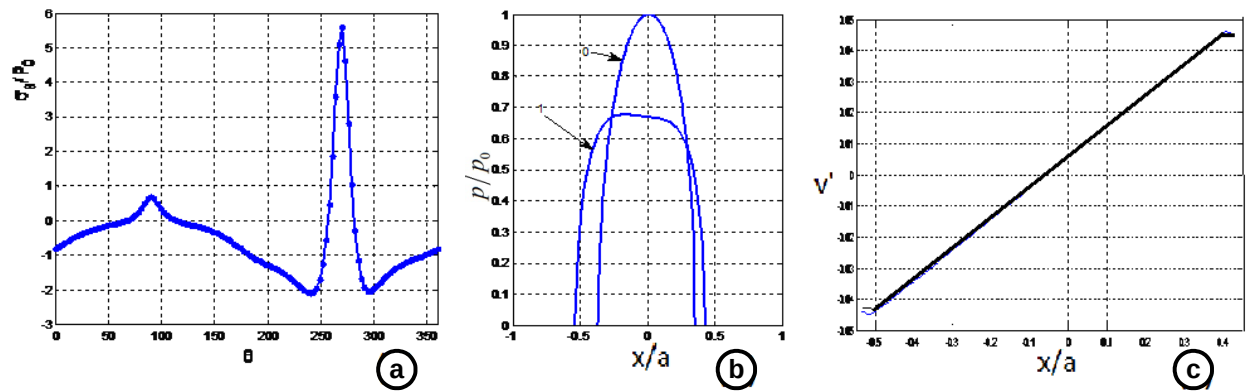


Рис. 3.13. Напруження на межі отвору (а), контактний тиск (б) та похідна від переміщень (с) для бор-епоксидної півплощини при $E_x > E_y$

Розглянуто випадок, коли розподіл контактних напружень має складний вигляд. Для цього прийнято, що круговий отвір має радіус r . При чому деякі вхідні параметри даної КЗ віднесені до нього: $x_c/r = 0.4$, $y_c/r = -2$, $k = 0.2$, $R/r = 10$ (постановку задачі схематично зображено на рис. 3.14а).

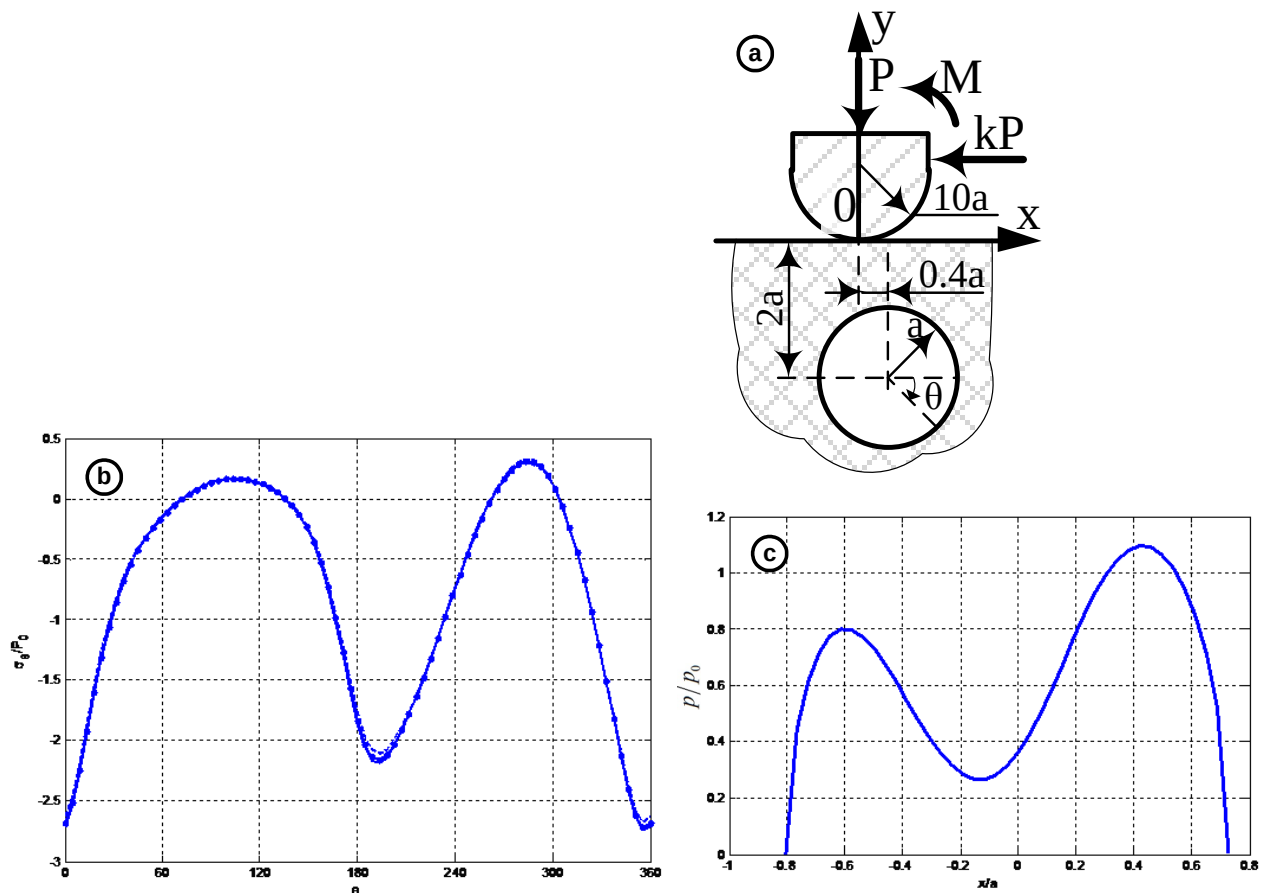


Рис. 3.14. Схема задачі (а), напруження на межі отвору (б) і контактний тиск (с) для матеріалу $ET\Phi$

Розраховані відносні величини для матеріалу ETF (для якого $E_x = 12.5$ МПа, $E_y = 29.6$ МПа) за повним алгоритмом наведені суцільними лініями на рис. 3.14b, c. Далі розглядалась півплощина, яка навантажена зосередженими силами, які замінюють контактні напруження. Розраховані відносні напруження і тиск зображено крапками при 20 вузлових точках і штриховими лініями – при 10 вузлових точках.

Із наведених рисунків видно: похідні від нормальних переміщень під штампом описуються прямими, що вказує на те, що умови контакту задовольняються; знайдені різними підходами (на основі різних інтегральних рівнянь) напруження на межі отвору є практично однаковими. Наведені результати вказують на достовірність отриманих вище результатів.

3.5. Напруження біля крайових тріщин у анізотропній півплощині за дії плоского штампа та врахування тертя

3.5.1. Постановка задачі

Розглянемо анізотропну півплощину $y < 0$, послаблену тріщиною (вона має центр у точці x_c, y_c , півдовжину a та кут нахилу до вісі Ox α), на яку при $-l < x < l$ втискається плоский штамп за врахування тертя. Прийнемо, що головний вектор і момент сил, які прикладені до штампа рівні P і M (постановку задачі схематично зображено на рис. 3.15).

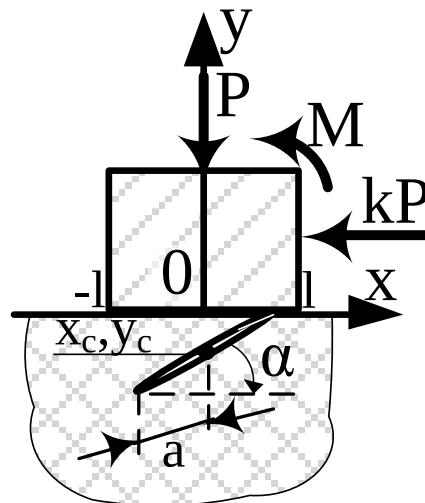


Рис. 3.15. Схема задачі

Під час знаходження КІН враховуємо контакт берегів тріщин. Функції Φ_D , Ψ_D , які входять в зображення (2.21), визначаються через наведені вище потенціали для контактної задачі, що отримані для суцільної півплощини, коли до штампа прикладена сила P і момент M .

3.5.2. Гладкі штампи

Розрахунки виконані для випадку, коли тріщина вертикальна при $M = 0$, півдовжина тріщини $a = 0.5l$ (рис. 3.16a). Результати розрахунків відносних величин $F_I = \sqrt{l}K_I / P\sqrt{\pi}$ (криві 1) та $F_{II} = \sqrt{l}K_{II} / P\sqrt{\pi}$ (криві 2) при відсутності тертя залежно від абсциси центру тріщини для ізотропного матеріалу наведено на рис. 3.16b. Штриховими лініями тут наведено розраховані КІН без урахування контакту берегів тріщин.

Зазначимо, що розрахунки виконувались при значеннях центрів тріщин $x_c = -1.5a, -1.4a, \dots, 1.5a$ наносились відповідні результати (крапки) на графіках і далі через ці крапки проводились прямі. Тобто значення КІН на графіках будуть достовірними саме за вказаних розміщень тріщин.

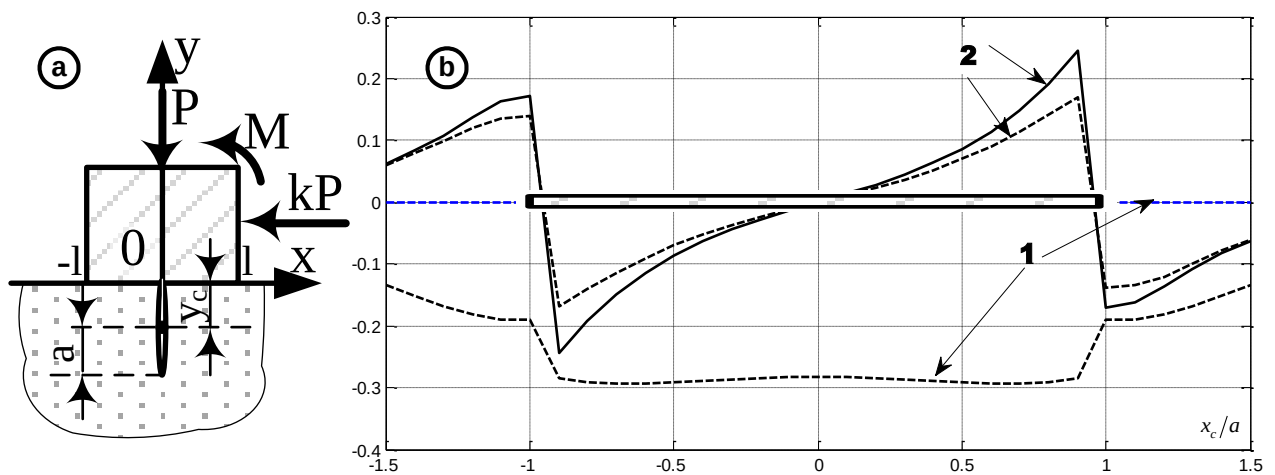


Рис. 3.16. Схема задачі (a) та відносні КІН у ізотропній півплощині (b)

Для ізотропного матеріалу за врахування контакту берегів тріщин КІН $K_I = 0$. Тому з рис. 3.16b видно, що при всіх розміщеннях тріщин, за винятком розміщених біля кінців штампа, мав місце контакт берегів тріщин. КІН K_{II} виявились максимальними під штампом в околі кінців на відстані $\approx 0.2a$.

Аналогічні результати для бор-епоксидної півплощини наведено на рис. 3.17a при $E_y > E_x$ та на рис. 3.17b – при $E_x > E_y$.

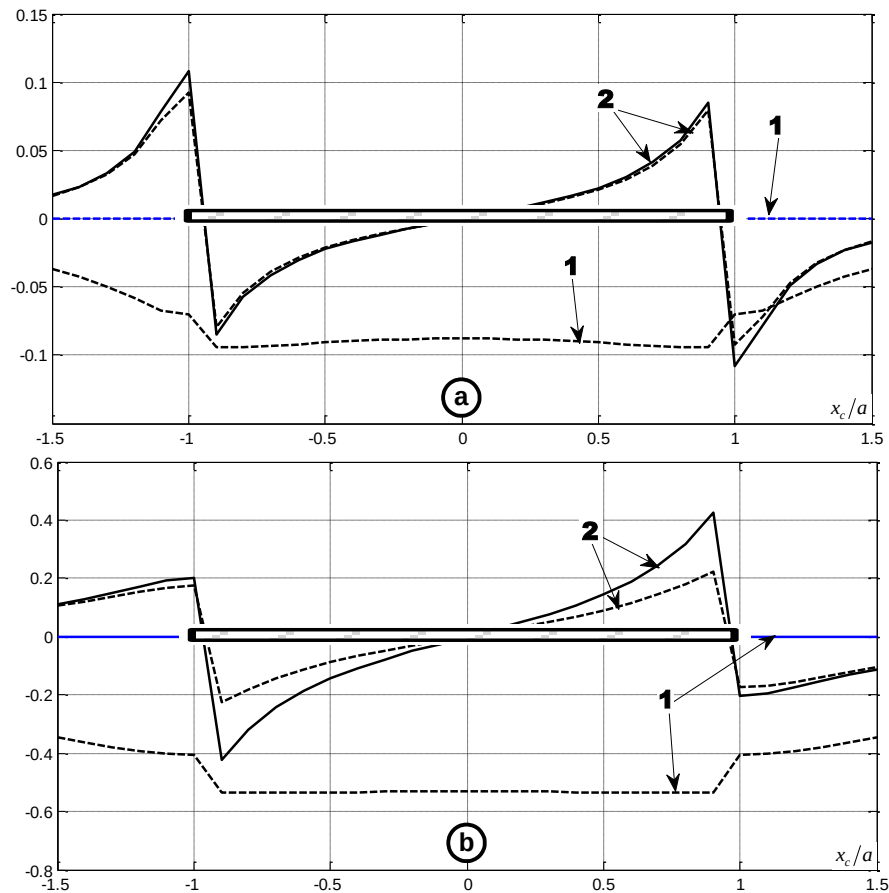


Рис. 3.17. Відносні КІН у бор-епоксидній півплощині: (a) – $E_y > E_x$, (b) – $E_x > E_y$

Видно, що за врахування контакту берегів тріщин КІН $K_I = 0$, КІН K_{II} виявились максимальними для тріщин, розміщених біля кінців штамп. Для бор-епоксидного матеріалу при $E_x > E_y$ КІН виявились значно більшими, ніж при $E_y > E_x$.

3.5.3. Урахування тертя під штампом

Аналогічні розрахунки виконано за врахування тертя під штампом. На рис. 3.18a наведено розраховані відносні КІН для бор-епоксидної півплощини при $E_y > E_x$ та на рис. 3.18b при $E_x > E_y$. У всіх цих випадках прийнято, що коефіцієнт кулонівського тертя $k = 0.5$.

З рис. 3.18 видно, що тертя істотно змінило не лише значення, а і характер розподілу КІН. В обох випадках КІН є максимальними для тріщин, що роз-

міщені в околі правого кінця штамп, при цьому вони можуть досягати великих значень.

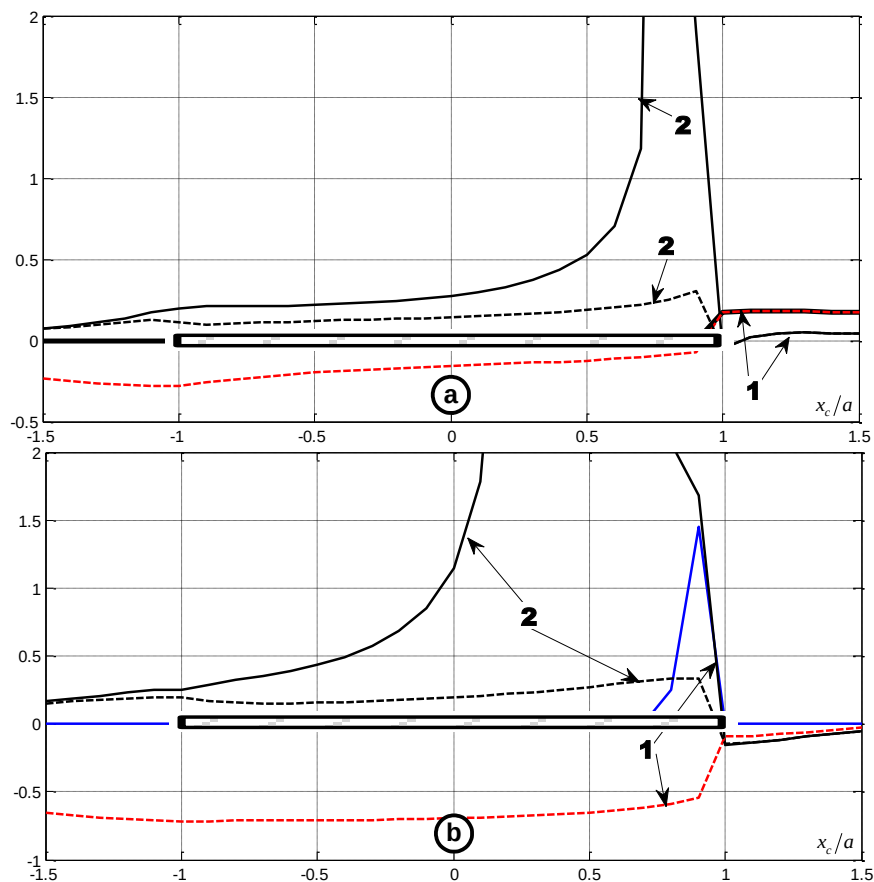


Рис. 3.18. Відносні КІН у бор-епоксидній півплощині за врахування тертя при $k = 0.5$: (a) – $E_y > E_x$, (b) – $E_x > E_y$

3.5.4. Нахилені вісі ортотропії

Розглянуто нахилені під кутом $\alpha = -45^\circ$ до додатної півосі Ox за відсутності тертя тріщини. На рис. 3.19 наведено відносні КІН у бор-епоксидній півплощині при $E_y > E_x$.

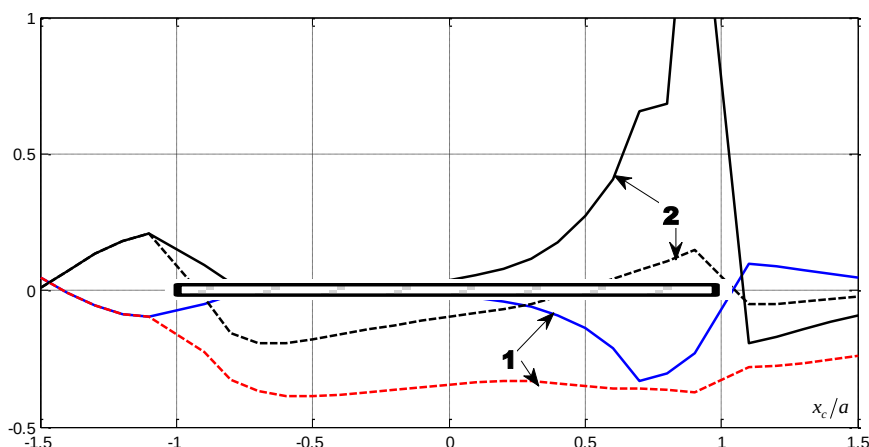


Рис. 3.19. Відносні КІН у бор-епоксидній півплощині, $\alpha = -45^\circ$

Аналогічні результати при куті повороту тріщини до додатньої півосі Ox $\alpha = -135^\circ$ наведено на рис. 3.20.

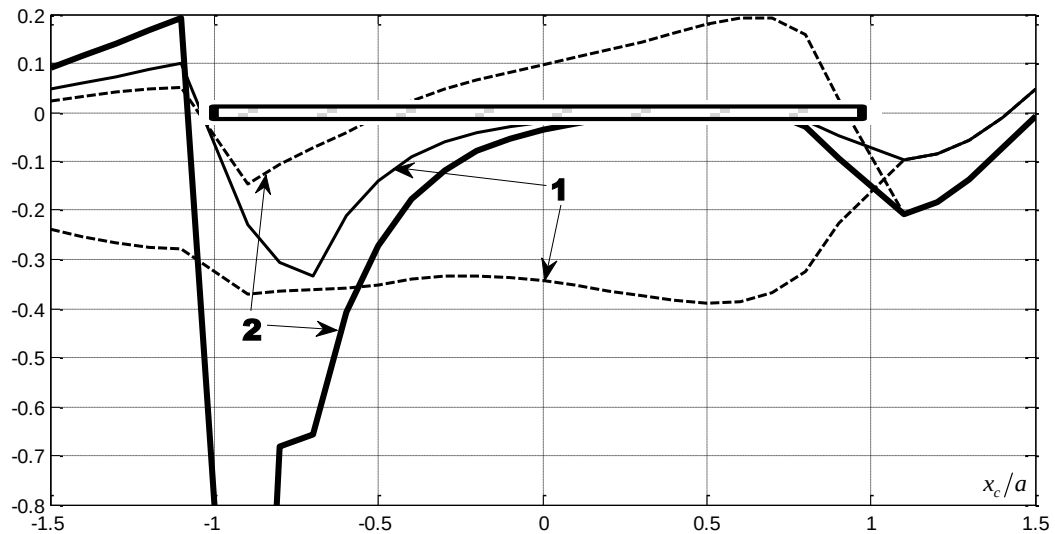


Рис. 3.20. Відносні КІН у бор-епоксидній півплощині, $\alpha = -135^\circ$

Виконано розрахунок КІН для випадку, коли кут між межею півплощини й напрямком із максимальною жорсткістю (або армувальними елементами) складає $\varphi = -30^\circ$, тертя відсутнє, тріщини перпендикулярні межі, результати яких зображено на рис. 3.21. Видно, що при даному куті нахилу до напрямку з максимальною жорсткістю матеріалу максимальні КІН виникають уже для тріщин, що лежать близько до середини області контакту.

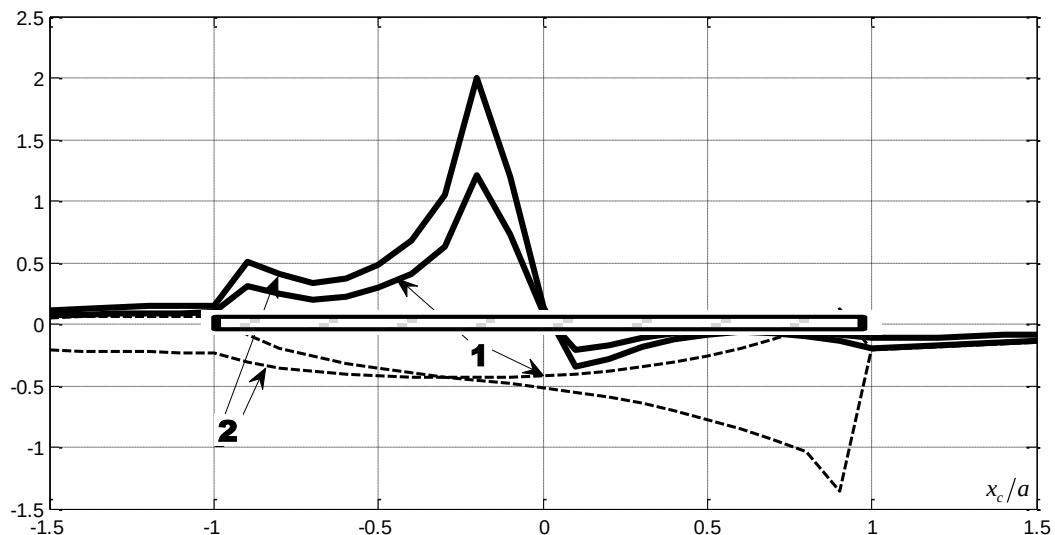


Рис. 3.21. Відносні КІН у бор-епоксидній півплощині, $\alpha = -135^\circ$, $\varphi = -30^\circ$

Порівнюючи дані рис. 3.17 і рис. 3.20–3.21 можна зробити висновок, що нахил тріщин істотно змінює характер розподілу КІН та їх значення. Зокрема, в

останньому випадку за контакту берегів тріщин виникають також значення КІН K_I . Максимальними виявились КІН K_{II} біля одного з кінців штамп, залежно від напрямку армування матеріалу.

3.5.5. Вплив довжин тріщин

Наведемо розраховані КІН при різних значеннях довжин тріщин та при $k = 0$ для бор-епоксидного матеріалу. На рис. 3.22 наведено результати при $a = l$, а на рис. 3.23 – при $a = 0.25l$.

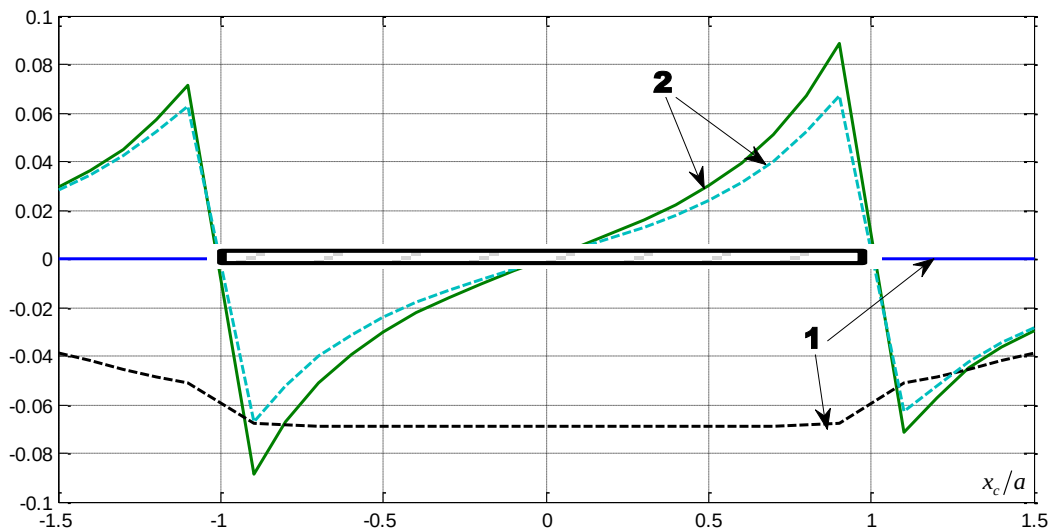


Рис. 3.22. Відносні КІН у бор-епоксидній півплощині, $E_y > E_x$, $a = l$

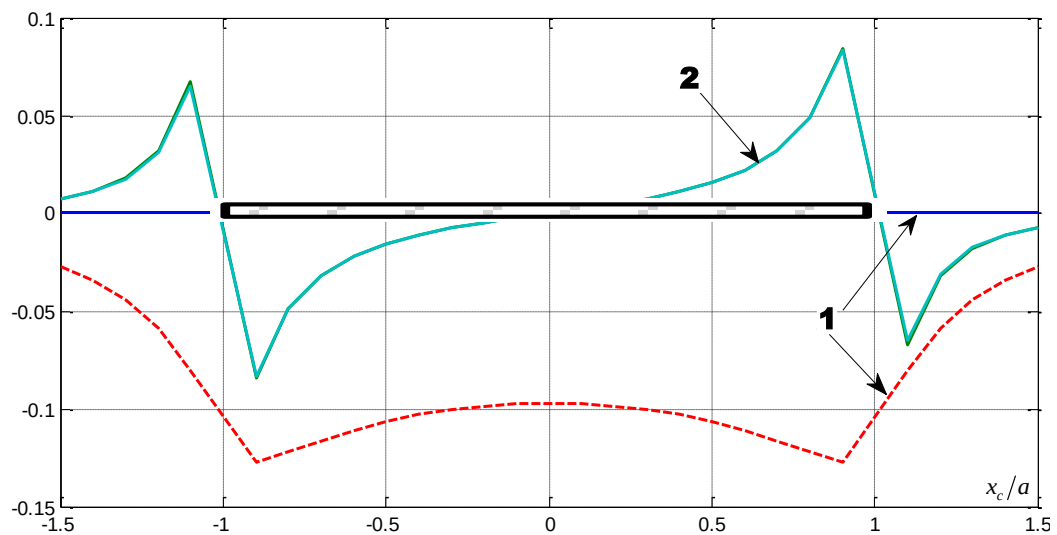


Рис. 3.23 Відносні КІН у бор-епоксидній півплощині, $E_y > E_x$, $a = 0.25l$

З рис. 3.22–3.23 видно, що за взаних вище характеристик відносні КІН зростають при зменшенні довжин тріщин.

При розрахунках приймемо, що у бор-епоксидній півплощині, тріщина нахилена під кутом $\alpha = -45^\circ$ і її півдовжина $a = 0.5l$. Відповідні результати наведено на рис. 3.24.

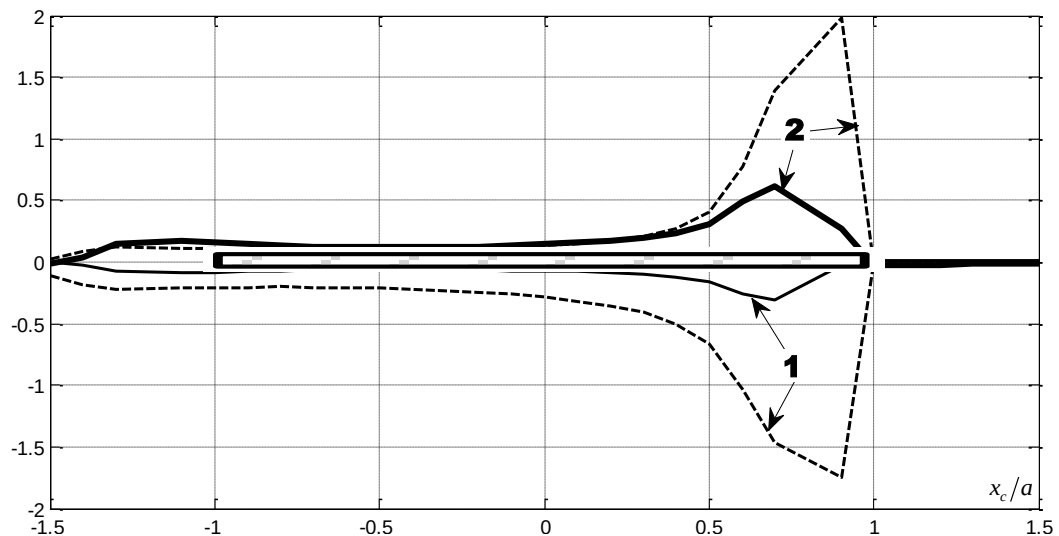


Рис. 3.24. Відносні КІН у бор-епоксидній півплощині, $\alpha = -45^\circ$, $E_y > E_x$,
 $a = 0.5l$

Видно, що максимальними виявились КІН для тріщин, що розміщені біля правого кінця штампа.

Таким чином, вище виконано дослідження КІН для тріщин з урахування контакту їх берегів. Встановлено характерні особливості розподілу напружень біля вершини крайової тріщини залежно від їх розміщення, нахилу, довжини, напрямків армування матеріалу.

Розглянуто півплощину, яка взаємодіє із плоским штампом. Опишемо випадок, коли півплощина виготовлена із крихкого матеріалу. Відомо, що в околі кінців штампа виникають тріщини, які в процесі навантаження зростають. В [44] теоретично показано, що біля кінців штампа $x = \pm a$ виникають тріщини під кутом $\approx -109.5^\circ$ до вісі Ox . У цій роботі експериментально встановлено, що ці тріщини підростають практично вздовж прямих. Проведені дослідження напружень біля крайової тріщини, яка виникла біля правого $x = a$ краю довжиною l залежно від кута нахилу тріщини за врахування контакту берегів. Результати розрахунків відносних КІН $F_{II} = \sqrt{2a}K_{II}/P$ для ізотропного

матеріалу для різних довжин тріщин наведено на рис. 3.25, на якому біля кривих вказано значення відносних довжин l/a .

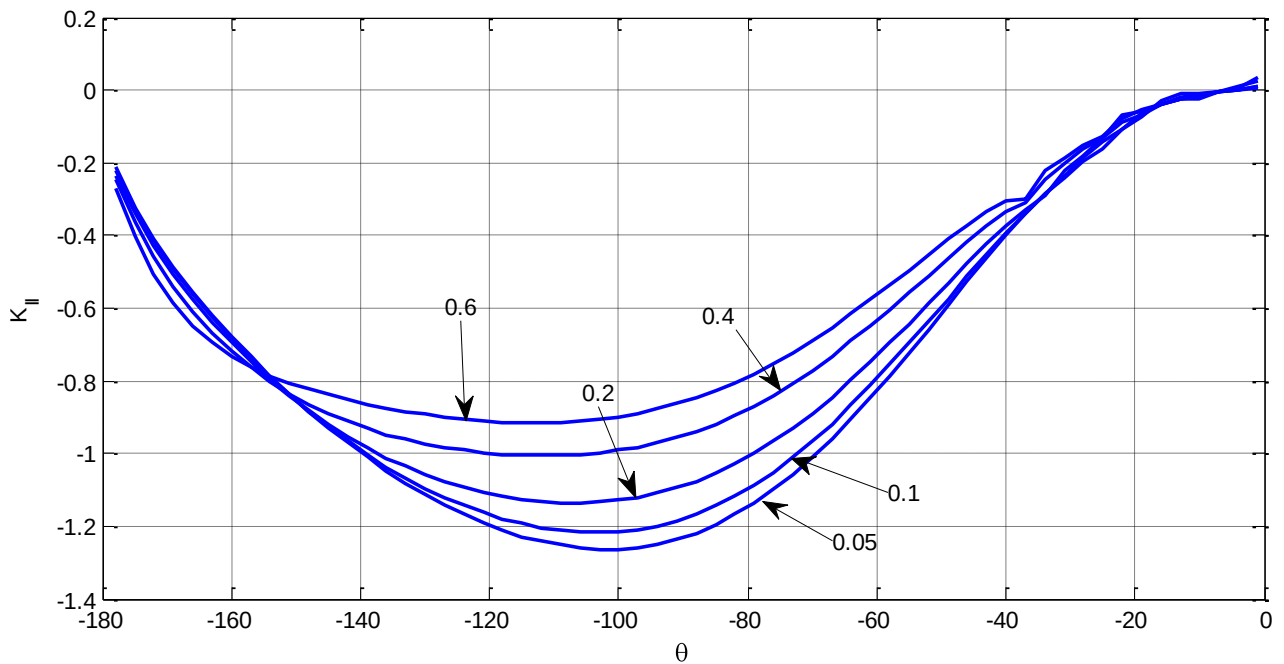


Рис. 3.25. Розподіл КІН для нахиленої крайової тріщини

Із наведених на рис. 3.25 даних видно, що максимальні КІН мають місце за нахилу тріщини $\approx -110^\circ \sim -100^\circ$. Розрахунки показали, що КІН $K_I = 0$. Тобто, мікротріщина, яка виникла біля штампа й нахилена під кутом $\approx -109.5^\circ$ буде підростати за механізмом зсуву вздовж прямої, що узгоджується із експериментальними даними [44]. Із рис. 3.25 видно, що для збільшення довжини тріщини необхідно монотонно збільшувати значення сили, яка прикладена до штампа.

3.6. Наближений підхід до визначення напружень біля штампів і тріщин у анізотропній півплощині за врахування тертя

Відомо, що в області контакту штампів із пружними тілами виникають високі напруження. Тому тут, як правило, зароджуються і розвиваються крайові тріщини під різними кутами щодо межі тіла. Під час розгляду підшипників, у яких ролики контактують із біговою доріжкою, має місце багаторазове навантаження відносно тріщин, які вже з'явилися раніше, тобто тут будуть мати місце повторні навантаження. Тому тріщини, що зародились на

початкових стадіях, будуть розвиватися за втомним механізмом. У розрахунках необхідно також врахувати контакт берегів тріщин та тертя під штампом, яке може суттєво впливати на напруження.

Під час визначення напружень у тілах, які контактують із штампами, як правило, тіло моделюють півплощиною, штамп приймають параболічним, враховують контакт берегів тріщин [38]. Однак, для спрощення приймають, що розподіл напружень під штампом описується за відомою формулою Герца, яка справедлива для випадку гладкого штампа. При врахуванні сил тертя наближено приймають, що дотичні напруження під штампом пропорційні вказаним вище нормальним напруженням. Аналогічний підхід розглядався для анізотропних тіл у роботі [38]. Однак, під час урахування тертя під штампом контактний тиск не описується розподілом Герца – він наведений вище в п. 3.1.

3.6.1. Постановка задачі

Розглянемо анізотропну півплощину $y < 0$, яка послаблена крайовою тріщиною. Прийmemo, що в півплощину втискається параболічний штамп з радіусом R та центром основи до навантаження в точці x_0 . Також вважатимемо, що до нього прикладено силу P та момент M . Між штампом та основою пружного тіла має місце тертя, що описується законом $\tau_{xy} = k\sigma_y$, де k – коефіцієнт тертя.

Нижче проведено дослідження напружень біля тріщин у анізотропній півплощині за врахування контакту берегів тріщин у припущенні, що під штампом виникають такі ж напруження, як і в суцільній півплощині. На основі проведених в п. 3.1 розрахунків будемо вважати, що для такої КЗ отримані результати будуть достатньо точними, якщо розміри ділянки контакту будуть значно менші за відстань до тріщин.

Для розв'язування задачі використаємо модифіковані інтегральні зображення (2.34), в яких допоміжні потенціали визначаються із розгляду вільної від навантаження межі півплощини, тобто на основі розгляду залежностей (2.25) та (2.26) зі співвідношень:

$$\Phi_D z = -\frac{s_2}{s_1 - s_2} F_B z, \quad \Psi_D z = \frac{s_1}{s_1 - s_2} F_B z.$$

Потенціали Φ_D , Ψ_D , які визначають прикладене навантаження до півплощини і входять у зображення (2.34), визначаються за формулою (3.4), у якій функція $F = F_B$, де F_B , визначається за формулою (3.21).

Розглянемо випадок дії параболічного штампa, коли його центр розміщено в точці x_0 , а тріщина довжиною L виходить на межу пластинки в початку координат, кут між тріщиною і віссю Ox рівний β (постановку задачі схематично зображено нарис. 3.26).

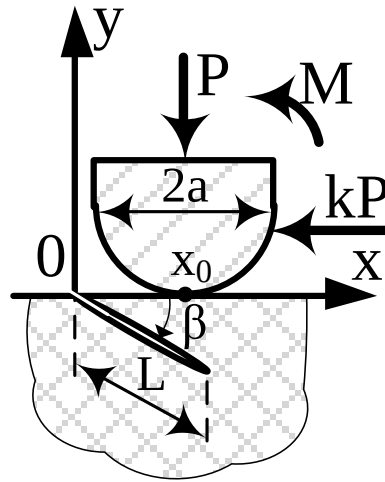


Рис. 3.26. Схема задачі

3.6.2. Результати розрахунків

Розподіл відносних КІН $F_{II} = K_{II} / P\sqrt{\pi L}$ для ізотропної пластинки при $L/a = 1$, $\beta = 90^\circ$, $k = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ наведено на рис. 3.27a (значення коефіцієнта тертя k нанесено біля кривих) залежно від параметра $\lambda = x_0/L$, де a – півширина ділянки контакту. Штриховими лініями на рис. 3.27 наведено відносні КІН $F_I = K_I / P\sqrt{\pi L}$.

Аналогічні результати розрахунків для матеріалу скло-епоксид, для якого відношення максимального модуля пружності E_x до мінімального E_y дорівнює 3, наведено на рис. 3.27b.

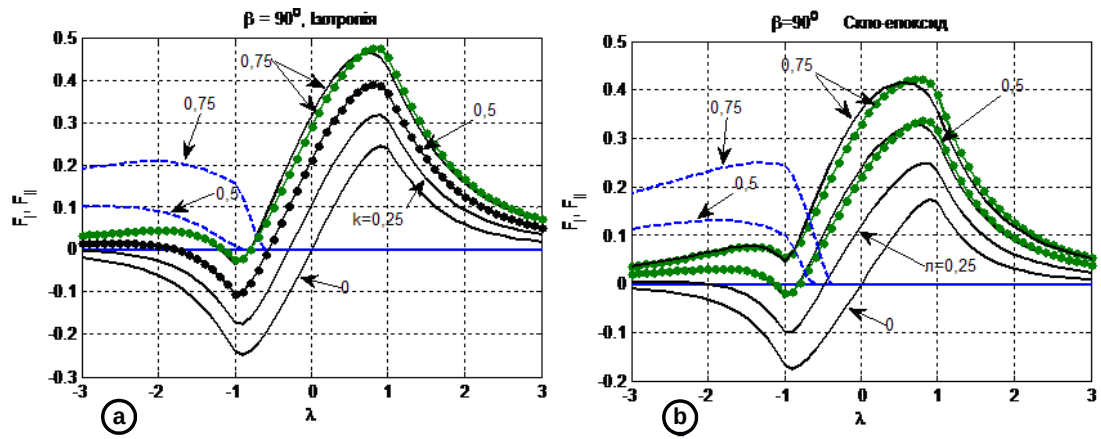


Рис. 3.27. Відносні КІН для тріщин, нахилених під кутом $\beta = 90^\circ$

На рис. 3.27 крапками при $k = 0.5, 0.75$ наведені результати розрахунків для випадку, коли контактні напруження під штампом описувались розподілом Герца [38]. При менших значеннях (при $k = 0, 0.25$) розраховані КІН для двох розглянутих тисків під штампом практично не відрізнялись.

Аналогічні результати розрахунків для кутів нахилу тріщин $\beta = 150^\circ$, $\beta = 30^\circ$ наведено на рис. 3.28–3.29.

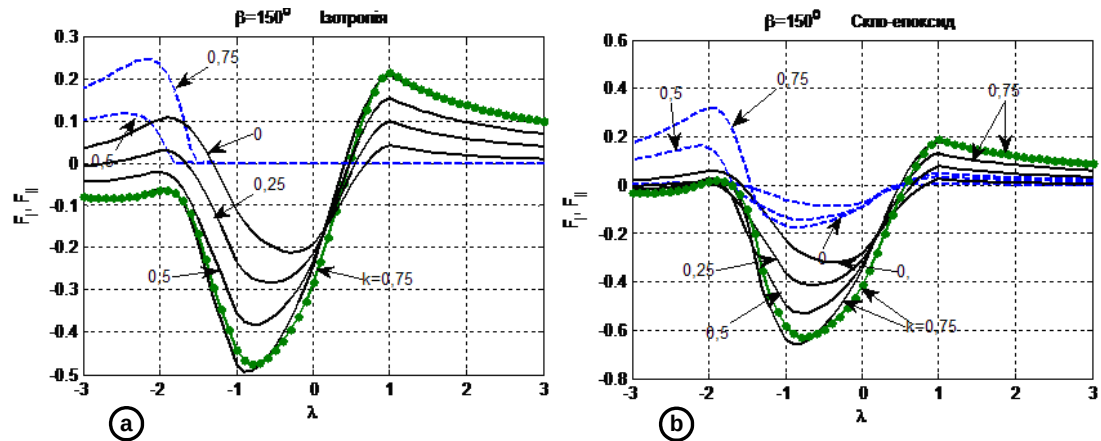


Рис. 3.28. Відносні КІН для тріщин, нахилених під кутом $\beta = 150^\circ$

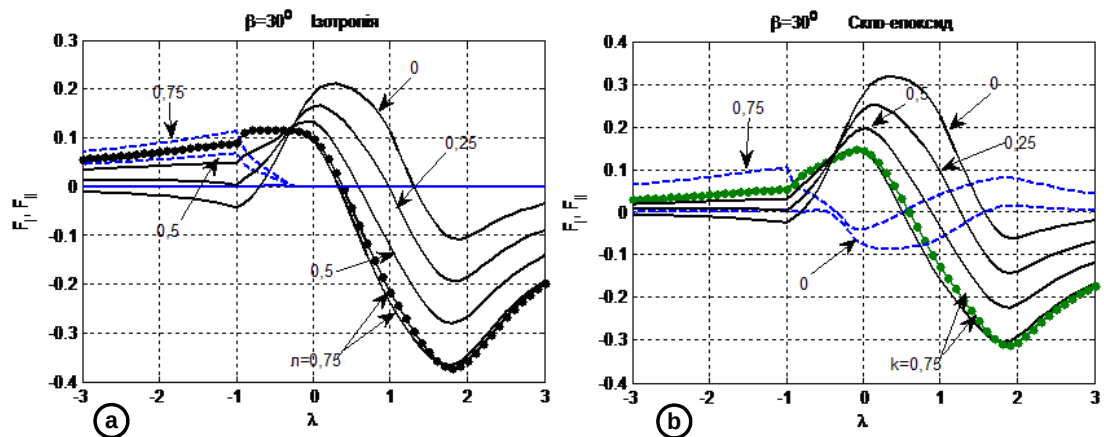


Рис. 3.29. Відносні КІН для тріщин, нахилених під кутом $\beta = 30^\circ$

Наведені на рис. 3.28-3.29 значення КІН для ізотропного матеріалу практично збігаються з даними, які отримані в роботах [38] іншим методом.

Розраховані відносні КІН для істотно анізотропного матеріалу *CF1*, для якого відношення модулів пружності $E_x/E_y = 46.404$, наведено на рис. 3.30а. На рис. 3.30б наведено результати розрахунків для цього ж матеріалу, коли модуль пружності є максимальним у вертикальному напрямку.

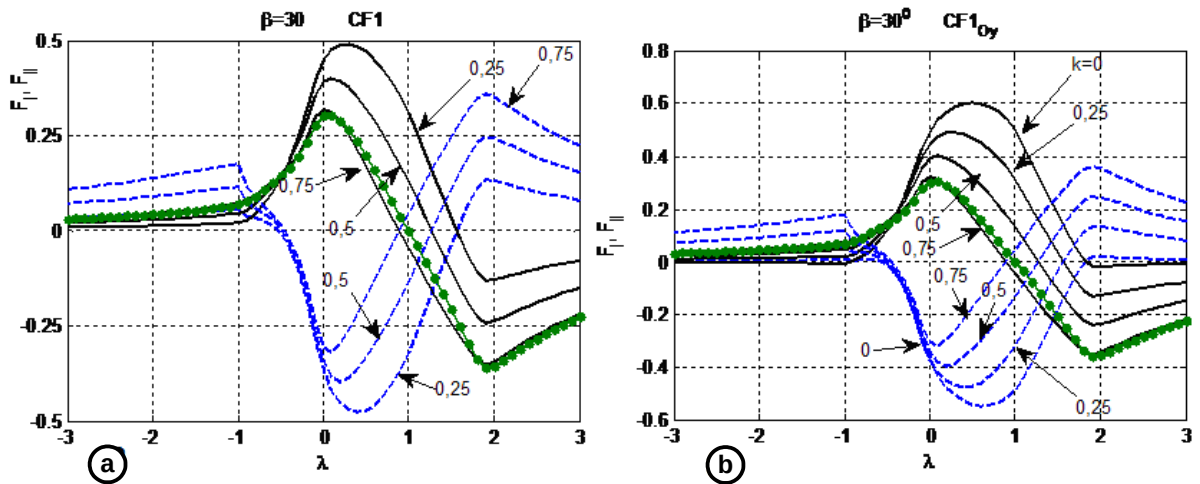


Рис. 3.30. Відносні КІН для тріщин, нахилених під кутом $\beta = 30^\circ$, матеріал *CF1*

На основі проведених розрахунків можна зробити наступні висновки: для ізотропних матеріалів КІН K_I за врахування контакту берегів тріщин не дорівнює нулю тільки коли штамп розміщений лівіше тріщини, причому він є меншим за величиною, ніж КІН K_{II} ; КІН K_I відмінні від нуля для всіх анізотропних матеріалів за врахування контакту берегів тріщин, причому вони є сумірними із КІН K_{II} для істотно анізотропних матеріалів; КІН є більшими за величиною у випадку, коли жорсткість матеріалу є більшою у вертикальному напрямку; при значеннях коефіцієнта тертя $k < 0.5$ КІН з достатньою для практики точністю можуть бути розраховані на основі опису тиску під штампом за формулою Герца.

На основі порівняння наведених графіків можна зробити висновок про значний вплив анізотропії на значення КІН, причому зміна напрямку армування істотно змінює і характер та величини КІН. В більшості із розглянутих випадків мав місце контакт берегів тріщин біля вершини.

Використовуючи наведений тут підхід було виконано дослідження напружень, які виникають у вузлах взаємодії механізму навіски дверей тролейбуса, зокрема визначено контактні напруження під роликом, який навантажує композитну шину з тріщинами.

3.7. Розрахунок на міцність областей біля отворів та штампів за врахування тертя

3.7.1. Розрахунок на міцність області біля отворів

Проведено розрахунки на міцність композитних матеріалів із отворами за дії штампів. Розглянемо півплощину $y < 0$ з отворами, в яку при $y = 0$, $-a < x < a$, втискається плоский штамп. Прийнемо, що головний вектор і момент сил, які прикладені до штампa, дорівнюють P і $M = 0$, центр кругового отвору радіуса a розміщений в т. $0, -ma$ при $m = 2.75, 3, \dots, 4.75$, $E_y > E_x$, $k = 0.5$ (постановку задачі схематично зображено на рис. 3.31a).

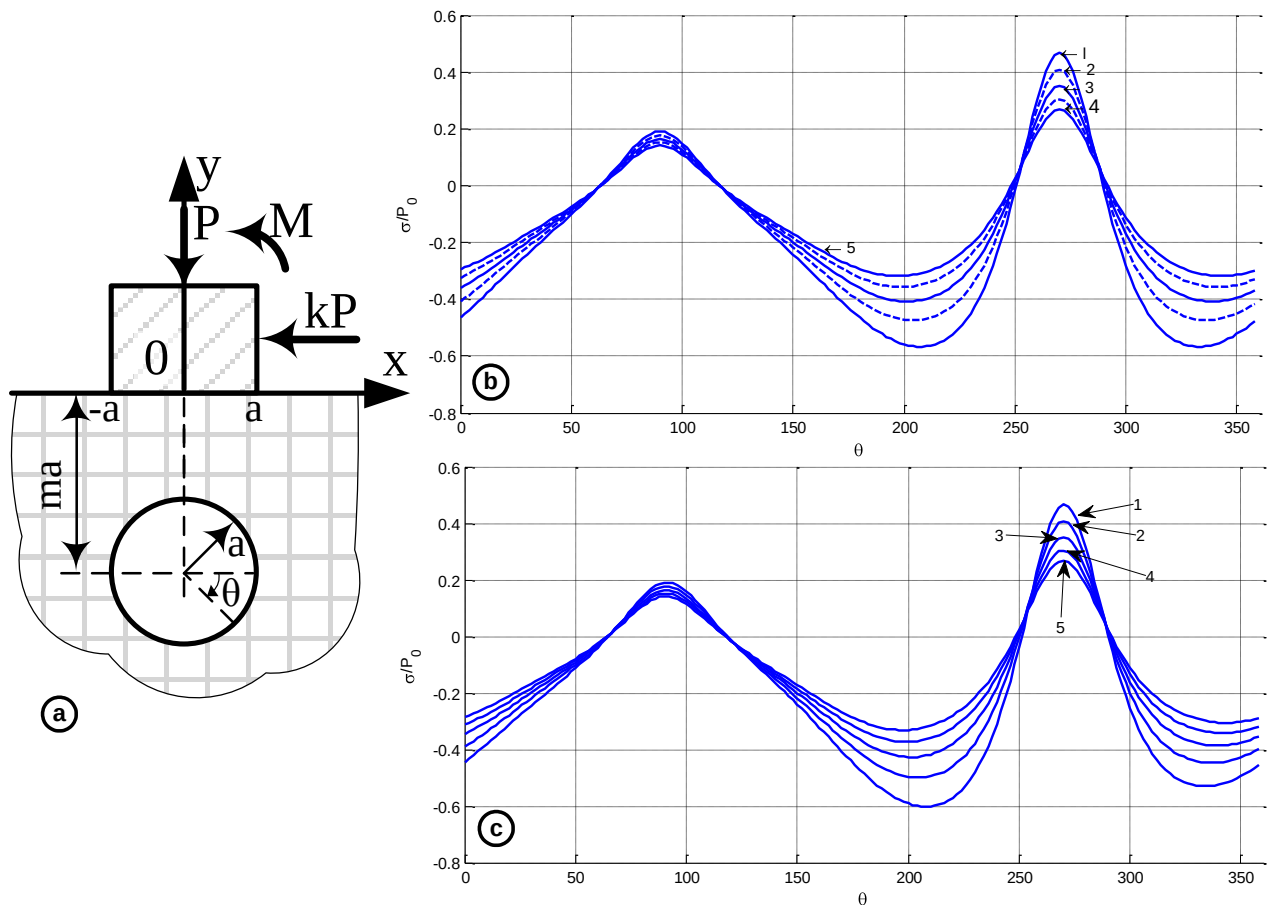


Рис. 3.31. Схема задачі (a), відносні напруження на межі отвору при $k = 0.5$ (b) та при $k = 0$ (c)

На рис. 3.31b наведено результати розрахунків відносних кільцевих напружень $\sigma = \sigma_{\theta}/P_0$ ($P_0 = P/a$) на межі отвору залежно від кутової координати, яку відлічуємо від самої правої точки отвору за годинниковою стрілкою. Кривим 1-5 – відповідають значення $m = -2.75, -3.25, -3.75, -4.25, -4.75$. Для порівняння на рис. 3.31c наведені аналогічні результати при відсутності тертя ($k = 0$).

В таблиці 3.1 наведено розраховані граничні навантаження $P_{\max}$ для розглянутих випадків та вказано кут θ , при якому починається на отворі руйнування. Крім цього, в таблиці наведено результати спрощених розрахунків напружень, коли розглядалась півплощина з отвором, до межі якої прикладено зусилля, що рівні контактним напруженням у суцільній півплощині.

Таблиця 3.1.

Граничні навантаження та кут θ

y_c/a	<i>Штамп, $k = 0.5$</i>		<i>Набл., $k = 0.5$</i>		<i>Штамп, $k = 0$</i>	
	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$
-2.75	216	190.7	216	187.8	324	203.3
-3	214	212.0	214	210.1	214	225.0
-3.25		233.9		232.5	326	247.2
-3.5	212	256.0	212	255.1	212	269.7
-3.75		278.4		277.7		292.3
-4	210	301.1	210	300.6	210	315.2
-4.25		323.7		323.3		338.0
-4.5		346.5		346.2		361.0
-4.75	208	369.5	208	369.3	208	384.2
-5		392.4		392.2		407.2

Із рис. 3.31 і таблиці 3.1 видно, що наявність тертя зменшує зусилля, за яких на межі отвору починається руйнування. Для всіх розглянутих випадків у розрахунках на міцність може використовуватись наближений підхід до розрахунку напружень, у якому розглядається півплощина з отвором, до межі якої прикладено зусилля, що рівні контактним напруженням у суцільній півплощині.

Досліджено випадок загальної анізотропії, який має місце, коли максимальна жорсткість матеріалу є максимальною в напрямку, який нахилений під

кутом φ до межі півплощини. Розрахунки виконано для випадку, коли $\varphi = 45^\circ$, $k = 0$ та $k = 0.5$. В таблицях 3.2–3.3 наведено розраховані граничні навантаження для розглянутих випадків та вказано кут, при якому починається руйнування для матеріалів: скло-епоксид; бор-епоксид; графіт-епоксид; кевлар-епоксид.

Таблиця 3.2.

Граничні навантаження та кут θ при $k = 0$

	Скло-епоксид		Бор-епоксид		Графіт-епоксид		Кевлар-епоксид	
y_c/a	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$
-2.75	282	123.7	318	167.4	316	40.2	318	73.5
-3		127.7	320	203.3	318	50.4		89.9
-3.25	284	134.8		240.3		61.2	320	107.7
-3.5		143.0		279.3		72.6		125.5
-3.75		152.4		319.7		84.4	296	137.8
-4		162.5		361.1		96.4	298	145.0
-4.25	286	173.3		403.2		108.7		152.2
-4.5		184.4		445.8		121.3		160.1
-4.75		195.5		488.8		134.0		168.4
-5		206.8	322	530.8		146.9	300	176.8

Таблиця 3.3.

Граничні навантаження та кут θ при $k = 0.5$

	Скло-епоксид		Бор-епоксид		Графіт-епоксид		Кевлар-епоксид	
y_c/a	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$	θ	$P_{\max}/a$
-2.75	282	109.7	318	157.8	318	33.6	318	67.2
-3	284	114.4	320	185.1		40.7		79.7
-3.25		120.9		214.0		48.5	320	93.0
-3.5		128.7		244.6		56.7	296	105.8
-3.75		137.4		276.2		65.2		111.1
-4		146.7		308.7		73.9	298	116.8
-4.25		156.4		341.7		82.8		122.5
-4.5	286	166.5		375.1		91.9		128.6
-4.75		176.6		408.9		101.2		135.0
-5		186.8	322	442.4		110.6		141.6

Порівнюючи дані таблиць 3.1–3.3 можна зробити висновок: при нахилених головних осях ортотропії граничні навантаження, за яких починається руйнування на межі отвору зменшуються; наявність тертя під штампом додатково зменшує граничні навантаження.

3.7.2. Розрахунок на контактну міцність

Виконаємо розрахунок допустимих напружень за дії параболічного штампа. Для суцільного штампа для всіх анізотропних матеріалів напруження визначаються через введену у п. 3.1 функцію (3.21) у вигляді

$$F_B \ z = \frac{p_0}{4\pi i \rho \frac{1-\rho}{g} \rho} \left[\eta + 1 - 2\rho - \eta + 1^{1-\rho} \eta - 1^{\rho} \right],$$

де $\eta = (z - x_c) / l$, причому $-1 < \eta < 1$.

Тут p_0 – максимальний тиск під штампом. Прикладене до штампа навантаження, півдовжина ділянки контакту, радіус кривини штампа пов'язані співвідношеннями

$$l = \sqrt{\frac{P \lambda_2 R}{2\rho \frac{1-\rho}{\pi}}}, \quad x_c = \frac{M}{P} + \frac{d_1}{3} l, \quad P = -p_0 l / g \rho = \frac{p_0^2 \lambda_2 R}{2g^2 \rho \frac{1-\rho}{\pi}}.$$

Тобто, напружений стан у півплощині після переходу до безрозмірних змінних $x' = (x - x_c) / l$, $y' = y / l$ у всіх точках може бути записаний у вигляді

$$\sigma_x \ x', y' = p_0 S_x \ x', y', \quad \sigma_y \ x', y' = p_0 S_y \ x', y', \quad \tau_{xy} \ x', y' = p_0 T_{xy} \ x', y',$$

де $S_x \ x', y'$, $S_y \ x', y'$, $T_{xy} \ x', y'$ – відомі функції (напруження у півплощині при $p_0 = 1$).

Таким чином, напруження визначаються пропорційно до параметра навантаження (множника $m = p_0$). В зв'язку з цим можна визначити максимальне (допустиме) значення параметра навантаження m для всіх точок півплощини за формулою (2.37) і далі із них вибрати найменше.

З цією метою розраховувались напруження на сітці із координатами вузлових точок $x_{n,m} = n h_x$, $y_{n,m} = -m h_y$, $n = -30, \dots, 30$, $m = 0, \dots, 15$ при $h_x = h_y = 0,1l$.

Розраховані допустимі значення максимального тиску за врахування тертя наведено в таблиці 3.4. Розраховано також координати точок, в яких досяга-

ється руйнування. Встановлено, що в усіх розглянутих випадках руйнування починається на межі півплощини. В таблиці 3.4 також наведено значення відносної координати x_0/l , в якій прогнозується руйнування.

Таблиця 3.4.

Граничні значення тиску за врахування тертя під штампом.

k		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
Скло-епоксид, $E_x < E_y$	$P_{\max}$	238.1	157.1	76.03	49.01	35.6	27.6	22.2
	x_0/l	0	1	1	1	1	1	1
Бор-епоксид, $E_x < E_y$	$P_{\max}$	887.5	426.03	206.4	133.4	96.9	75.1	60.6
	x_0/l	0	1	1	1	1	1	1
Графіт-епоксид, $E_x < E_y$	$P_{\max}$	590.3	264.0	126.6	80.9	58.1	44.5	35.6
	x_0/l	0	1	1	1	1	1	0.96
Кевлар-епоксид, $E_x < E_y$	$P_{\max}$	363.7	153.8	74.3	47.9	34.7	26.8	21.6
	x_0/l	0	1	1	1	1	1	1
Скло-епоксид, $E_x > E_y$	$P_{\max}$	137.5	134.9	127.9	117.9	106.6	95.4	84.9
	x_0/l	0	0	0.033	0.033	0.0667	0.1	0.1
Бор-епоксид, $E_x > E_y$	$P_{\max}$	282.7	279.6	270.7	257.4	241.2	223.6	206.0
	x_0/l	0	0	0	0.333	0.0333	0.033	0.0667
Графіт-епоксид, $E_x > E_y$	$P_{\max}$	91.7	91.2	89.7	86.4	82.8	78.6	74.5
	x_0/l	0	-0.033	-0.1	-0.133	-0.2	-0.233	-0.2667
Кевлар-епоксид, $E_x > E_y$	$P_{\max}$	97.8	96.3	92.	85.8	78.7	71.4	64.5
	x_0/l	0	-0.667	-0.133	-0.2	-0.2667	-0.3	-0.333

Видно, що у всіх випадках при відсутності тертя руйнування починається біля центру області контакту, причому розраховані значення збігаються з наведеними в таблиці 2.9 даними. При наявності тертя руйнування починатиметься в околі центру штампа при $E_x > E_y$ та біля правого кінця штампа у випадку, коли $E_x < E_y$. В усіх випадках наявність тертя зменшує допустимі навантаження на штамп. При $E_x > E_y$ значення допустимих тисків при збільшенні коефіцієнтів тертя зменшуються повільно (на 38%, 27%, 19%, 34% відповідно для скло-епоксиду, бор-епоксиду, графіт-епоксиду та кевлар-епоксиду

при коефіцієнті тертя $k = 0.6$), в той же час при $E_x < E_y$ значення допустимих тисків різко зменшується – уже більше, ніж в 10 разів при $k = 0.5$.

Проведені розрахунки для півплощини, коли її межа утворює кут θ між напрямком з максимальною жорсткістю матеріалу, результати яких наведено в таблиці 3.5 при $k = 0$ та в таблиці 3.6 при $k = 0.2$.

Таблиця 3.5.

Граничний тиск залежно від нахилу напрямку армування при $k = 0$

θ	Скло-епоксид			Бор-епоксид			Графіт-епоксид			Кевлар-епоксид		
	y_0/l	x_0/l	p_0	y_0/l	x_0/l	p_0	y_0/l	x_0/l	p_0	y_0/l	x_0/l	p_0
0	0	0	137.5	0	0	282.7	0	0	91.7	0	0	97.8
10	0	-0.04	132.5	-0.1	0.12	263.9	-0.1	0.08	95.8	0	-0.36	101.4
20	0	-0.12	128.3	-0.2	0.16	257.7	-0.3	0.32	94.2	0	1	100.7
30	0	1	121.9	0	1	230.6	0	1	85.8	0	1	78.1
40	0	1	97.6	0	1	207.3	0	1	80.1	0	1	68.0
50	0	1	91.4	0	1	196.2	0	1	79.3	0	1	63.6
60	0	1	98.0	0	1	199.9	0	1	85.9	0	1	64.9
70	0	1	125.5	0	1	235.4	0	1	108.8	0	1	77.5
80	-0.8	0.64	213.0	0	1	394.7	0	1	194.3	0	1	132.1
90	0	0	238.1	0	0	887.5	0	0	590.3	0	0	363.7

Таблиця 3.6.

Граничний тиск залежно від нахилу напрямку армування при $k = 0.2$

θ	Скло-епоксид			Бор-епоксид			Графіт-епоксид			Кевлар-епоксид		
	y_0/l	x_0/l	p_0	y_0/l	θ	y_0/l	x_0/l	p_0	y_0/l	θ	y_0/l	x_0/l
0	0.0	0.0	127.9	0	-0.04	270.8	0	-0.12	89.4	0	-0.16	92.3
10	-0.1	0.0	141.8	0	1	286.9	0	1	105.6	0	-1	85.8
20	0.0	1.0	99.5	0	1	200.0	0	1	81.3	0	1	75.9
30	0.0	1.0	67.0	0	1	169.4	0	1	70.4	0	1	59.5
40	0.0	1.0	54.3	0	1	148.9	0	1	63.3	0	1	50.4
50	0.0	1.0	48.6	0	1	133.4	0	1	59.1	0	1	44.5
60	0.0	1.0	47.1	0	1	123.4	0	1	58.3	0	1	41.3
70	0.0	1.0	49.4	0	1	122.3	0	1	62.7	0	1	41.7
80	0.0	1.0	57.3	0	1	139.4	0	1	77.7	0	1	48.7
90	0.0	1.0	76.0	0	1	206.4	0	1	126.6	0	1	74.3

Із наведених в таблицях 3.5–3.6 даних випливає, що для кута нахилу армувальних елементів $\sim 45^\circ$ до межі півплощини граничні навантаження найнижчі.

3.8. Висновки до третього розділу

В розділі розглянуто контактні задачі для анізотропної півплощини з отворами й тріщинами за врахування тертя під штампом. Для визначення НДС використано модифіковані інтегральні рівняння, за яких умови на межі півплощини, в тому числі й під штампом задовольняються тотожно. Розв’язки типу Гріна, через які записуються ядра рівняння, знайдено з використанням методу Мусхелішвілі. Для розв’язування отриманих інтегральних рівнянь використано метод механічних квадратур.

Детально досліджено концентрацію напружень у анізотропній півплощині з отворами, яка перебуває під дією плоского штампа за врахування тертя. Розв’язування цієї задачі спрощується, оскільки при цьому виникає інтегральне рівняння тільки від невідомих функцій на межі отворів. Виконано дослідження напружень біля кругового отвору, залежно від їх розміщення та механічних характеристик матеріалу.

Розглянуто випадок дії на півплощину параболічного штампа. Задача знаходження меж області контакту зведена до задачі оптимізації, в якій ключова функція формується на основі розв’язків модифікованих інтегральних рівнянь. Виконано дослідження контактних напружень під штампом та на межі отворів залежно від форми штампа розміщення отворів та механічних характеристик матеріалу.

Виконано дослідження КІН за врахування тертя під штампом. Показано, що отримані для ізотропного матеріалу результати узгоджуються із відомими в літературі даними.

Проведено дослідження, які підтверджують достовірність розрахунків за розробленим алгоритмом. З цією метою розглянуті задачі паралельно розв’язували за відомим у літературі алгоритмом для першої основної задачі, в якому

приймалось, що до півплощини з отвором прикладено зусилля, які дорівнюють знайденому контактному тиску.

На основі знайдених напружень виконано розрахунок допустимих навантажень на штамп, за яких забезпечується міцність зон концентрації напружень (біля отворів і штампа). Під час розрахунків виходили з критерію міцності Гофмана, в якому враховано нормальні та дотичні напруження, різниця в значеннях граничних напружень при розтягу й стиску. Встановлено, що тертя, як правило істотно зменшує значення граничних навантажень на штамп. Проведено розрахунок граничних навантажень для півплощин з межею, яка знаходиться під деяким кутом армувальних елементів.

Виконано також розрахунок граничних зусиль, за яких напруження в околі штампа задовольняють умові міцності.

РОЗДІЛ 4

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ З УСКЛАДНЕНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

В розділі розглянуто плоскі контактні задачі для випадків ускладнених умов контакту. Досліджено випадок взаємодії ортотропної нескінченної пластинки, послабленої отвором, в межу якого втискається штамп, що має форму, близьку до форми отвору. Розглянуто контактну задачу про взаємодію однорідної та кусково-однорідної півплощин із жорстким штампом складної форми за врахування тертя. Проведено дослідження контактного тиску під штампами різної форми залежно від коефіцієнта тертя. Детально розглянуто випадок штампа з системою виїмок. Досліджено тиск на ділянках контакту залежно від кількості виїмок, їх форми та прикладеного навантаження. При розв'язуванні розглянутих задач використано числово-аналітичні методики, що базується на методах ГПР, механічних квадратур та квадратичного програмування [74].

Основні результати цього розділу опубліковані в працях [61, 65, 74].

4.1. Контактна взаємодія жорсткого штампа складної форми та нескінченної ортотропної пластинки з еліптичним отвором

В літературі існує цілий ряд праць, що присвячені такого роду контактній взаємодії [92, 100]. При цьому в літературі, як правило, обмежуються випадком класичних форм штампів. Розроблена в роботах [13,74] числово-аналітична методика розв'язування контактних задач для ізотропних тіл може бути використана й для анізотропних тіл для штампів складної форми (наприклад, основа в яких описується циклоїдальними кривими, кривими вищих порядків тощо). Контактна взаємодія такого роду задач у літературі залишається мало вивченою.

4.1.1. Постановка задачі

Приймемо, що ортотропна пластинка послаблена еліптичним отвором з півосями з півосями R_x та R_y . Приймемо, що межа цього отвору взаємодіє з

жорстким штампом складної форми. Будемо розглядати випадок, коли область контакту є наперед невідомою і може складатися з окремих ділянок.

Запишемо рівняння еліптичного контуру, що обмежує цей отвір, у параметричному вигляді: $x = R_x \cos \theta$, $y = R_y \cos \theta$, а основи штампа до контактної взаємодії – в неявному вигляді

$$f(x, y) = 0. \quad (4.1)$$

Приймемо, що відомими є прикладена до штампа сила, проекції якої позначимо через P_x та P_y та момент M (рис. 4.1).

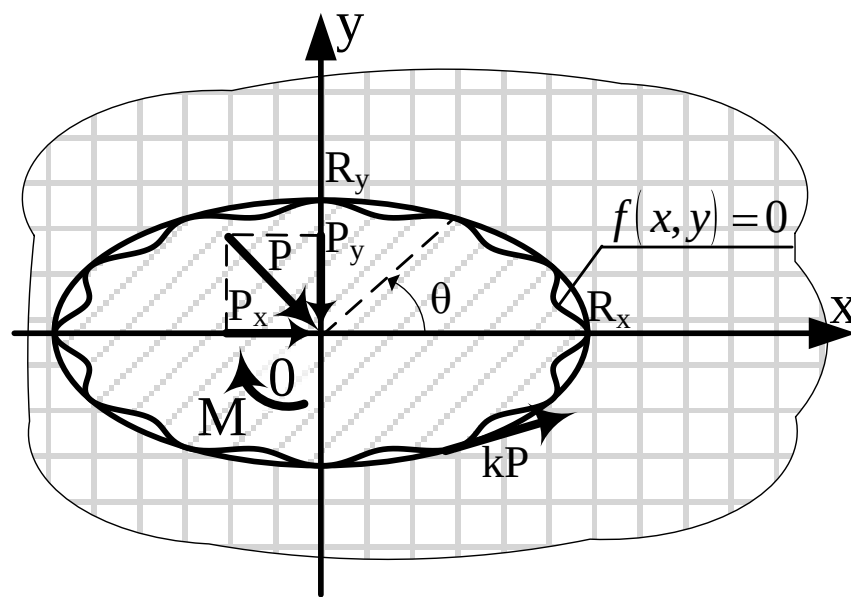


Рис. 4.1. Загальна постановка задачі

При формулюванні крайових умов під штампами будемо виходити із того, що після деформування точки, які знаходяться на межі отвору в пластинці і перебувають в умовах контакту, задовольняють рівняння відповідних штампів з урахуванням їх зміщень в напрямках координатних осей та повороту на деякий кут. Крім цього вважатимемо, що: під штампами, крім нормальних напружень σ , виникають за рахунок тертя й дотичні напруження τ , які пов'язані між собою згідно закону Кулона-Амонтона співвідношенням $\tau = k\sigma$, де k – коефіцієнт тертя (при чому в умовах контакту напрямки прикладених сил підберемо так, щоб збільшення коефіцієнта тертя k урівноважувало

збільшення вертикальної проекції сили P_y); межа тіла поза штампами вільна від навантаження.

4.1.2. Умови контакту

Прийнявши, що після контактної взаємодії відбувається зміщення штампа паралельно осям Ox і Oy на відстані D_x , D_y та поворот на деякий кут α . На основі [74] з умови контакту одержимо

$$f_1 \theta \tilde{u} \theta + f_2 \theta \tilde{v} \theta = -\tilde{f} \theta - D_x f_1 \theta - D_y f_2 \theta + \alpha f_3 \theta + \delta \theta, \quad (4.2)$$

де $\tilde{f} \theta = f R_x \cos \theta, R_y \sin \theta$, $f_1 \theta = f'_x R_x \cos \theta, R_y \sin \theta$, $f_2 \theta = f'_y R_x \cos \theta, R_y \sin \theta$, $f_3 \theta = R_x \cos \theta \cdot f_2 \theta - R_y \sin \theta \cdot f_1 \theta$; $\tilde{u} \theta = u R_x \cos \theta, R_y \sin \theta$, $\tilde{v} \theta = v R_x \cos \theta, R_y \sin \theta$ – переміщення межі пластинки, зумовлені дією прикладеного до неї штампа; $\delta \alpha = 0$, $\tilde{u}, \tilde{v}$ – додаткові члени, які мають другий порядок малості відносно цих переміщень.

Для випадку еліптичного отвору співвідношення для переміщень можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \tilde{u} \theta = \int_{\Omega} \sigma \xi J_1 \theta, \xi - k J_2 \theta, \xi d\xi, \\ \tilde{v} \theta = \int_{\Omega} \sigma \xi J_2 \theta, \xi + k J_1 \theta, \xi d\xi; \end{cases} \quad (4.3)$$

де Ω – сукупність областей, уздовж яких відбувається контакт;

$$\begin{cases} J_1 \alpha, \xi = -\frac{1}{\pi} \left[-n_1 \ln 2 \sin \frac{|\theta - \xi|}{2} R_y \cos \xi - n_2 \frac{\theta - \xi + \pi}{2} R_x \sin \xi \right], \\ J_2 \alpha, \xi = -\frac{1}{\pi} \left[-n_3 \ln 2 \sin \frac{|\theta - \xi|}{2} R_x \sin \xi + n_2 \frac{\theta - \xi + \pi}{2} R_y \cos \xi \right]; \end{cases}$$

$$\text{де } n_1 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{E_x}, \quad n_2 = \frac{-v_{yx}}{E_x} + \frac{1}{\beta_1 \beta_2 E_y} = \frac{-v_{yx}}{E_x} + \frac{\beta_1 \beta_2}{E_x} = \frac{-v_{xy}}{E_y} + \frac{1}{\beta_1 \beta_2 E_y} = \frac{-v_{xy}}{E_y} + \frac{\beta_1 \beta_2}{E_x},$$

$$n_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{E_y \beta_1 \beta_2}; \text{ тут } E_x, E_y \text{ і } v_{xy}, v_{yx} - \text{модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона для}$$

напрямків осей Ox та Oy ; β_1 і β_2 – додатні корені характеристичного біквадратного рівняння

$$\frac{\beta^4}{E_x} + \left(-\frac{2\nu_{yx}}{E_x} + \frac{1}{G_{xy}} \right) \beta^2 + \frac{1}{E_y} = 0,$$

де G_{xy} – модуль зсуву.

Зазначимо, що при $R_x = R_y$ рівняння (4.3) збігаються із співвідношеннями, які отримані для випадку кругового отвору в [100].

Додаткові рівності для знаходження невідомих D_x, D_y запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \sigma_{\xi} R_y \cos \xi - k R_x \sin \xi d\xi = P_x, \\ \int_{\Omega} \sigma_{\xi} R_x \sin \xi + k R_y \cos \xi d\xi = P_y. \end{cases} \quad (4.4)$$

4.1.3. Побудова інтегральних рівнянь

Нехай штамп має форму близьку до форми отвору з уже відомими півосями. Тоді його рівняння можна записати у параметричному вигляді

$$x = \tilde{R}_x \theta \cos \theta, y = \tilde{R}_y \theta \sin \theta, \theta \in -180^\circ; 180^\circ,$$

де $R_x - \tilde{R}_x \theta = f_{x\delta} \theta$, $R_y - \tilde{R}_y \theta = f_{y\delta} \theta$. Тут $f_{x\delta}$ і $f_{y\delta}$ – невід’ємні та малі за величиною функції, менші за деяку величину δ . Ці функції характеризують відхилення форми штампа від еліптичної.

Детально розглянуто випадок, коли

$$f_{x\delta} \theta = R_x \frac{\delta}{2} 1 - \cos \lambda \theta, f_{y\delta} \theta = R_y \frac{\delta}{2} 1 - \cos \lambda \theta. \quad (4.5)$$

Тоді рівняння штампа (4.1) матиме вигляд:

$$x^2 + my^2 - R_x^2 \left(1 - \frac{\delta}{2} 1 - \cos \lambda \tilde{\theta}_{x,y} \right)^2 = 0, \quad (4.6)$$

$$\text{де } m = \frac{R_x^2}{R_y^2}; \tilde{\theta}_{x,y} = \begin{cases} \arctan \left(\frac{R_x y}{R_y x} \right) & \text{при } x > 0; \\ \arctan \left(\frac{R_x y}{R_y x} \right) + \pi & \text{при } x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \left(\frac{R_x y}{R_y x} \right) - \pi & \text{при } x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y & \text{при } x = 0, y \neq 0. \end{cases}$$

Нехтуючи величиною δ , проведемо лінеаризацію інтегрального рівняння (4.2) для жорсткого штампа, форма якого задається рівнянням (4.6). Тоді в умові (4.2) функції $\tilde{f}$, $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ і $\tilde{f}_3$ одержимо у вигляді:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\theta) &= R_x^2 \left(1 - \left(1 - \frac{\delta}{2} (1 - \cos \lambda \theta) \right)^2 \right) + m R_y^2 - R_x^2 \sin^2 \theta, \\ \tilde{f}_1(\theta) &= 2 R_x \cos \theta + \lambda \delta R_x^2 \left(1 - \frac{\delta}{2} (1 - \cos \lambda \theta) \right) \tilde{\theta}_1(\theta) \sin \lambda \theta, \\ \tilde{f}_2(\theta) &= 2 m R_y \sin \theta + \lambda \delta R_x^2 \left(1 - \frac{\delta}{2} (1 - \cos \lambda \theta) \right) \tilde{\theta}_2(\theta) \sin \lambda \theta, \\ \tilde{f}_3(\theta) &= 2(m-1) R_x R_y \sin \theta \cos \theta + \lambda \delta R_x^2 \left(1 - \frac{\delta}{2} (1 - \cos \lambda \theta) \right) \times \\ &\quad \times R_x \tilde{\theta}_2(\theta) \cos \theta - R_y \tilde{\theta}_1(\theta) \sin \theta \sin \lambda \theta,\end{aligned}\tag{4.7}$$

де

$$\tilde{\theta}_2(\theta) = \tilde{\theta}'_y R_x \cos \theta, R_y \sin \theta, \quad \tilde{\theta}_1(\theta) = \tilde{\theta}'_x R_x \cos \theta, R_y \sin \theta.$$

Підставляючи функції (4.7) в рівняння (4.2) та враховуючи умови рівноваги штампа (4.4), отримаємо інтегральні рівняння для поставленої задачі. Розв'язування задачі проведено за числово-аналітичною методикою [74], яка базується на розв'язанні відповідної задачі квадратичного програмування. При цьому межі всіх ділянок контакту (кількість яких наперед є невідомою) та розподіл на них контактних тисків визначаються в процесі розв'язування задачі. Наведемо результати проведених розрахунків.

4.1.4. Контактні напруження під штампом, форма якого співпадає з формою отвору

Розглянемо два випадки розміщення отвору (рис. 4.2).

Нехай рівняння отвору задається співвідношенням (4.6) при $\delta = 0$. Тоді функції (4.7) спростимо до вигляду:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\theta) &= m R_y^2 - R_x^2 \sin^2 \theta, \quad \tilde{f}_1(\theta) = 2 R_x \cos \theta, \quad \tilde{f}_2(\theta) = 2 m R_y \sin \theta, \\ \tilde{f}_3(\theta) &= 2(m-1) R_x R_y \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}$$

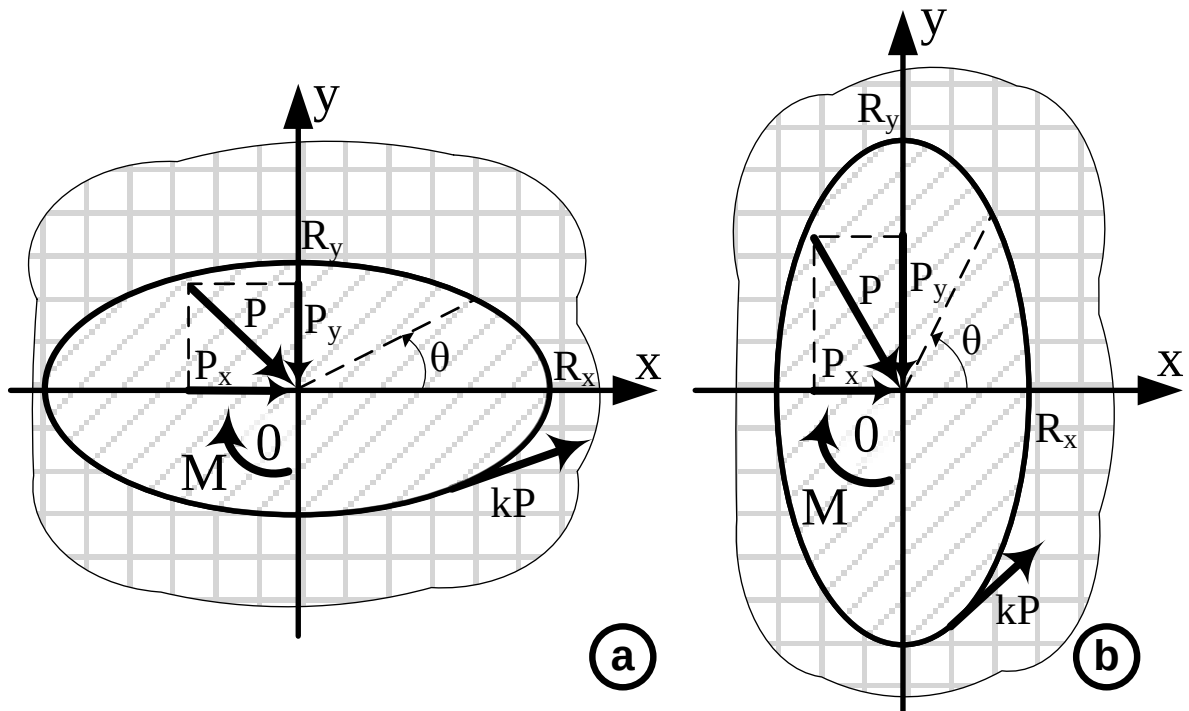


Рис. 4.2. Схема задачі

Розрахунки виконано для композитів (пружні сталі, для яких наведено в таблиці 1.1). Вважатимемо, що прикладені сили віднесені до величини $\tilde{G} \cdot R$, а знайдені контактні тиски – до $\tilde{G}$. Введемо: безрозмірні величини $Q_x = P_x / \tilde{G}R$, $Q_y = P_y / \tilde{G}R$, $p = \sigma / \tilde{G}$, де $\tilde{G} = 1$ Гпа, $R = (R_x + R_y) / 2$.

Спочатку виконано розрахунки уточненого плоского напруженого стану при відсутності тертя та вертикальної сили при $k = 0$, $Q_x^1 = 0.000075$, $Q_x^2 = 0.0001$ та $\max R_x, R_y / \min R_x, R_y = 1.5$. Результати знайдених відносних контактних тисків наведено на Рис. 4.3. Кривим 1 і 1' відповідають випадки, коли $E_y > E_x$, а кривим 2 і 2' – $E_x > E_y$. Кривим 1 і 2 відповідає відносна горизонтальна проекція сили Q_x^1 , а кривим 1' і 2' – Q_x^2 . Розподілам відносних контактних тисків, що наведені на рис. 4.3a, відповідає випадок, коли $R_x > R_y$, а розподілам, що наведені на рис. 4.3b, – випадок $R_x < R_y$.

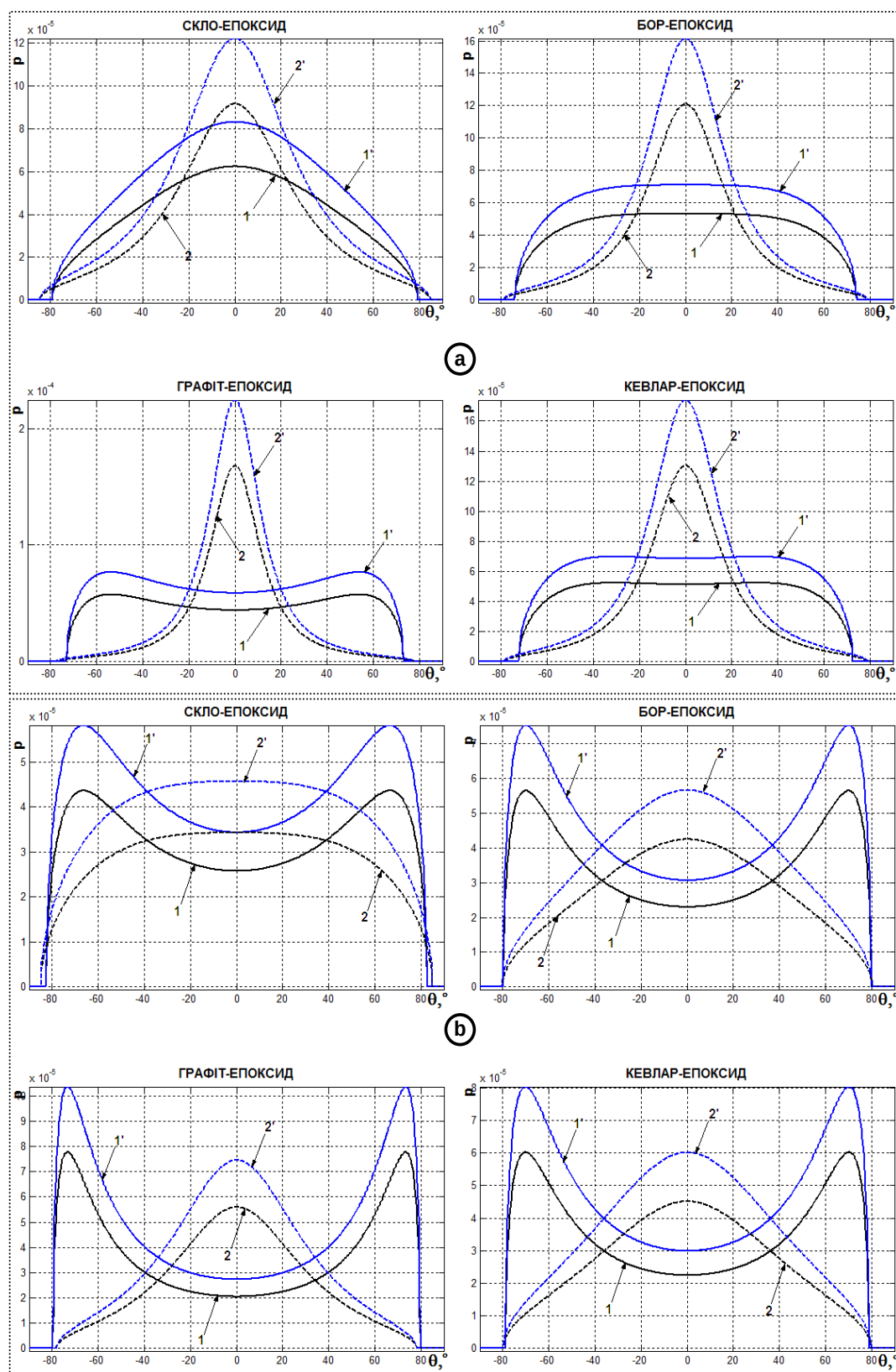


Рис. 4.3. Відносний контактний тиск без урахування тертя та вертикальної проекції вектора сили

При $Q_x = 0.000075$, $k = 0.3$ (криві 1 і 2) та $k = 0.5$ (криві 1' і 2'), отримаємо розподіли контактних тисків, що наведені на рис. 4.4.

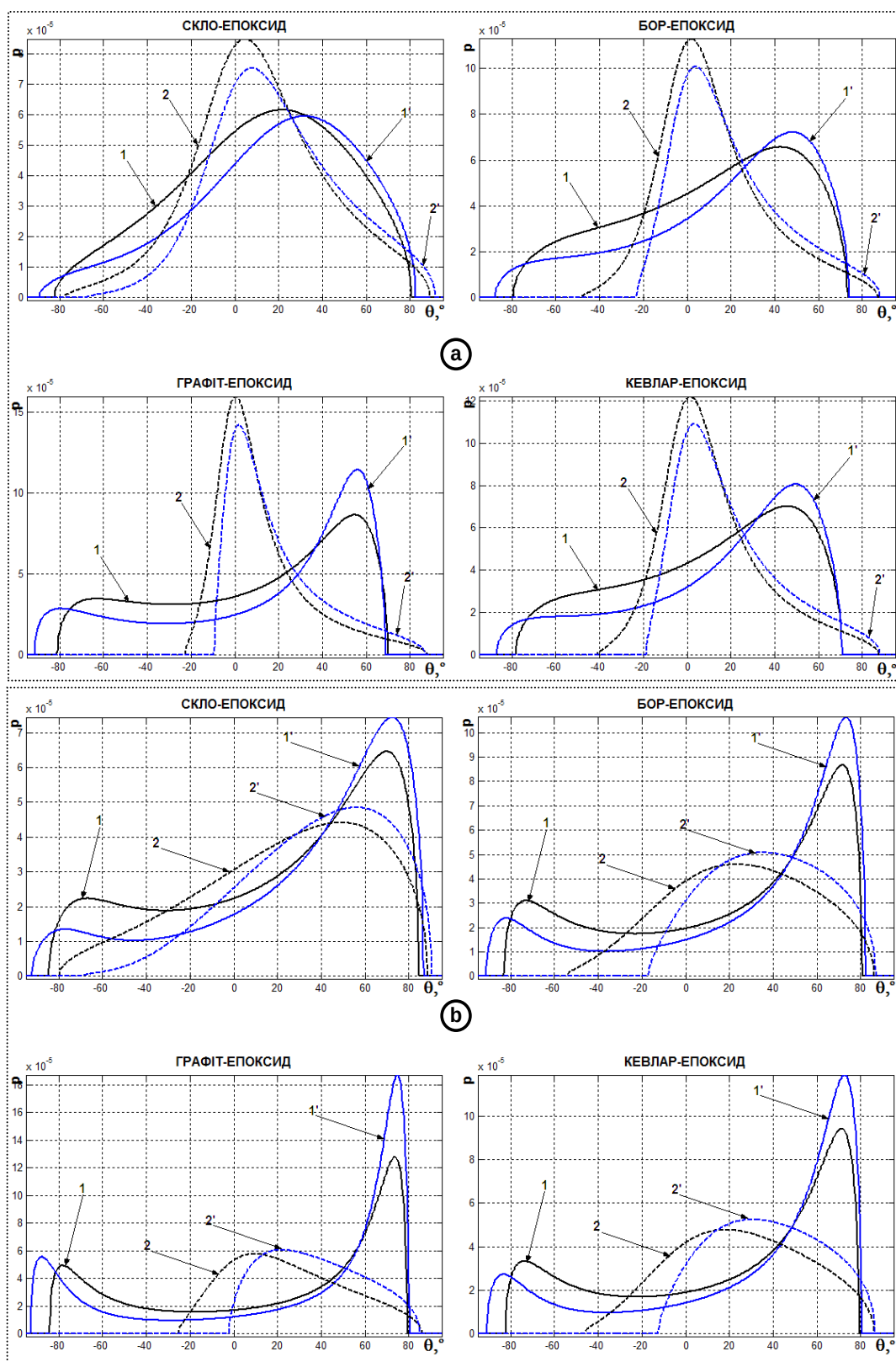


Рис. 4.4. Відносний контактний тиск без вертикальної проекції вектора сили

З наведених на даних рисунках результатів впливає, що збільшення коефіцієнта тертя, крім збільшення асиметрії, досить часто призводить до: зменшення області контакту для випадків, коли армування матеріалу здійснюється в напрямку прикладеної сили.

При $k = 0.3$ (криві 1 і 2) та $k = 0.5$ (криві 1' і 2'), $Q_x = 0.00008$ та $Q_y = 0.00006$ отримаємо розподіли контактних тисків, що наведені на рис. 4.5.

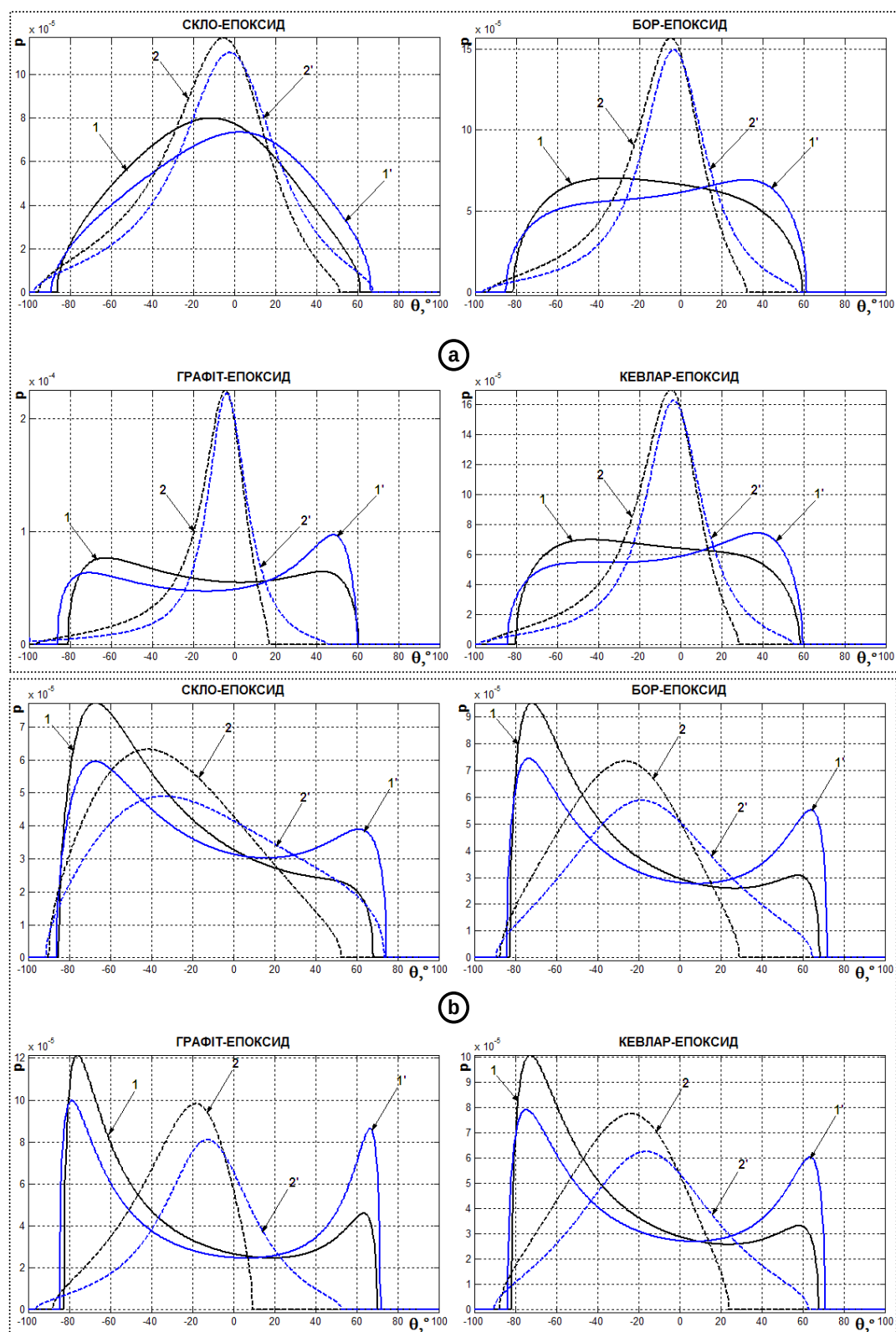


Рис. 4.5. Відносний контактний тиск на межі еліптичного отвору за врахування тертя та обох складових відносного вектора сили

Виконані розрахунки для ізотропного матеріалу без тертя за дії зусиль у горизонтальному напрямку, для випадку плоскої деформації при: $E_x = E_y = 1$ ГПа, $\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0.2$, $G_{xy} = 0.5$ ГПа, $k = 0$, $R_x = 1.2; 0.8$ м, $R_y = 0.8; 1.2$ м, $P_y / 2G_{xy} \min R_x, R_y = 0$ і $P_x / 2G_{xy} \min R_x, R_y = 0.00625 \cdot j$. Отримані контактні тиски за розробленим алгоритмом практично збігаються із даними, які отримані для цієї задачі в [74] іншим методом.

Використовуючи наведений тут підхід було розраховано контактні напруження на границі отвору, що знаходиться в корпусі кришки лічильника води.

4.1.5. Контактні напруження під шорстким штампом складної форми

У літературі хвилястість основи штампа часто моделюється за допомогою лінійної комбінації синусоїд та косинусоїд з різними періодами та амплітудою. Прийmemo, що в умовах контакту (4.2)–(4.4) для функцій $\tilde{f}$, $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ і $\tilde{f}_3$ мають місце залежності (4.7), значення параметрів хвилястості: $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$ та $\lambda = 8$. Тоді отримаємо штамп, форма якого зображена на рис. 4.6.

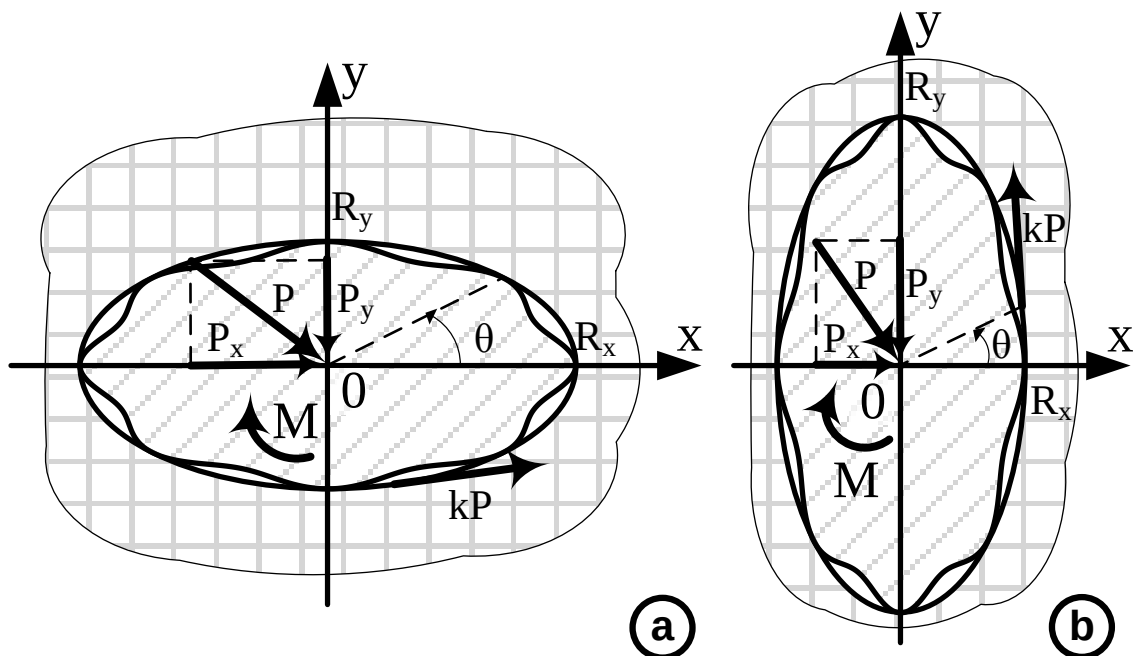


Рис. 4.6. Схема задачі

Результати отриманих розрахунків за тих же значень величин, при яких отримані дані, що наведені на рис. 4.5, наведено на рис. 4.7.

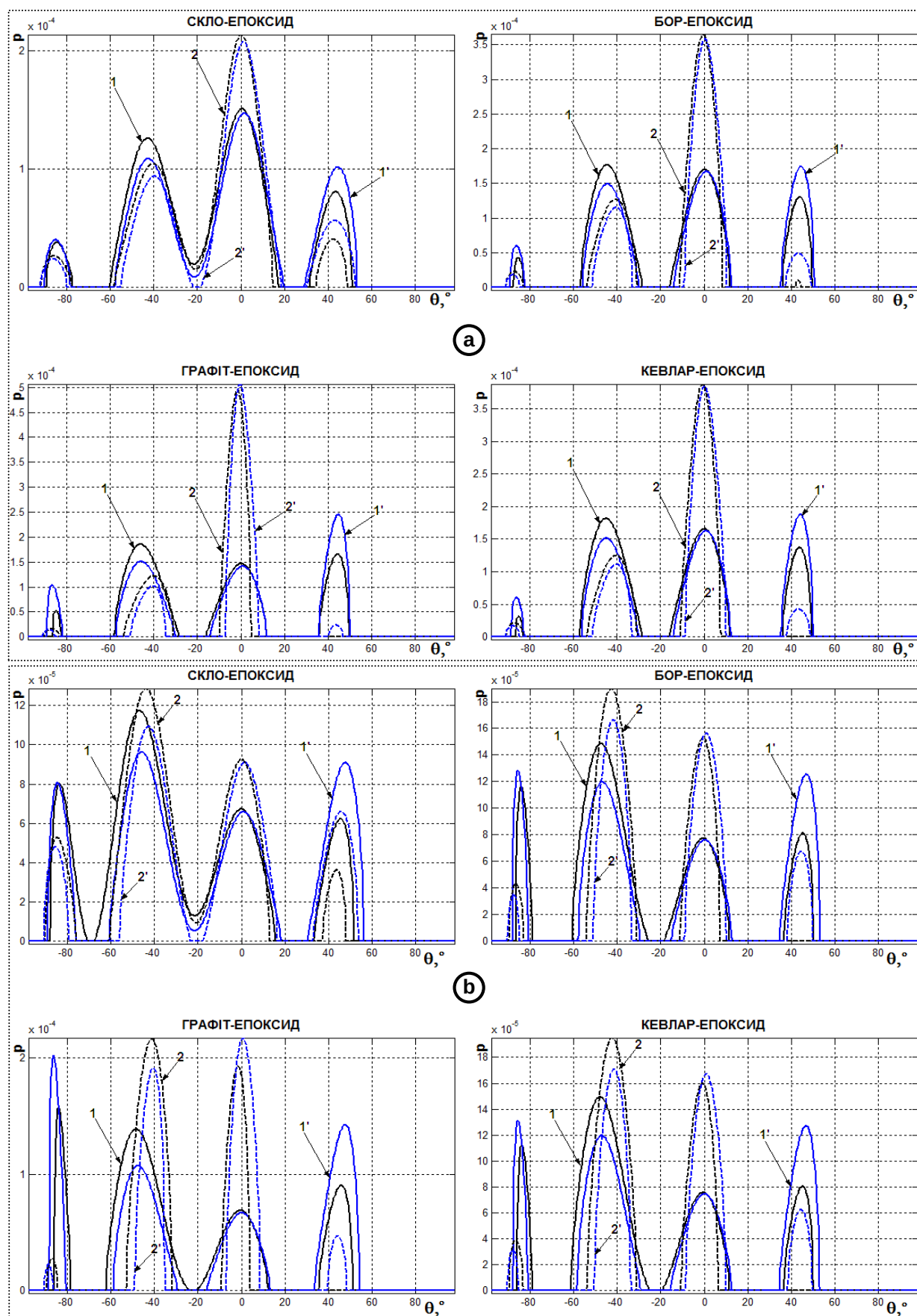


Рис. 4.7. Відносний контактний тиск на межі еліптичного отвору за врахування тертя та обох складових відносного вектора сили

4.2. Контактна взаємодія пружної півплощини та жорсткого штампа з виїмками

4.2.1. Постановка задачі

Розглянемо контактну взаємодію жорсткого штампа, основа якого задається рівнянням $f(x, y) = 0$, та пружної ізотропної півплощини в умовах плоскої деформації. Вважатимемо, що відомими є головний вектор P та момент всіх сил M , що прикладені до штампа. Пружне тіло та жорсткий індентор до контактної взаємодії зображено на рис. 4.8.

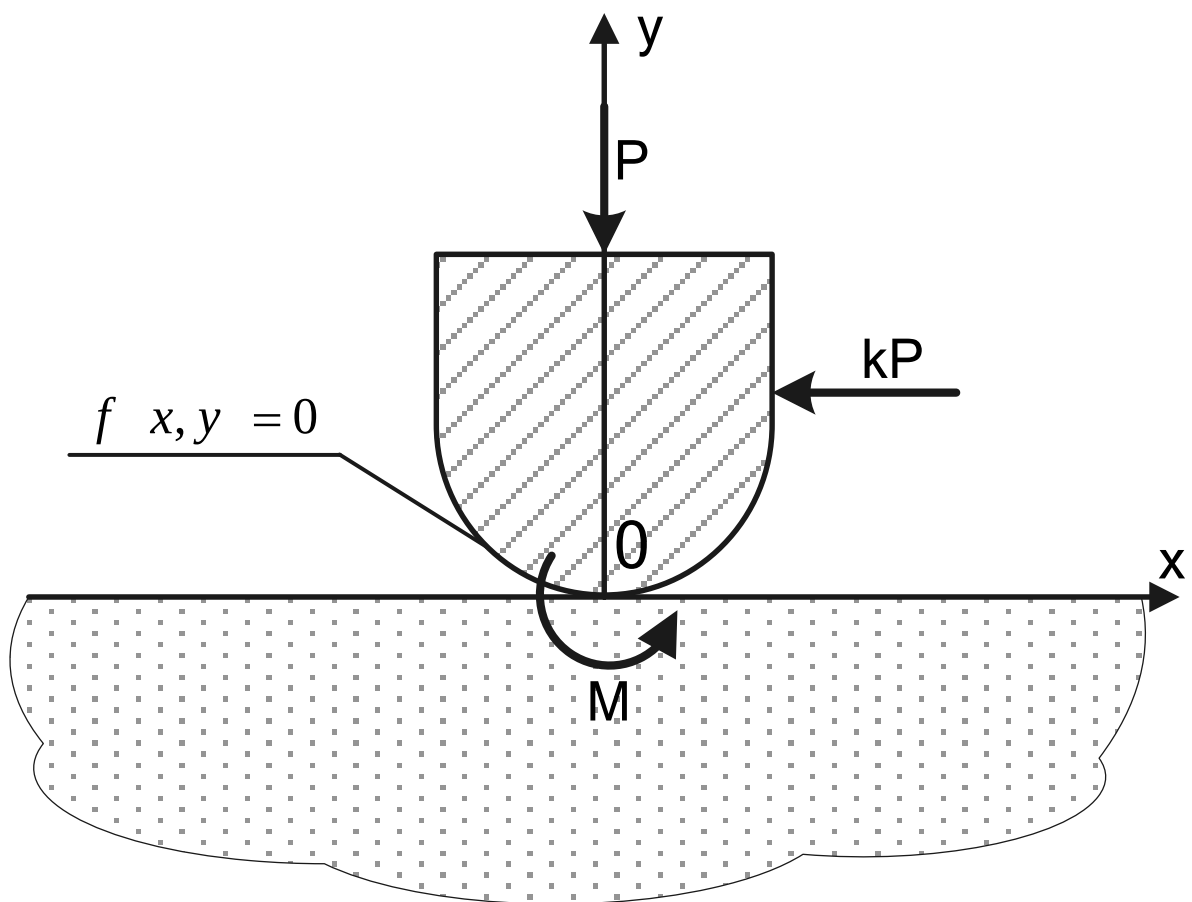


Рис. 4.8. Схема задачі

Під час формулювання крайових умов під штампом будемо виходити із того, що після деформування точки, які знаходяться на межі тіла і перебувають в умовах контакту, задовольняють рівняння основи штампа з урахуванням його зміщення в напрямку координатної осі Oy та повороту на деякий кут. Крім цього вважатимемо, що: під штампом, крім нормальних напружень σ ,

виникають за рахунок тертя ще й дотичні напруження τ , які пов'язані між собою згідно закону Кулона-Амонтона співвідношенням $\tau = k\sigma$, де k – коефіцієнт тертя; межа тіла поза штампом вільна від навантаження.

Тоді умови контакту для цієї постановки матимуть вигляд:

$$f(x+u, y+v) - \alpha(D_y + u + v)(x, y) - (x+u)(x, y) - \alpha = 0. \quad (4.8)$$

Після лінеаризації умову (4.8) можна переписати у вигляді

$$f_1(x) \tilde{u}(x) + f_2(x) \tilde{v}(x) = -\tilde{f}(x) - D_y f_2(x) + \alpha f_3(x) + \delta(x), \quad (4.9)$$

де $\tilde{f}(x) = f(x, 0)$, $f_1(x) = f'_x(x, 0)$, $f_2(x) = f'_y(x, 0)$, $f_3(x) = x \cdot f_2(x, 0)$; $\delta = 0$ $\tilde{u}, \tilde{v}$; переміщення $\tilde{u}(x) = u(x, 0)$ і $\tilde{v}(x) = v(x, 0)$.

4.2.3. Опис форми основи штампа з виїмками та закругленнями на краях

Приймемо, що основа штампа задається рівнянням [74]

$$f_{um}(x) = R \left(1 - \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x}{R} \right)^n} \right) \text{ при } \left| \frac{x}{R} \right| \leq 1, \quad (4.10)$$

де R – стала, n – ціле парне число (при $n = 2$ одержимо круговий штамп, при $n \rightarrow \infty$ – плоский штамп, при всіх інших значеннях цього параметра одержимо проміжний випадок – майже плоский штамп із закругленими краями). Якщо змінювати в рівнянні (4.10) значення параметра n , то можна прослідкувати яким чином на краях області контакту відбувається перехід від обмежених контактних напружень до нескінченних і як цьому сприяє радіус закруглення на краях штампа.

Нехай основа вищеописаного штампа має регулярний рельєф, що утворений деякою сукупністю однакових виїмок. Для опису форми таких штампів використаємо рівняння

$$f_{um}(x) = R \left(1 - \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x}{R} \right)^n} \right) + \sum_{k=1}^3 \tilde{f}_{um}^k(x, x_k^*) \text{ при } \left| \frac{x}{R} \right| \leq 1, \quad (4.11)$$

$$\text{де } \tilde{f}_{um}^k(x, x_k^*) = \begin{cases} \varepsilon \left(1 - \left(\frac{x - x_k^*}{\delta} \right)^2 \right)^{n_0 + 1/2}, & |x - x_k^*| \leq \delta, \\ 0, & |x - x_k^*| > \delta; \end{cases} \quad \varepsilon, \delta \text{ та } x^* = x_1^*, x_2^*, \dots -$$

відповідно максимальна глибина, півширина та масив центрів виїмок; величина

$n_0 = \overline{1,3}$ визначає характер виїмок. При $\delta/R = 0.2$, $\varepsilon = 0.00005$ та $x^*/R = 0$ праву половину виїмки для вказаних значень величини n_0 зображено на рис. 4.9.

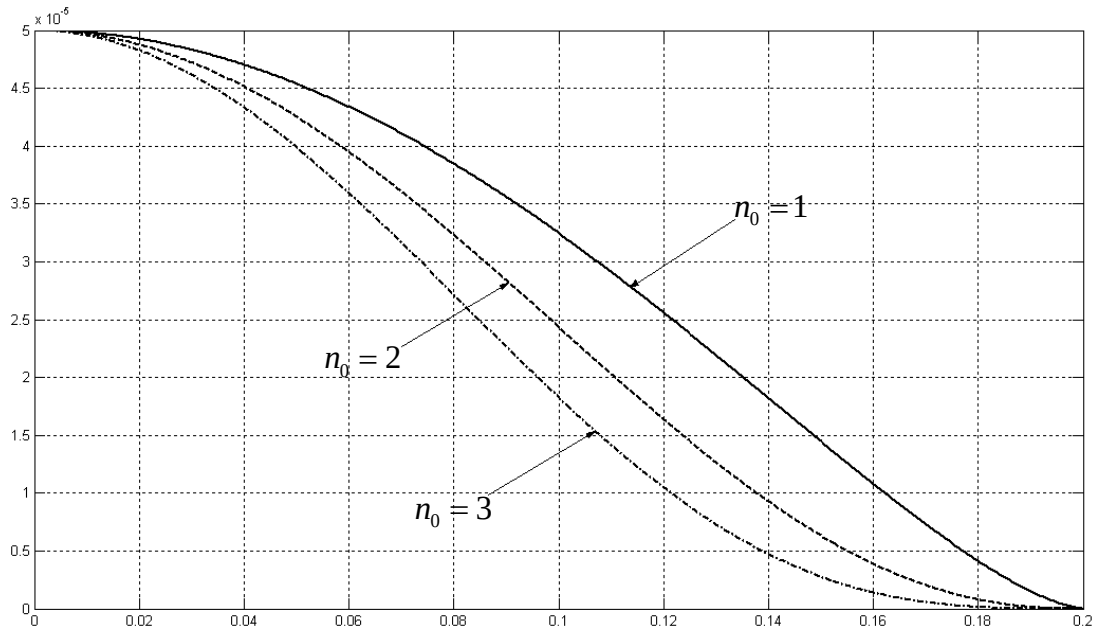


Рис. 4.9. Різновид геометрії виїмки залежно від значення параметра n_0

Дослідимо вплив кількості і характеру виїмок на розподіл контактних напружень. Розв'язок поставленої задачі отримано розробленим у літературі підходом, який базується на методах інтегральних рівнянь та квадратичного програмування.

4.2.4. Аналіз контактних характеристик

Для проведення числових розрахунків введені наступні безрозмірні величини: координата x , межі a і b прогнозованого інтервалу контакту, що покриває всі ділянки фактичного контакту, півширина виїмок δ , масив центрів виїмок $x^* = x_1^*, x_2^*, \dots$ віднесених до введеної величини R , а також невідомі нормальні напруження у вузлових точках σ_n , віднесені до подвійного модуля зсуву G . Числові розрахунки проведені для коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.25$, максимальної (безрозмірної) глибини виїмок $\varepsilon = 0.00005$ та різних значеннях коефіцієнта тертя k відносного головного вектора вертикальних сил $Q_y = \frac{P_y}{2GR}$.

Прийmemo, що $x^*/R = \left(x_1^*/R, x_2^*/R, x_3^*/R \right) = -0.5, 0, 0.5$, $\varepsilon = 0.00005$, $\delta/R = 0.2$,

$n = 50$, $\chi = 2$, $k = 0$, $Q_y = 0.0008$ та при $b = -a = 0.92R$. При розрахунках інтеграли в рівняннях заміняли квадратурними формулами, в яких вибирали кількість вузлових точок ~ 550 .

На рис. 4.10 кривими 1-3 наведено віднесені до $2G$ контактні напруження, які відповідають значенням величин $n_0 = \overline{1,3}$. Кривій 4 відповідають напруження при гладкому штампі (без виїмок). Найменшими за величиною виявились напруження в центрі виїмок. При збільшенні n_0 збільшується крутизна меж цих виїмок. У зв'язку з цим чим меншою є величина n_0 , тим більшими по величині є напруження на її краях. Крім того видно, що змінюється знак кривини на краях виїмок у разі зміни значення величини n_0 з 1 на 2.

Дослідження контактної поведінки під такими штампами мають більшу практичну цінність, ніж розв'язування періодичних контактних задач [15, 24, 42, 43, 80, 98, 127]. Максимальні за величиною біля країв області контакту напруження, які майже не залежать від величини n_0 , суттєво відрізняються від подібних напружень у центральних ділянках контактної взаємодії. Тому проблема розв'язування таких задач аналітичними методами на даний час не є вирішеною, і відповідно задачі такого класу менш вивчені в літературі.

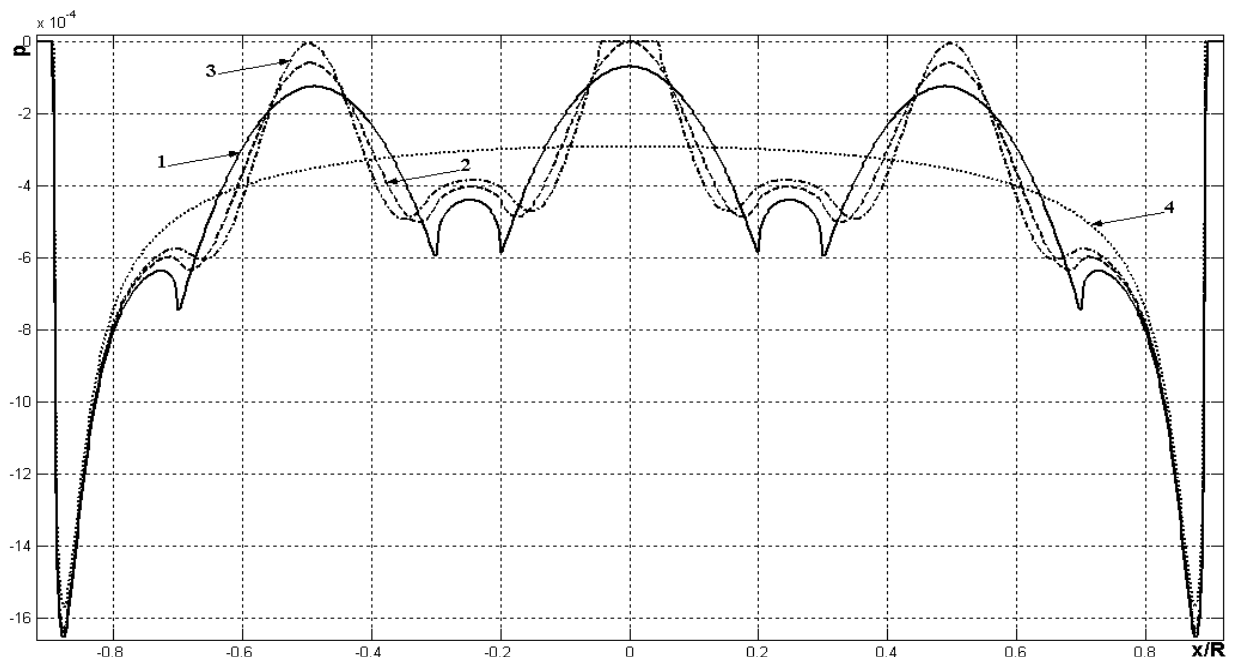


Рис. 4.10. Відносні контактні напруження під штампом з 3-ма виїмками та із закругленням на краях без урахування тертя

Аналізуючи рис. 4.10 можна стверджувати, що хоч характер виїмок (при різних значеннях n_0) майже не впливає на максимальні по величині напруження біля країв області, їхня відсутність на ці напруження впливає більш суттєво.

Збільшимо кількість виїмок від 3-х до 7-и для того щоб дослідити процес наростання напружень від центральних ділянок контакту до крайніх.

На рис. 4.11 (*a, d, g*) зображено форми штампів, основа яких описується рівнянням (4.11), при значеннях величини $n_0 = \overline{1,3}$ відповідно, та пружну основу, в яку втискають штамп. Розрахунки проведені при $N = 553$, $x^*/R = -0.75, -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 0.75$, $\varepsilon = 0.00005$, $\delta = 0.2$, $n = 50$, $\chi = 2$, $b = -a = 0.92R$, при $k = 0.1$ (рис. 4.11 (*b, e, h*)) та $k = 0.3$ (рис. 4.11 (*c, f, i*)) і відносного головного вектора вертикальних сил $Q_y^k = 10^{-4} \cdot -1 + 7k$. На рис. 4.11 (*b, c, e, f, h, i*) суцільним кривим 1-6 відповідають розподіли відносних контактних напружень, знайдені під штампом, основа якого задається рівнянням (4.11). А штриховим кривим 1'-6' відповідають розподіли відносних контактних напружень, знайдені під штампом, основа якого задається рівнянням (4.10). Тут розподілам 1, 1', 4, 4' відповідає відносний головний вектор сили Q_y^1 , розподілам 2, 2', 5, 5' – Q_y^2 , розподілам 3, 3', 6, 6' – Q_y^3 .

На рис. 4.11 (*b, c*) для розподілів відносних контактних напружень 2, 3, 5 і 6 характерною є суцільна область контакту. Для розподілу 1 область контакту складається з 8-ми ділянок, а для розподілу 4 – з 7-ми ділянок контакту. Очевидно, що при невеликому навантаженні різниця між максимальними напруженнями в центральних та крайніх ділянках є незначною. Рівномірне збільшення навантаження призводить до різкого нелінійного відносно навантаження приросту напружень на крайніх ділянках та появи суцільної області контакту. Також з одержаних результатів (розподілів напружень) можна зробити висновок про візуальну близькість відповідних усереднених напружень на окремих ділянках для випадку фрагментів штампа з виїмками та відповідних фрагментів штампа без виїмок. Для аналізу характеру і кількості таких ділянок в залежності від коефіцієнта тертя обчислимо значення величин зазорів між цими ділянками для розподілів 1 та 4 і подамо їх у вигляді таблиці 4.1.

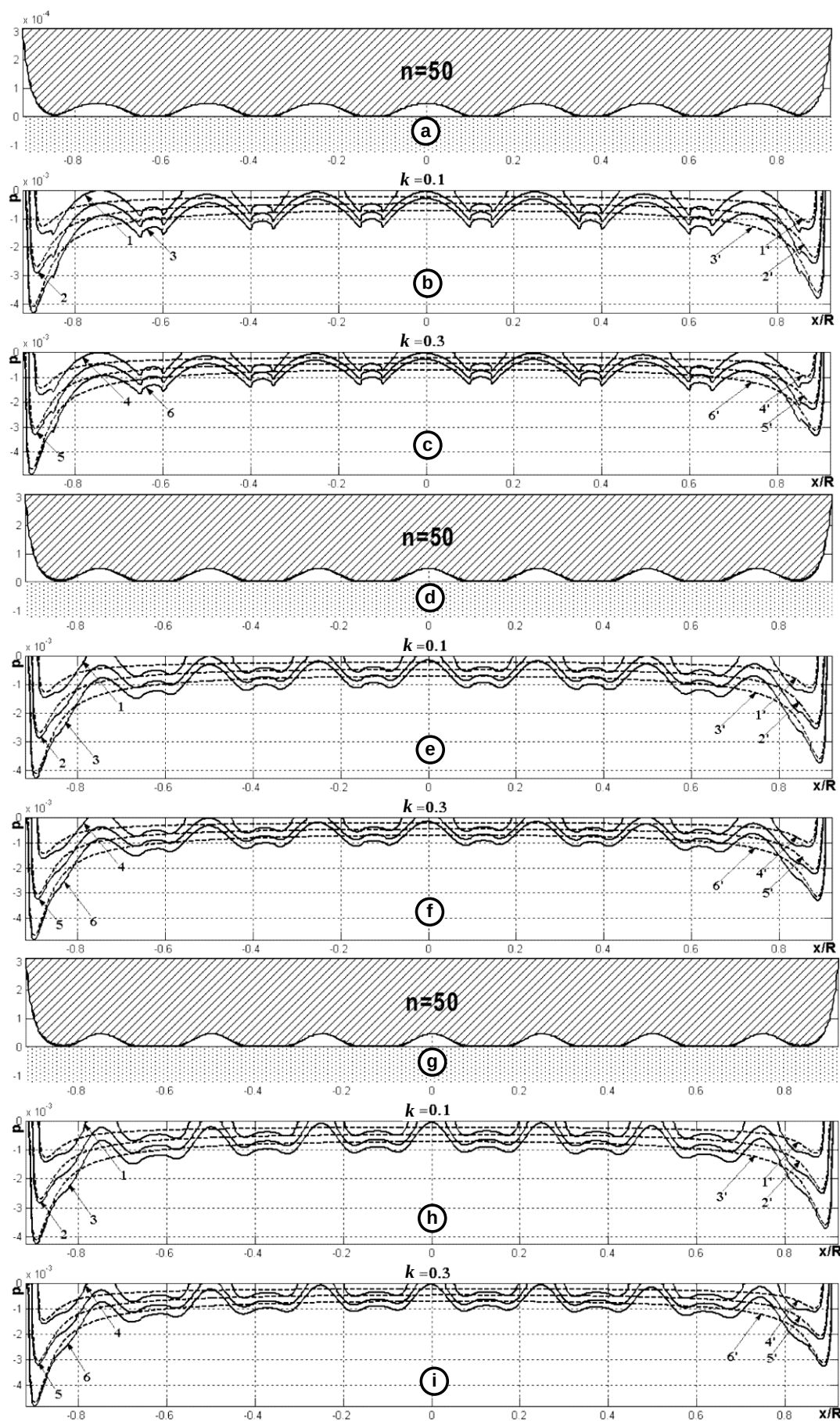


Рис. 4.11. Відносні контактні напруження під плоским гладким штампом з 7-ма виїмками та із закругленням на краях

Таблиця 4.1

Розміри ділянок (зазорів), на яких відсутній контакт

	1-й зазор	2-й зазор	3-й зазор	4-й зазор	5-й зазор	6-й зазор	7-й зазор
$k = 0.1$	$\frac{1}{75}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{19}{150}$	$\frac{19}{150}$	$\frac{37}{300}$	$\frac{17}{150}$	$\frac{13}{300}$
$k = 0.3$	0	$\frac{11}{100}$	$\frac{37}{300}$	$\frac{19}{150}$	$\frac{19}{150}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{17}{300}$

Як видно з таблиці 4.1, величина центрального зазору не залежить від коефіцієнта тертя. Можна зробити припущення, що збільшення коефіцієнта тертя призводить до збільшення асиметрії, аналогічно (з точністю до лінійної регресії), як і для відповідних розподілів відносних контактних напружень $1'$ і $4'$. Якщо прийняти, що величини зазорів та значення для вищевказаних розподілів відносних контактних напружень в їх центрах є значеннями випад-

кових величин відповідно X та Y , то при $k = 0.1$ $\frac{Cov\ X,Y}{\sigma_X \sigma_Y} = 0.8484221$, а при

$k = 0.3$ $\frac{Cov\ X,Y}{\sigma_X \sigma_Y} = 0.8468685$. Оскільки коефіцієнти кореляції в обох випадках

є близькими до 1, то припущення є вірним: між величинами X та Y можна побудувати лінійну регресію. Можна зробити припущення, що при збільшенні кількості точок розбиття і точності збору даних вибірки для величини Y відповідні коефіцієнти кореляції будуть ближчими до 1.

Для цих же розподілів можна обчислити ліві та праві максимальні за величиною значення відносних контактних напружень, що відповідають внутрішнім ділянкам контакту в розподілах 1 і 4, та прийняти їх за значення випадкової величини Z ; в тих же точках порахувати відносні контактні напруження для розподілів $1'$ і $4'$ та прийняти їх за значення випадкової величини Y . Проводячи аналогічні міркування з розподілами (2, 5, $2'$, $5'$) або (3, 6, $3'$, $6'$), дійдемо до висновку, що відповідні коефіцієнти кореляції також будуть близькими до 1 (між величинами Z та Y можна побудувати лінійну регресію).

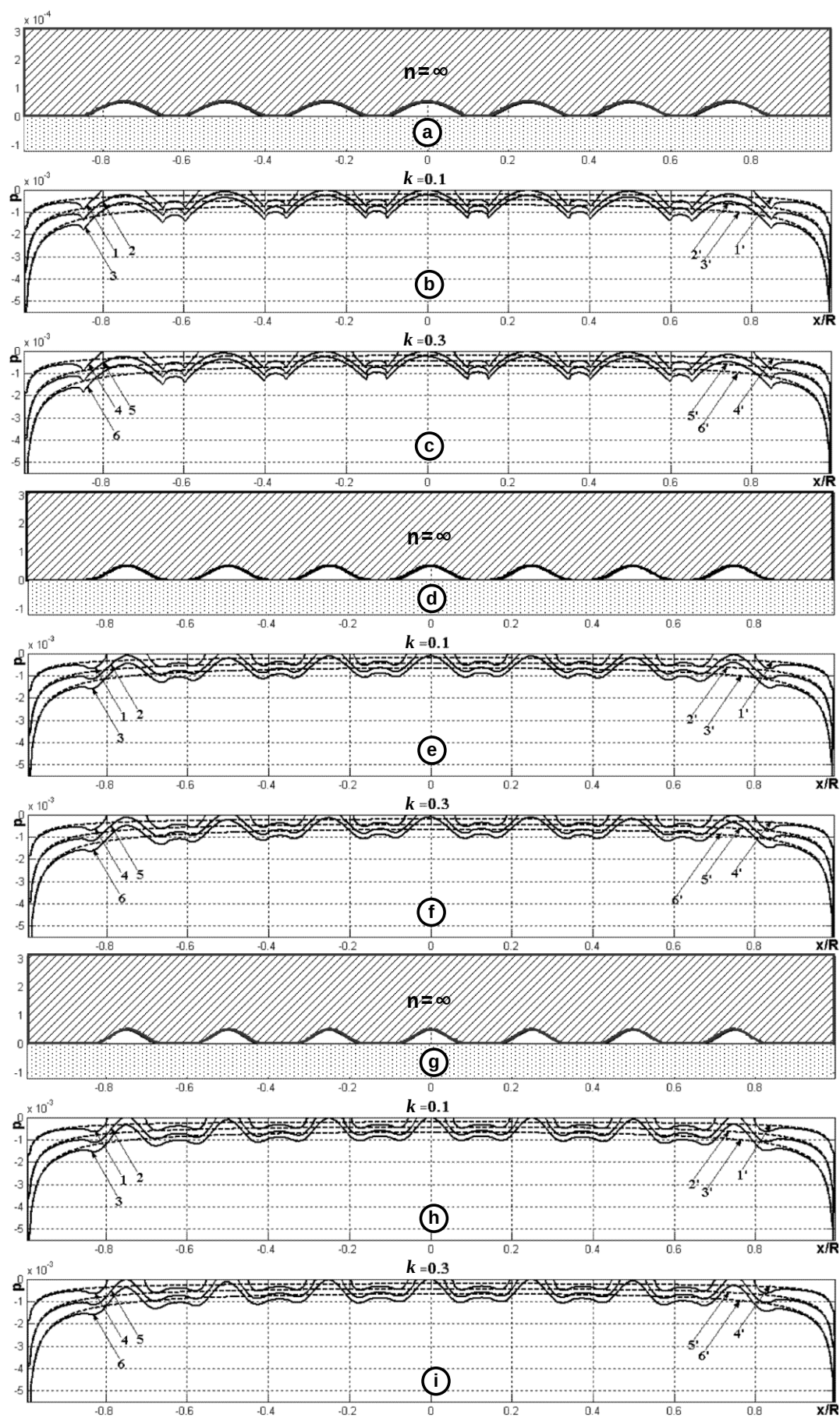


Рис. 4.12. Відносні контактні напруження під плоским гладким штампом з 7-ма виїмками

Для аналізу характеру утворення ділянок контакту або максимальних контактних напружень на окремих ділянках, достатньо відповідного розподілу відносних контактних напружень, що утворилися під аналогічним штампом без виїмок. Крім того, за цим розподілом можна також визначати з великою точністю крайні ліві та праві межі для розподілів під штампом з виїмками. Розглянемо випадок, коли у рівнянні основи (4.11) $n \rightarrow \infty$. Тоді при $N = 501$, $b = -a = 0.995R$ та всіх вищерозглянутих значеннях параметрів отримаємо розподіли відносних контактних напружень, які наведено на рис. 4.12.

Аналізуючи розподіли напружень, зображені при $n_0 = \overline{1,3}$ та при $n = \infty$ відповідно на рис. 4.12, можна зробити висновок про величини навантаження та коефіцієнт кулонівського тертя:

- розподіли на крайніх ділянках фактично не змінюються (очевидно, зміни спричинені крайніми виїмками швидко затухають, що узгоджується з принципом Сен-Венана);

- усереднені напруження на окремих ділянках для відповідних розподілів з виїмками та без виїмок ведуть себе однаково, а це в свою чергу дозволяє стверджувати, що для практичних розрахунків числова дискретизація результатів має більшу значимість, ніж аналітичні відповідні розрахунки, тому, що шуканий розподіл у вигляді аналітичного (неперервного) запису має на практиці місце лише для ідеально відшліфованих поверхонь контактної взаємодії (а дискретизація або поточковий пошук контактних напружень прирівнюється до пошуку усереднень на відповідних ділянках).

На основі розробленого алгоритму розраховано контактні напруження, які виникають під час взаємодії роликів із доріжкою кочення кільця буксового підшипника з метою дослідження міцності та довговічності буксового вузла, який використовується для кріплення рами поїзда до колісної пари.

4.3. Контактна задача для пружного композиту і жосткого кругового циліндра з урахуванням тертя

Розглянемо задачу вивчення контактної взаємодії штампів із композитними матеріалами, які використовуються в радіальних і торцевих ущільненнях

роторно-поршневих машин [25, 128]. Такі матеріали виготовляють шляхом підкріплення основи матеріалами з низьким модулем пружності. Тому при визначенні напружень у покритті будемо моделювати композитний матеріал смугою, що лежить на жорсткій основі [114] (рис. 4.13). Прийнемо, що штамп має форму круга, під штампом має місце тертя, товщина смуги H .

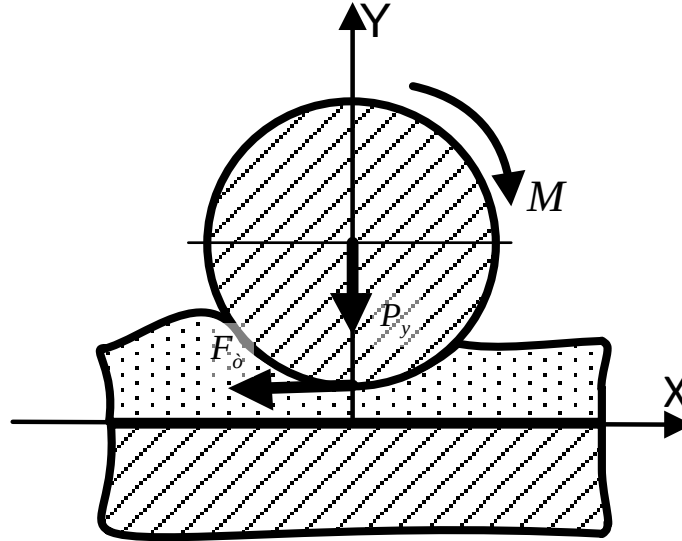


Рис. 4.13. Постановка плоскої контактної задачі

Інтегральні рівняння відносно контактного тиску (σ), віднесеного до модуля зсуву G мають вигляд [2]

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \sigma(t) J(x-t) dt = -D_y + \frac{x^2}{2R}; \\ \int_{\Omega} \sigma(t) dt = -P_y; \end{cases} \quad (4.12)$$

де D_y – вертикальне зміщення штампа, R – радіус штампа, P_y – вертикальна сила, що прикладена до штампа,

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{m+1}{2\pi m} \ln \operatorname{th} \left(\frac{\pi|x|}{4} \right) + w_1(x) - \frac{k}{4m} \operatorname{sign} x - w_2(x); \quad m = \frac{1}{1-2\nu}; \\ w_1(x) &= \frac{m+1}{2\pi m} \int_0^\infty \cos ux \frac{m^2 u \operatorname{ch} u + 1 + m^2 u^2 \operatorname{sh} u}{u \operatorname{ch} u [1 + m^2 u^2 + m(m+2) \operatorname{ch}^2 u]} du, \\ w_2(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin ux \frac{1 + m(m+2) + m^2(m+1)u^2}{u [1 + m^2 u^2 + m(m+2) \operatorname{ch}^2 u]} du. \end{aligned} \quad (4.13)$$

ν – коефіцієнт Пуассона, k – коефіцієнт тертя.

Розрахунки виконано при: радіусі кругового циліндра $R = 0.05\text{ м}$; товщині покриття $H = 0.002\text{ м}$; модулі пружності $E = 10^5\text{ МПа}$ коефіцієнт Пуассона – $\nu = 0.48$; $P_y = 1194\text{ Н/м}$; коефіцієнті тертя $k = 0.3, 0.15, 0$.

Одержані розподіли відносних контактних тисків зображено на рис. 4.14.

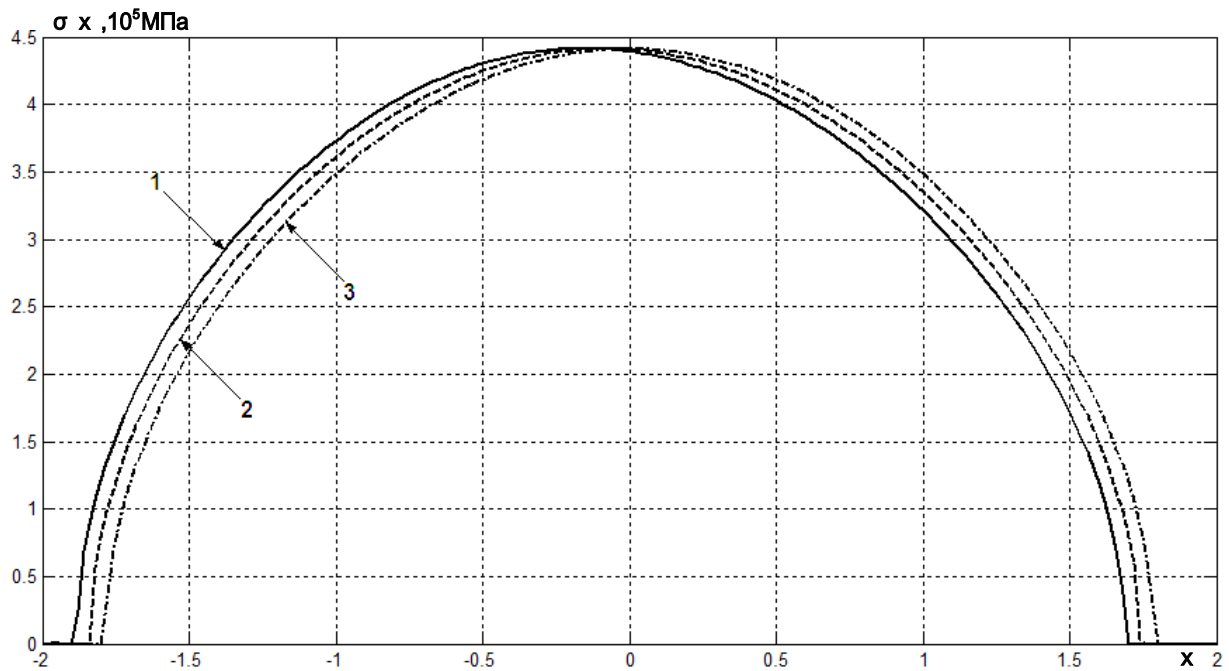


Рис. 4.14. Контактні тиски під круговим штампом

4.4. Висновки до четвертого розділу.

В розділі розглянуто плоскі контактні задачі для випадків ускладнених умов контакту. Досліджено випадок взаємодії ортотропної нескінченної пластинки, послабленої отвором, в межу якого втискається штамп, що має форму, близьку до форми отвору. Проведено дослідження контактного тиску під штампами різної форми залежно від коефіцієнта тертя. Детально розглянуто випадок штампа з системою виїмок. Досліджено тиск на ділянках контакту залежно від кількості виїмок, їх форми та прикладеного навантаження.

Визначено контактні напруження під штампом складної форми (з системою виїмок), що взаємодіє із півплощиною. Розглянуто задачу визначення напружень під штампом з випадковим розміщенням виїмок. Досліджено контактну взаємодію штампів із композитними матеріалами, які використовуються в радіальних і торцевих ущільненнях роторно-поршневих машин.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота спрямована на розв'язання наукового завдання, що полягає в розробці методик розрахунку концентрації напружень біля штампів, отворів і тріщин в анізотропній півплощині за врахування тертя, контакту берегів тріщин та створення на цій основі методик розрахунку на міцність композитних елементів конструкцій при їх взаємодії зі штампами. Найважливіші результати і висновки дисертаційної роботи є наступними:

1. Розроблено алгоритм визначення напружень під штампом, на межах отворів і біля тріщин у композитних елементах конструкцій за врахування тертя та контактної взаємодії берегів тріщин. Він базується на модифікованих інтегральних рівняннях для багатозв'язних анізотропних півплощин із тріщинами, за яких умови на межі півплощини, в тому числі під штампом, задовольняються тотожно. Ядра цих інтегральних рівнянь побудовано з використанням методів М.І. Мусхелішвілі та Л.О. Галіна.

2. Числове розв'язування модифікованих інтегральних рівнянь проведено після їх регуляризації методом механічних квадратур. Виконано дослідження концентрації напружень біля отворів різної форми за дії плоского та параболічного штампів залежно від механічних характеристик композитів, розміщення отворів відносно штампів, коефіцієнтів тертя тощо. Визначення невідомих меж області контакту при дії параболічного штампа зведено до мінімізації функції двох змінних, яка сформована на основі розв'язків інтегральних рівнянь.

3. Розроблено числовий алгоритм дослідження напружень в анізотропній півплощині із внутрішніми та крайовими тріщинами, яка контактує зі штампами різної форми. При розв'язуванні інтегральних рівнянь враховано контакт берегів тріщин. Досліджено контактні напруження та КІН за дії плоского та параболічного штампів.

4. Побудовано методики розрахунку на міцність композитних пластинчатих елементів конструкцій з отворами й тріщинами при їх взаємодії зі штампами різної форми. Для її побудови використано критерій Гофмана, в якому враховано залежність міцнісних характеристик від напрямків дії зусиль.

Визначено граничні сили, які можуть бути прикладені до штампа. Записано рівняння для допустимих зусиль у випадку, коли напружений стан є пропорційним до параметра навантаження.

5. Розвинуто методику дослідження задач із ускладненими умовами контакту. Досліджено контактні напруження, що виникають під штампом, який взаємодіє із межею еліптичного отвору в анізотропній площині за допомогою методів інтегральних рівнянь та квадратичного програмування. Визначено контактні напруження на ізолюваних ділянках контакту при дії штампів, що містять виїмки.

6. Розраховані контактні напруження під штампом та біля отворів для композитів у випадку плоскої деформації та ПНС виявились близькими за величиною. Під параболічним штампом з малим радіусом закруглення основи отвір мало впливає на контактні напруження. При великих радіусах закруглення основи штампа напруження у півплощині істотно залежать від рівня прикладеного навантаження. Найменшою виявилась область контакту для ізотропного матеріалу. За врахування тертя напрямком армування істотно змінює характер розподілу контактних напружень: ці напруження є максимальними біля лівої межі області контакту (в напрямку дії горизонтальної сили) при армуванні матеріалу у вертикальному напрямку і біля правої межі – при армуванні в горизонтальному напрямку. Найбільші розтягувальні напруження на межі отвору виявились для ізотропного матеріалу.

7. КІН K_{II} максимальні для вертикальних тріщин, що розміщені біля країв плоского штампа, причому біля ближчої до межі вершини тріщини вони є більшими за величиною. За врахування контакту берегів тріщин у розглянутих випадках значення КІН K_I є значно меншими за K_{II} . Для тріщин, які паралельні межі півплощини КІН K_{II} є найменшими у випадку, коли жорсткість матеріалу максимальна у вертикальному напрямку. Виконані дослідження процесу росту крайових тріщин біля плоского штампа узгоджуються із експериментальними даними. При дії параболічного штампа на півплощину з несиметрично розміщеною тріщиною відносно штампа контактний

тиск істотно відрізняється від розподілу Герца, і відповідно істотно змінює значення КІН.

8. При відсутності тертя під параболічним штампом руйнування починається біля центру області контакту. При наявності тертя руйнування починається біля центру штампа (для матеріалу $E_x > E_y$) та біля правої межі штампа (для матеріалу $E_x < E_y$). Визначені граничні зусилля виявились найменшими, коли армувальні елементи в композиті нахилені під кутом $\sim 45^\circ$ до межі півплощини. Наявність тертя зменшує значення граничних зусиль, що прикладені до штампа.

9. Для широкого кола задач обґрунтовано спрощений підхід для розрахунку напружень біля отворів та тріщин, в якому приймалось, що до межі півплощини з отвором прикладено зусилля, які виникають під штампом у суцільній півплощині. Проведені розрахунки показали, що при малих розмірах ділянок контакту таким чином знайдені напруження є практично точними.

10. Контактні напруження під штампом на межі еліптичного отвору істотно залежать від механічних характеристик композитів. Найбільші тиски досягаються біля країв області контакту, якщо матеріал має максимальну жорсткість у вертикальному напрямку, і біля центру області контакту – у випадку більшої жорсткості у горизонтальному напрямку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров В. М. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости / В. М. Александров, М. И. Чебаков. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 304 с.
2. Александров В. М. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В. М. Александров, Е. В. Коваленко. – М. : Наука, 1986. – 336 с.
3. Александров В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука, 1983. – 488 с.
4. Андрейкив А. Е. Разрушение квазихрупких тел с трещинами при сложном напряженном состоянии / А. Е. Андрейкив. – К. : Наук. думка, 1992. – 184 с.
5. Аннин Б. Д. Оценка разрушения пластин из композитных материалов с отверстиями / Б. Д. Аннин, В. Н. Максименко // Механика композиционных материалов. – Рига, 1989. – № 2. – С. 284-290.
6. Аргатов И. И. Основы теории упругого дискретного контакта / И. И. Аргатов, Н. Н. Дмитриев. – СПб: Политехника, 2003. – 234 с.
7. Ашкенази Е. К. Анизотропия конструкционных материалов / Е. К. Ашкенази, С. В. Ганов // Справочник. – М. : Машиностроение, 1980. – 247 с.
8. Бардзокас Д. Я. Плоская задача теории упругости для ортотропной области с дефектами / Д. Я. Бардзокас, В. З. Партон, П. С. Теокарис // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 309, № 5. – С. 1072-1077.
9. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов // М. : Наука, 1985. – 256 с.
10. Бережницький Л. Т. До питання механіки руйнування фізично нелінійних матеріалів / Л. Т. Бережницький // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – Т. 35, № 3. – С. 28-38.

11. Божидарнік В. В. Визначення напруженого стану біля крайових тріщин у пластинці з отвором складної форми / В. В. Божидарнік, О. В. Максимович. // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – № 1. – С. 19-26.
12. Божидарнік В. В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами / В. В. Божидарнік, О. В. Максимович. – Луцьк : ЛДТУ, 2003. – 226 с.
13. Божидарнік В. В. Контактна взаємодія штампа довільної форми та пластинки з еліптичним отвором / В. В. Божидарнік, А. Ю. Коцюба, О. В. Максимович // Вісник Дніпропетровського університету. Серія : Механіка. – Дніпропетровськ : В-во ДНУ, 2007. – Вип. 11, т. 2, № 2/2. – С. 29-34.
14. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, П. Вроубел // М. : Мир, 1987. – 524 с.
15. Величко Е. В. Плоская периодическая контактная задача упругой многослойной плиты / Е. В. Величко, А. К. Приварников // Межведомственный научный сборник “Динамические системы”. – 2007. – Вып. 23. – С. 3-10.
16. Ворович И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – М. : Наука, 1974. – 455 с.
17. Габдулхаев Б. Г. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур / Б. Г. Габдулхаев // Известия вузов. Серія : Математика. – 1965. – № 5. – С. 43-51.
18. Галанов Б. А. Об учёте в задаче Герца тангенциальных смещений на поверхности контакта / Б. А. Галанов, Ю. М. Кривонос // Вычислительная и прикладная математика. – 1984. – Вып. 53. – С. 87-94.
19. Галанов Б. А. Постановка и решение некоторых уточнённых упругого контакта двух тел / Б. А. Галанов // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1983. – № 6. – С. 56-63.
20. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления / Л. А. Галин // ПММ. – 1945. – Т. 9, № 5. – С. 413-424.

21. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1980. – 304 с.
22. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости / Л. А. Галин. – М. : Гостехиздат, 1953. – 264 с.
23. Гольдберг А. М. Напряжения в весоной полуплоскости с укрепленным круглым отверстием вблизи прямолинейной грани / А. М. Гольдберг // Известия ВНИИГ. – 1964. – Т. 75. – С. 171-188.
24. Горячева И. Г. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании / И. Г. Горячева, Н. И. Маланчук, Р. М. Мартыняк // Прикладная математика и механика (Москва). – 2012. – Т. 76, № 5. – С. 695-709.
25. Горячева И. Г. Контактные задачи в трибологии / И. Г. Горячева, М. Н. Добычин. – М. : Машиностроение, 1988. – 256 с.
26. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М. : Наука, 2001. – 478 с.
27. Григоренко Я. М. Статика анизотропных толстостенных оболочек / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Н. Д. Панкратова // К. : Вища школа, 1985. – 190 с.
28. Грилицкий Д. В. О напряженном состоянии в окрестности трещин с частично контактирующими берегами / Д. В. Грилицкий, Г. С. Кит // Мат. методы и физ.-мех. поля. – Львов, 1978. – Вып. 8. – С. 35-39.
29. Грилицкий Д. В. До задачі про тиск жорсткої шайби на коловий отвір в ортотропній пластинці / Д. В. Грилицкий // Прикладная механика. – 1973. – Т. 9, № 3. – С. 307–313.
30. Грилицкий Д. В. Тиск жорсткого циліндра на внутрішню поверхню кругової циліндричної порожнини в ортотропному тілі / Д. В. Грилицкий // Доклади АН Укр. РСР. – 1954. – № 3. – С. 212–216.
31. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В. Т. Гринченко. – К. : Наук. думка, 1978. – 264 с.

32. Гудрамович В. С. Методика расчета ферменных конструкций с учётом различных неоднородностей / В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков, Е. В. Самарская // Техн. механика. – 1999. – № 1. – С. 147-152.

33. Гузь А.Н. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами / А. Н. Гузь, М. Ш. Дышель, В. М. Назаренко // Неклассические проблемы механики разрушения / Под ред. А. Н. Гузя. – К. : Наук. думка, 1992. – Т. 4, Кн. 1. – 456 с.

34. Дацишин О. П. Вплив форми модельного контактного навантаження на коефіцієнти інтенсивності напружень для крайової тріщини / О. П. Дацишин, Р. Є. Пришляк, С. В. Приходська та ін. // Пробл. трибології. – 1998. – № 3. – С. 3-16.

35. Дацишин О. П. Довговічність і руйнування твердих тіл під час їх контактної взаємодії / О. П. Дацишин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – № 6. – С. 5-25. (Datsyshyn O. P. Service life and fracture of solid bodies under the conditions of cyclic contact interaction / O. P. Datsyshyn // Materials Science. – 2005. – Vol. 41, № 6. – P. 709-733.)

36. Дацишин О. П. Коефіцієнти інтенсивності напружень для системи крайових паралельних тріщин у півплощині під дією герцівських зусиль на її межі / О. П. Дацишин, А. М. Левус // Машинознавство. – 2000. – № 11. – С. 9-15.

37. Дацишин О. П. Методи оцінювання контактної довговічності елементів трибоз'єднань (огляд) / О. П. Дацишин, В. В. Панасюк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – № 4. – С. 7-20.

38. Дацишин О. П. Напружений стан півплощини з крайовою пологою тріщиною під герцівським навантаженням (огляд) / О. П. Дацишин, Г. П. Марченко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – № 1. – С. 23-34. (Datsyshyn O. P. Stressed state of a half plane with shallow edge crack under hertzian loading (a survey) / O. P. Datsyshyn, H. P. Marchenko // Materials Science. – 2008. – Vol. 44, № 1. – P. 22-34.)

39. Дацишин О. П. Особливості контактування берегів крайової тріщини за рухомого герцівського навантаження / О. П. Дацишин, А. Ю. Глазов, А. Б. Левус // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – № 5. – С. 31-42.
40. Дацишин О. П. Траєкторії розвитку крайових тріщин у тілах кочення за умов граничного змащування / О. П. Дацишин, В. В. Панасюк, Р. Є. Пришляк, А. Б. Терлецький // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 3. – С. 5-12. (Datsyshyn O. P. Paths of edge cracks in rolling bodies under the conditions of boundary lubrication / O. P. Datsyshyn, V. V. Panasyuk, R. E. Pryshlyak, A. B. Terlets'kyi // Materials Science. – 2001. – Vol. 37, № 3. – P. 363-373.)
41. Демкин Н. Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей / Н. Б. Демкин. – М. : Наука, 1970. – 227 с.
42. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 510 с.
43. Дробязко В. В. Периодическая контактная задача с трением на упругой полосе / В. В. Дробязко, В. Н. Никитенко, А. Ф. Улитко // Известия АН Арм. ССР. Механика. – 1978. – Т. 31, № 1. – С. 30-39.
44. Дубецький С. А. Дослідження руйнування крихких тіл внаслідок їх контактної взаємодії з жорсткими штампами / С. А. Дубецький, М. С. Когут, Я. В. Максимович // Проблеми прочності. – 2001. – № 2. – С. 45-51.
45. Зеленьак В. Температурні напруження у кусково-однорідній трикомпонентній області з тріщиною / В. Зеленьак, Р. Мартиняк, Б. Слободян // Машинознавство. – 2007. – № 11. – С. 13-17.
46. Зорин С. А. Анизотропная пластина, ослабленная отверстием и трещинами / С. А. Зорин, В. Н. Максименко // Физико-химическая механика материалов. – 1988. – № 2. – С. 28-33.
47. Кагадий Т. С. Контактная задача для упругой ортотропной полуполосы / Т. С. Кагадий, А. В. Павленко // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 10. – С. 75-84.
48. Кагадий Т. С. Точные решения некоторых задач для пластин с отверстиями / Т. С. Кагадий, А. Г. Шпорта // Збірник наукових праць Націо-

нального гірничого університету. – Дніпро: Вид-во НГУ, 2013. – Вип. 40. – С 136-142.

49. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы плоской задачи теории трещин для многосвязной пластинки / С. А. Калоеров // *Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*. – 1984. – Т. 37, № 4. – С. 12-20.

50. Калоеров С. О. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках / С. О. Калоеров, О. В. Авдюшкина, А. Б. Мироненко. – Донецьк. : Донецький національний університет, 2013. – 380 с.

51. Каминский А. А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий / А. А. Каминский. – К. : Наук. думка, 1982. – 160 с.

52. Кит Г. С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г. С. Кит, М. Г. Кривцун. – К. : Наук. думка, 1983. – 280 с.

53. Козачок О. П. Взаємодія пружного тіла та жорсткої основи з регулярною системою заповнених ідеальним газом прямокутних виїмок / О.П. Козачок, Б. С. Слободян, Р. М. Мартиняк // *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*. – 2015. – Спец. вип. – С. 115-118.

54. Козачок О. П. Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах / О. П. Козачок, Б. С. Слободян, Р. М. Мартыняк // *Теорет. и прикл. механика*. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 45-52.

55. Комбель С. М. Посадка жорсткого диска в еліптичний отвір нескінченної ортотропної пластинки / С. М. Комбель // *Машинознавство*. – 2003. – № 8. – С. 25-31.

56. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д. М. Карпинос. – К. : Наук. думка, 1985. – 592 с.

57. Концентрация напряжений. Разд. 1-4 / С. О. Калоеров, О. В. Авдюшина, А. С. Космодамианский, О. С. Горянска // *Механика композитов*. В 12-ти томах / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – К. : Наук. думка, 1998. – Т. 7. – 387 с.

58. Корнейчук А. А. Квадратурная формула для сингулярных интегралов / А. А. Корнейчук // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. – М. : Наука, 1964. – С. 64-74.
59. Кортен Х. Т. Механика разрушения композитов / Х. Т. Кортен // Разрушение / Под ред. Г. Либовица. – М. : Мир, 1976. – Т. 5. – С. 367-471.
60. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А. С. Космодамианский. – Киев-Донецк: Вища школа, 1976. – 200 с.
61. Коцюба А. Ю. Контактна взаємодія жорсткого штампа та нескінченної ортотропної пластинки з близьким до еліптичного отвором / А. Ю. Коцюба, С. В. Лавренчук // Наукові нотатки : Міжвузівський збірник (за галузями знань “Машинобудування та металообробка”, “Інженерна механіка”, “Металургія та матеріалознавство”). – Луцьк, 2011. – Вип. 33. – С. 80-83.
62. Крагельский И. В. Основы расчетов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – М. : Машиностроение, 1977. – 526 с.
63. Кузьменко А. Г. Метод эквивалентной податливости в контактной механике // Проблемы трибології. – 1997. – № 1. – С. 101-122.
64. Кундрат М. М. Дослідження локального руйнування композиції з включенням / М. М. Кундрат // Волинський математичний вісник. – 1996. – Вип. 2. – С. 116-118.
65. Лавренчук С. Плоскі контактні задачі, у яких ядра рівнянь Фредгольма містять невластні інтеграли // ПЛ-НТУ Транскордонний обмін досвідом : Монографія. – Люблін : Політехніка Люблінська, 2015. – Том 1. – С. 11-21. (Lavrenchuk S. Płaskie zagadnienia kontaktowe, w których jądra równań Fredholma zawierają całki niewłaściwe // PL-NTU Transgraniczna wymiana doświadczeń : Monografie. – Lublin : Politechnika Lubelska, 2015. – Tom. 1. – P. 73-84.)
66. Лавренчук С. В. Тиск плоского штампа з системою виїмок на пружну півплощину // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій :

Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ : В-во ДНУ ім. Олеса Гончара “Ліра”, 2016. – Вип. 25. – С. 85-100.

67. Лехницький С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницький. – М. : Наука, 1977. – 463 с.

68. Лехницький С. Г. Распределение напряжений в анизотропной пластинке с эллиптическим упругим ядром (плоская задача) / С. Г. Лехницький // Инженерный сборник. – 1954. – Т. 19. – С. 83-106.

69. Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницький. – М. : Гостехиздат, 1957. – 464 с.

70. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И. К. Лифанов. – М. : ТОО “Янус”, 1995. – 520 с.

71. Лобода В. В. Термопружна задача для крайової міжфазної тріщини з зоною контакту в анізотропному біматеріалі / В. В. Лобода, О. С. Філіпова // Машинознавство. – 2003. – № 5. – С. 3-9.

72. Мавлютов Р. Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций / Р. Р. Мавлютов. – М. : Наука, 1981. – 140 с.

73. Максименко В. Н. Задача об анизотропной пластине, ослабленной криволинейными трещинами и усиленной ребрами жесткости / В. Н. Максименко // ПМТФ. – 1982. – № 2. – С. 163-169.

74. Максимович В. М. Плоскі контактні задачі теорії пружності для тіл складної форми / В. М. Максимович, А. Ю. Коцюба, С. В. Лавренчук // Монографія. – Луцьк : РВВ ЛНТУ, 2012. – 98 с.

75. Максимович О. В. Визначення напружень біля кругового штампа та тріщин у ізотропній півплощині / О. В. Максимович, С. В. Лавренчук // Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві : Збірник наукових праць. – Луцьк, 2016. – Вип. 5. – С. 126-136.

76. Максимович О. В. Концентрація напружень біля отворів та штампа в анізотропній півплощині / О. В. Максимович, С. В. Лавренчук, Т. Я. Соляр // Прикладні проблеми механіки і математики. – Львів, 2016. – Вип. 14. – С. 76-84.

77. Максимович О. В. Напруження біля висвердлених отворів у околі вершин тріщин /О. В. Максимович, О. В. Іллюшин, С. В. Лавренчук // Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві : Збірник наукових праць. – Луцьк, 2015. – Вип. 4. – С. 91-98.

78. Максимович О. В. Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок з отворами і криволінійними тріщинами при врахуванні контакту їхніх берегів / О. В. Максимович // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – № 3. – С. 36-42.

79. Максимович О. В. Числовий аналіз напружень біля штампів і тріщин у анізотропній півплощині за врахування тертя / О. В. Максимович, С. В. Лавренчук // Науковий журнал “Комп’ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво”. – Луцьк : В-во Луцького НТУ, 2016. – Вип. 24-25. – С. 99-106.

80. Максимук О. В. Періодична контактна задача про взаємодію зубчастості та плоскої поверхонь / О. В. Максимук // Машинознавство. – 2001. – № 2. – С. 13-17.

81. Мартинович Т. Л. Крайові умови в інтегральній формі задачі про напружений стан в анізотропній пластинці з несиметрично підкріпленням краєм / Т. Л. Мартинович, В. В. Божидарник // Вісник Львів. у-ту ім. Франка. Сер. мех.-мат. – 1972. – Вип. 7. – С. 112-118.

82. Мартыняк Р. М. Термонапружений стан біматеріалу із закритою міжфазною тріщиною з шорсткими поверхнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, №1. – С. 71-79.

83. Механика контактных взаимодействий / Под ред. И. И Воровича и В. М. Александрова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 672 с.

84. Механика разрушения / Под ред. А. А. Каминского. – К. : ПТОО “А.С.К.”, 1996. – 340 с.

85. Микляев П. Г. Анизотропия механических свойств металлов / П. Г. Микляев, Я. Б. Фридман. – М. : Металлургия, 1986. – 224 с.

86. Морозов Е. М. Математические вопросы теории трещин / Е. М. Морозов. – М. : Наука, 1984. – 256 с.
87. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.
88. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1968. – 512 с.
89. Мэтьюз Д. Г. Численные методы. Использование MATLAB, 3-е изд. : Пер. с англ. / Д. Г. Мэтьюз, К. Д. Финк. – М. : Издательский дом “Вильямс”, 2001. – 720 с.
90. Николишин М. М. Напружений стан неоднорідної пластини з тріщиною / М. М. Николишин, В. В. Опанасович, Л. Р. Куротчин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 3. – С. 83-97.
91. Павленко А. В. Некоторые задачи для криволинейно-анизотропной пластинки с отверстиями / А. В. Павленко, Т. С. Кагадий, О. В. Белова // Між-нар. наук. конф. “Математичні проблеми технічної механіки-2011”, 13-15 квітня 2011 р. – Дніпр-вськ-Дніпродзержинськ, 2011. – Ч. 1. – С. 45-46.
92. Панасюк В. В. Деякі контактні задачі теорії пружності / В. В. Панасюк, М. Й. Теплий. – К. : Наукова думка, 1975. – 195 с.
93. Панасюк В. В. Контактна задача про дію штампа на границю пів-площини, послабленої системою криволінійних тріщин / В. В. Панасюк, О. П. Дацишин, Г. П. Марченко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – № 6. – С. 7-16. (Panasyuk V. V. Contact problem for a half plane with cracks subjected to the action of a rigid punch on its boundary / V. V. Panasyuk, O. P. Datsyshyn, H. P. Marchenko // Materials Science. – 1995. – Vol. 31, № 6. – P. 667-678.)
94. Панасюк В. В. Механіка квазіхрупкого руйнування матеріалів / В. В. Панасюк. – К. : Наук. думка, 1991. – 416 с.
95. Панасюк В. В. Про ріст тріщин у тілах кочення за умов сухого тертя та зволоження / В. В. Панасюк, О. П. Дацишин, Г. П. Марченко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 1. – С. 7-16. (Panasyuk V. V. Crack growth in rolling bodies under the conditions of dry friction and wetting / V. V. Panasyuk,

О. Р. Datsyshyn, Н. Р. Marchenko // Materials Science. – 2001. – Vol. 37, № 1. – P. 1-11.)

96. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – К. : Наук. думка, 1976. – 442 с.

97. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. Графики и формулы для расчета конструктивных элементов на прочность / Р. Петерсон [пер. з англ.]. – М. : Мир, 1977. – 302 с.

98. Приварников А. К. Плоска періодична задача про дію системи гладких штампів на пружну багатопарову основу / А. К. Приварников, І. А. Столярчук // Межведомственный научный сборник “Динамические системы”. – 2006. – Вып. 20. – С. 35-42.

99. Рабинович А. С. О решении контактных задач для шероховатых тел / А. С. Рабинович // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1979. – № 1. – С. 52-57.

100. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К. : Наукова думка, 1968. – 887 с.

101. Саврук М. П. Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами / М. П. Саврук, В. М. Зеленьак. – Львів: РАСТР, 2009. – 212 с.

102. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – К. : Наукова думка, 1981. – 324 с.

103. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М. П. Саврук. // Механика разрушения и прочность материалов: справочное пособие в 4-х т. / Под ред. В. В. Панасюка. – К. : Наук. думка, 1988. – Т. 2. – 620 с.

104. Саврук М. П. Тиск з тертям абсолютно жорсткого штампа на пружний півпростір з тріщинами / М. П. Саврук, А. Томчик // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – № 3. – С. 5-15.

105. Саврук М. П. Чисельний аналіз у плоских задачах теорії тріщин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, І. В. Прокопчук. – К. : Наукова думка, 1989. – 248 с.

106. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела / В. С. Саркисян. – Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1976. – 536 с.
107. Слободян Б. С. Локальне проковзування пружних тіл за наявності газу в міжконтактному зазорі / Б. С. Слободян, Н. І. Маланчук, Р. М. Мартиняк, Б. А. Ляшенко, В. Є. Марчук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – № 2. – С. 91-96.
108. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х томах / Под ред. Ю. Мураками. – М. : Мир, 1990. – Т. 1. – 448 с.
109. Стрельникова Е. Н. О влиянии контакта берегов криволинейной трещины в анизотропной пластине на коэффициенты интенсивности / Е. Н. Стрельникова // Проблемы Машиностроения. – 1980. – № 12. – С. 15-19.
110. Сулим Г. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Сулим. – ІППММ НАН України, Львівський національний університет ім. І. Франка, 2007. – 716 с.
111. Сяський А. О. Контакт жорсткого диска з кутовими точками і трикутного отвору нескінченної ізотропної пластинки / А. О. Сяський, С. М. Комбель // Наукові нотатки. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – Вип. 12. – С. 259-260.
112. Сяський А. Мішана контактна задача для ортотропної пластинки з еліптичним отвором і жорсткого диска / А. Сяський, Н. Шинкарчук // Вісник ТНТУ. – 2010. – Т. 15, № 4. – С. 7-13.
113. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1989. – 560 с.
114. Усов П. П. Контактная задача для упругого слоя и жесткого цилиндра при наличии сил трения / П. П. Усов, В. Д. Данилов // Трение и износ. – Гомель, 2007. – Том. 28, № 3. – С. 225-237.
115. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости / Я. С. Уфлянд. – М.; Л. : Гостехиздат, 1950. – 232 с.
116. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Л. : Наука, 1968. – 402 с.

117. Фильштинский Л. А. Двоякопериодическая задача теории упругости для анизотропной среды с криволинейными разрезами / Л. А. Фильштинский // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. – № 6. – С. 116-124.
118. Фильштинский Л. А. Краевые задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом / Л. А. Фильштинский // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 6. – С. 72-79.
119. Фильштинский Л. А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий / Л. А. Фильштинский // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, № 3. – С. 430-441.
120. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1983. – 296 с.
121. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
122. Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде / Г. П. Черепанов // ПММ. – 1967. – Т. 31, № 3. – С. 130-136.
123. Чумак К. А. Періодична контактна задача термопружності для двох півпросторів з шорсткими поверхнями на локальних ділянках / К. А. Чумак, Р. М. Мартиняк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – № 6. – С. 92-97.
124. Шваб'юк В. І. Комплексне подання уточнених рівнянь згину ортотропних пластин з тріщинами / В. І. Шваб'юк // Машинознавство. – 1999. – № 4. – С. 51-55.
125. Шерман Д. И. К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды / Д. И. Шерман // Прикл. математика и механіка. – 1942. – № 6. – С. 509-514.
126. Шерман Д. И. Плоская задача теории упругости для анизотропной среды / Д. И. Шерман // Труды Сейсмологического института АН СССР. – 1938. – № 86. – С. 51-78.
127. Штаерман И. Я. Контактна задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – М. : Гостехиздат, 1949. – 270 с.

128. Alblas J. B. The two dimensional contact problem of a rough stamp sliding slowly on an elastic layer. – I. General considerations and thick layer asymptotics / J. B. Alblas, M. Kuipers // *Int. J. Solids and Structures*. – Printed in Great Britian, 1971. – Vol. 7. – P. 99-109.

129. Antipov Y. A. Galin's problem for a periodic system of stamps with friction and adhesion / Y. A. Antipov // *Int. J. Solids and Structures*. – 2000. – Vol. 37. – P. 2093-2125.

130. Atkinson C. Interaction between a crack and a free or welded boundary in media with arbitrary anisotropy / C. Atkinson, D. A. Eftaxiopoulos // *Int. J. Fracture*. – 1991. – Vol. 50, № 3. – P. 159-182.

131. Block J. M. Periodic contact problems in plane elasticity / J. M. Block, L. M. Keer // *J. Mech. Mater. Struct.* – 2008. – Vol. 3, № 7. – P. 1207-1237.

132. Chumak K. Partial slip contact problem for solids with regular surface texture assuming thermal insulation or thermal permeability of interface gaps / K. Chumak, N. Malanchuk, R. Martynyak // *Int. J. Mechanical Sciences*. – 2014. – Vol. 84. – P. 138-146.

133. Chumak K. Thermal rectification between two thermoelastic solids with a periodic array of rough zones at the interface / K. Chumak, R. Martynyak // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2012. – Vol. 55, № 21-22. – P. 5603-5608.

134. Ciavarella M. Reduced dependence on loading parameters in almost conforming contact / M. Ciavarella, A. Baldini, J. Barber, A. Strozzi // *Int. J. Mechanical Sciences*. – 2006. – Vol. 48. – P. 917-925.

135. Ciavarella M. The generalized cattaneo partial slip plane contact problem. I – theory / M. Ciavarella // *Int. J. Solids and Structures*. – 1998. – Vol. 35, № 18. – P. 2349-2362.

136. Ciavarella M. The generalized cattaneo partial slip plane contact problem. II – examples / M. Ciavarella // *Int. J. Solids and Structures*. – 1998. – Vol. 35, № 18. – P. 2363-2378.

137. Cinar A. The crack and wedging problem for an orthotropic strip / A. Cinar, F. Erdogan // *Int. J. Fracture*. – 1993. – Vol. 23, № 2. – P. 83-102.

138. Craciun E.-M. Compact closed form solution of the incremental plane states in a pre-stressed elastic composite with an elliptical hole / E.-M. Craciun, Luminita Barbu // ZAMM-J. Appl. Math. and Mech. (Zeitschrift für Angewandte Math. und Mech.) . – 2015. – . – Vol. 95, № 2. – P. 193-199.

139. Craciun E.-M. Prestressed Orthotropic Material Containing an Elliptical Hole / E.-M. Craciun // Advanced Methods of Continuum Mechanics for Materials and Structures. – Springer Singapore, 2016. – P. 327-336.

140. Cruse T. A. Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary integral equation method / T. A. Cruse // In the surface crack: Physical problems and computational solutions. – Ed. J.L. Swedlow. – ASME Publ. – New York, 1972. – P. 153-170.

141. Datsyshyn O. P. A fracture mechanics approach to prediction of pitting under fretting fatigue conditions / O. P. Datsyshyn, V. M. Kadyra // Int. J. Fat. – 2006. – Vol. 28, № 4. – P. 375-385.

142. Datsyshyn O. P. Pitting of the rolling bodies contact surface / O. P. Datsyshyn, V. V. Panasyuk // Wear. – 2001. – Vol. 251, № 1-12. – P. 1347-1355.

143. Di Pisa C. An efficient BEM formulation for analysis of bond-line cracks in thin walled aircraft structures / C. Di Pisa, M. H. Aliabadi // Int. J. Fracture. – 2013. – Vol. 179 – P. 129-145.

144. Erdogan F. Fracture of composite materials / F. Erdogan // Prospects Fract. Mech. – Leyden, 1974. – P. 477-492.

145. Goryacheva I. G. Contact problems for textured surfaces involving frictional effects / I. G. Goryacheva, R. M. Martynyak // Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol. – 2014. – Vol. 228, № 7. – P. 707-716.

146. Goshima T. Mutual interference of multiple surface cracks due to rollingsliding contact with frictional heating / T. Goshima Y. Kamishima // Ibid. – 1994. – A37, № 3. – P. 216-223.

147. Goshima T. Mutual interference of two surface cracks in a semi-infinite body due to rolling contact with frictional heating by a rigid roller / T. Goshima, Y. Kamishima // JSME Int. J. – 1996. – A39, № 1. – P. 26-33.

148. Goshima T. Stress intensity factors of a subsurface crack in a semi-infinite body due to rolling/sliding contact and heat generation / T. Goshima, T. Soda // JSME Int. J. – 1997. – A40, № 3. – P. 263-270.

149. Goshima T. Thermomechanical effects on crack propagation in rolling contact fatigue failure / T. Goshima // J. Therm. Stres. – 2003. – Vol. 26, № 6. – P. 615-639.

150. Goshima T. Three-dimensional analysis of thermal effects on surface crack propagation in rolling contact / T. Goshima, M. T. Hanson, L. M. Keer // J. Therm. Stres. – 1990. – Vol. 13. – P. 237-261.

151. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solid / A. A. Griffith // Phil. Trans. Roy. Soc. – London, 1920. – A221. – P. 163-198.

152. Guz A. N. On some non-classical problems of fracture mechanics taking into account the stresses along cracks / A. N. Guz // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 8. – P. 937-941.

153. Guz A. N. Fracture and stability of materials and structural members with cracks: approaches and results / A. N. Guz, M. Sh. Dyshel', V. M. Nazarenko // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 12. – P. 1323-1359.

154. Haojiang Ding. Elasticity of Transversely Isotropic Materials / Ding Haojiang, Weiqu Chen, L. Zhang. – Springer, 2006. – 435 p.

155. Hasebe N. Circular inclined punch problem with two corners to contact with a half plane with a surface crack / N. Hasebe, J. Qian // Contact Mechanics II: Computational Techniques: Proc. 2-nd Int. Conf. Computational Methods in Contact Mechanics. – Ed. M.H. Aliabadi and C. Alessandri. – Southampton; Boston : Computational Mechanics Publ., 1995. – P. 159-166.

156. Hasebe N. Edge crack due to circular rigid punch in incomplete contact / N. Hasebe, J. Qian // Mech. Mater. – 1998. – Vol. 28. – P. 271-279.

157. Hasebe N. Frictional punch and crack in plane elasticity / N. Hasebe, M. Okumura, T. Nakamura // ASCE J. Eng. Mech. – 1989. – Vol. 115, № 6. – P. 1137-1149.

158. Hasebe N. Stress intensity solutions for the interaction between a hole edge crack and a line crack / N. Hasebe, Y.Z. Chen // *Int. J. Fracture*. – 1996. – Vol. 77, № 4. – P. 351-366.

159. Iida J. Stress intensity factors of a rhombic hole with symmetric cracks under uniform transverse thin plate bending / J. Iida, N. Hasebe // *Engineering Fract. Mech.* – 2016. – Vol. 156. – P. 16-24.

160. Irwin G. R. Fracture dynamics / G. R. Irwin. // *Fracturing of metals*. – Gleweland, ASME, 1948. – P. 147-166.

161. Irwin G. R. Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate / G. R. Irwin // *Trans. ASME J. of Appl. Mech.* – 1957. – Vol. 24. – P. 361-364.

162. Johnson K. L. The adhesion of two elastic bodies with slightly wavy surfaces / K. L. Johnson // *Int. J. Solids and Structures*. – 1995. – Vol. 32, № 3/4. – P. 423-430.

163. Jones R. M. *Mechanics of Composite Materials*. 2-nd edition / R. M. Jones. – Taylor, Francis, 1999. – 519 p.

164. Kasano H. Singular stress fields at the tips of a crack normal to the bi-material interface of isotropic and anisotropic half planes / H. Kasano, T. Watanabe, H. Matsumoto, I. Nakahara // *Bull. JSME*. – 1986. – Vol. VI (29), № 258. – P. 4043-4049.

165. Kiiiko V. M. A simple model of the fracture process zone in composites / V. M. Kiiiko, S. T. Mileiko // *Compos. Sci. and Technol.* – 1986. – Vol. 26, № 2. – P. 85-94.

166. Kit H. S. Methods for the Determination of Static and Dynamic Stresses in Bodies with Subsurface Cracks / H. S. Kit, R. M. Kushnir, V. V. Mykhas'kiv, M. M. Nykolyshyn // *Materials Science*. – 2011. – Vol. 47, № 2. – P. 177-187.

167. Kotsyuba A. Yu. Contact interaction of rigid stamp and infinite orthotropic plate with close to elliptical hole / A. Yu. Kotsyuba // *Acta mechanica et automatica*. – Bialystok : Bialystok University of Technology Publishing Office, 2013. – Vol. 7, № 4 (26). – P. 230-235.

168. Krishtafovich A. A. Contact between anisotropic half-plane and rigid body with regular microrelief / A. A. Kryshtafovych, R. M. Martynyak, R. N. Shvets // J. Friction and Wear. – 1994. – Vol. 15, № 3. – P. 15-21.

169. Kryshtafovych A. A. Frictional contact of two elastic half-planes with local recesses in boundary / A. A. Kryshtafovych, R. M. Martynyak // J. Friction and Wear. – 2000. – Vol. 21, № 4. – P. 6-15.

170. Kryshtafovych A. A. Frictional contact of two elastic half-planes with wavy surfaces / A. A. Kryshtafovych, R. M. Martynyak // J. Friction and Wear. – 2000. – Vol. 21, № 5. – P. 1-8.

171. Maksimovic Katarina Modeling of the surface cracks and fatigue life estimation / Katarina Maksimovic, Stevan Maksimovic, Vera Nikolic-Stanojevic // Fract. of Nano and Eng. Materials and Structures. – Springer Netherlands, 2006. – P. 795-796.

172. Maksimovich O. V. Consideration of anisotropy and contact of cracks edge at stress calculations of rolling bearings / O. V. Maksimovich, A. V. Il'yushin, A. D. Ivashhuk // Vestnik OrelGAU – December 2014. – Vol. 6, № 51. – P. 80-86.

173. Maksymovych O. Doubly periodic cracks in the anisotropic medium with the account of contact of their faces / O. Maksymovych, Ia. Pasternak, H. Sulym, S. Kutsyk // Acta mechanica et automatica. – 2014. – Vol. 8, № 3. – P. 160-164.

174. Malanchuk N. Contact interaction of two solids with surface groove under proportional loading / N. Malanchuk, R. Martynyak // Int. J. Solids and Structures. – Printed in Great Britian, 2012. – Vol. 49, № 23-24. – P. 3422-3431.

175. Martynyak R. M. Shear of two half planes pressed to each other and containing a surface groove. Pt. 1. Full contact / R. M. Martynyak, N. I. Malanchuk, B. E. Monastyr's'kyi // Materials Science. – 2005. – Vol. 41, № 2. – P. 178-185.

176. Methods of analysis and solutions of crack problems / By Ed. G. C. Sih. – Springer Science & Business Media, 2013. – Vol. 1. – 562 p.

177. Mishra M. An anisotropic strip weakened by an array of cracks / M. Mishra, J. C. Mishra // Int. J. Eng. Sci. – 1983. – Vol. 21, № 3. – P. 187-198.

178. Nikolić V. Stress distribution in an anisotropy plane field weakened by an elliptical hole / V. Nikolić, Ć. Dolićanin, M. Radojković, E. Dolićanin // Technical Gazette. – 2015. – Vol. 22, №. 2. – P. 329-335.

179. Okumura M. Crack due to wedge-shaped punch with friction / M. Okumura, N. Hasebe, T. Nakamura // Ibid. – 1990. – Vol. 116, № 10. – P. 2173-2185.

180. Orovan E. O. Fundamental of brittle behavior of metals / E. O. Orovan // Fatigue and Fracture of metals / By Ed. N.X. Wiley. – 1950. – P. 139-167.

181. Panasyuk V. V. Stress state of a half-plane with cracks under rigid punch action / V. V. Panasyuk, O. P. Datsyshyn, H. P. Marchenko // Int. J. Fracture. – 2000. – Vol. 101, № 4. – P. 347-363.

182. Panasyuk V. V. The crack propagation theory under rolling contact / V. V. Panasyuk, O. P. Datsyshyn, H. P. Marchenko // Eng. Fract. Mech. – 1995. – Vol. 52, № 1. – P. 179-191.

183. Pauk V. J. Plane rolling contact of wavy surface / V. J. Pauk, B. W. Zastrau // Physicochemical Mechanics of Materials. – Lviv, 2005. – Vol. 41. – P. 76-82.

184. Pauk V. J. Wybrane zagadnienia kontaktu ciał odkształcalnych / Włodzimierz Pauk. – Politechnika świętokrzyska. – Kielce, 2005. – 164 p.

185. Polyanin A. D. Handbook of Integral Equations. 2-nd edition / A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov – Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2008. – 1144 p.

186. Qian J. Circular rigid punch on a semi-infinite plate with an oblique edge crack subjected to concentrated forces or point dislocations / J. Qian, N. Hasebe // Proc. Jap. Soc. Civ. Eng. – 1997. – № 570. – P. 149-159.

187. Rooke D. P. The compendium of stress intensity factors / D. P. Rooke, D. J. Cartwright. – London : Her Majesty's Stationare Office, 1976. – 330 p.

188. Schclar N. A. Anisotropic Analysis Using Boundary Elements / N. A. Schclar // Computational Mechanics Publications Southampton UK and Boston +USA. – 1994. – 149 p.

189. Sih G. C. Handbook of Stress Intensity Factors / G. C. Sih. – Lehigh University Press, 1973. – 120 p.

190. Sih G. C On cracks in rectilinearly anisotropic bodies / G. C. Sih, P. C. Paris, G. R. Irwin // Int. J. Fracture Mechanics. – 1965. – Vol. 1, № 3. – P. 189-203.
191. Sadowski T. Cracks propagation and interaction in an orthotropic elastic material: Analytical and numerical methods / T. Sadowski, L. Marsavina, N. Peride, E.-M. Craciun // Comp. Mat. Sci. – 2009. – Vol. 46, № 3. – P. 687-693.
192. Tada H. The stress analysis of cracks: Handbook / H. Tada, P. C. Paris, G. R. Irwin. – Hellertown : Del Research Corp., 1973. – 385 p.
193. Walsh P. F. Linear fracture mechanics in ortotropic materials / P. F. Walsh // Eng. Fract. Mech. – 1972. – Vol. 4, № 3. – P. 533-541.
194. Westergaard H. M. Bearing pressures and cracks / H. M. Westergaard // ASME J. Appl. Mech. – 1939. – Vol. 6, № 2. – P. A49-A53.
195. Wu E. M. Application of fracture mechanics to anisotropic plates / E. M. Wu // J. Appl. Mech. Tras. ASME. – 1967. – Vol. 34, № 4. – P. 967-974.

Додаток А



№ _____ на № _____ від _____

Акт

впровадження наукових результатів,
які одержані в дисертаційній роботі асистента
Луцького національного технічного університету

Лавренчук Світлани Василівни

**“Розрахунок напружень біля штампів, отворів та тріщин у композитних
пластинчатих елементах конструкцій”,
на ПрАТ “Львівський локомотиворемонтний завод”**

Даний акт складено про те, що розроблений в дисертаційній роботі Лавренчук С.В. метод та програмне забезпечення використані на ПрАТ “Львівський локомотиворемонтний завод”. Здійснено розрахунок контактних напружень, які виникають при взаємодії роликів з доріжкою кочення кільця буксового підшипника.

Проведені дослідження використано на ПрАТ “Львівський локомотиворемонтний завод” для оцінки міцності та довговічності буксового вузла, який використовується для кріплення рами до колісної пари.

Даний акт складений для подачі у спеціалізовану вчену раду із захисту дисертацій і не є підставою для взаємних фінансових розрахунків.

В.о. головного інженера

О.М. Стадницький

Головний технолог

В.Р. Бас



Додаток Б

«ПОГОДЖЕНО»

Луцький національний технічний
університет

С.П. Шимчук

2016 р.

«ЗАТВЕРДЖЕНО»

Директор технічний – головний
конструктор
ДП «Автоскладальний завод №1»
АТ «АК «Богдан моторс»

Б.С. Гвоздик

2016 р.

АКТ

про використання ДП «Автоскладальний завод №1» АТ «АК «Богдан моторс» результатів науково-дослідної роботи (НДР) «Розрахунок напружень біля штампів, отворів та тріщин у композитних пластинчатих елементах конструкцій», виконаної Луцьким національним технічним університетом.

Ми, комісія у складі: начальника відділу розвитку продукту АТ «АК «Богдан моторс» Антонова В.С. та головного технолога АТ «АК «Богдан моторс» Марущака В.О., професора кафедри технічної механіки луцького НТУ Шваб'юка В.І., завідувача кафедри матеріалознавства та ПФКМ Луцького НТУ Мельничука М.Д. підтверджуємо використання результатів вище вказаної науково-дослідної роботи.

Виконано дослідження контактних напружень, які виникають у вузлах взаємодії механізму навіски дверей. Розроблена методика дозволяє визначати контактні напруження під роликами за врахування тертя, анізотропії механічних характеристик матеріалів та поверхневих тріщин. Проведені автором дисертації дослідження використовуються в ДП «Автоскладальний завод №1» АТ «АК «Богдан моторс» при розрахунках на міцність та довговічність вузлів взаємодії механізму навіски за наявності на них пошкоджень у вигляді тріщини.

Даний акт складений для подачі у спеціалізовану вчену раду із захисту дисертацій і не є підставою для взаємних фінансових розрахунків.

Члени комісії з кожної сторони:

Професор кафедри технічної
механіки, д.т.н.

В.І. Шваб'юк

Начальник відділу розвитку продукту

В.С. Антонов

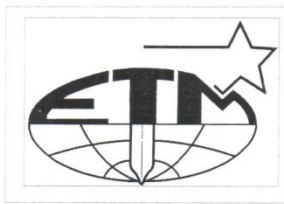
Завідувач кафедри матеріалознавства
та ПФКМ, доцент, к.т.н.

М.Д. Мельничук

Головний технолог

В.О. Марущак

Додаток В

ПУБЛІЧНЕ АКЦІОНЕРНЕ ТОВАРИСТВО
"ЕЛЕКТРОТЕРМОМЕТРІЯ"

43001 м. Луцьк, вул. Ковельська, 40 ☎ +380 332 24-22-61 FAX +380 332 77-43-07 e-mail
etm@etm.org.ua <http://www.etm.org.ua>
Р/р 26000231344001 у Волинській філії ПАТ КБ Праватбанка
МФО 303440 ідентифікаційний код 00225644

Акт

впровадження наукових результатів,

які одержані в дисертаційній роботі асистента

Луцького національного технічного університету

Лавренчук Світлани Василівни

**„Розрахунок напружень біля штампів, отворів та тріщин у композитних
пластинчатих елементах конструкцій”,**

на публічному акціонерному товаристві „ЕЛЕКТРОТЕРМОМЕТРІЯ”

Даний акт складено про те, що розроблений в дисертаційній роботі Лавренчук С.В. метод та програмне забезпечення використані у ПАТ "ЕЛЕКТРОТЕРМОМЕТРІЯ" при розрахунку контактних напружень під штампами різних форм з урахуванням тертя у конструкційних виробах з отвором.

Переданий автором пакет прикладних програм застосовується у проектних роботах ПАТ "ЕЛЕКТРОТЕРМОМЕТРІЯ" для визначення розподілів відносних контактних напружень на поверхнях отворів складної форми.

Результати дослідження використані при виготовленні деталі „кришка верхня ПБВИ 725.123.002-02”

Директор



Заст. директора з виробництва

Ю.О. Малихін

А.Б. Семенюк

Додаток Д



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНИ

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF UKRAINE

ЛУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Україна, 43018, м. Луцьк, вул. Львівська, 75
тел.: +38(0332)74-61-03
факс: +38(0332)77-48-40
e-mail: rector@lutsk-ntu.com.ua
www.lutsk-ntu.com.ua

LUTSK NATIONAL TECHNICAL
UNIVERSITY

Ukraine, 43018, Lutsk, 75, Lvivska st.
tel.: +38(0332)74-61-03
fax: +38(0332)77-48-40
e-mail: rector@lutsk-ntu.com.ua
www.lutsk-ntu.com.ua

28.12.2016 № 1833-19-33
на № _____ від _____

ДОВІДКА

про впровадження в навчальний процес Луцького національного
технічного університету матеріалів дисертаційної роботи
**“РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ШТАМПІВ, ОТВОРІВ ТА
ТРІЩИН У КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИНЧАТИХ ЕЛЕМЕНТАХ
КОНСТРУКЦІЙ”**

(спеціальність 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла)

Лавренчук Світлани Василівни

Алгоритм для визначення контактних напружень під штампами різних форм з урахуванням тертя у пружній півплощині з крайовими тріщинами або на поверхні отвору в пружній нескінченній пластинці, який побудований в дисертаційній роботі Лавренчук С.В., використовується при викладанні дисциплін «Моделювання» та «Алгоритми та методи обчислень» для студентів III курсу напряму підготовки «Комп'ютерна інженерія» на факультеті комп'ютерних наук та інформаційних технологій.

Комп'ютерні програми для дослідження впливу геометрії тріщин на розподіли контактних напружень використовуються кафедрою технічної механіки при викладанні спецкурсів для аспірантів.

Проректор з науково-педагогічної роботи,
к.т.н.

Завідувач кафедри комп'ютерної інженерії,
к.т.н., доцент

Завідувач кафедри технічної механіки,
д.т.н., професор

Начальник навчального відділу

С.П. Шимчук

П.А. Пех

О.В. Максимович

С.В. Масечко