Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Луцький національний технічний університет

В.М. Максимович
А.Ю. Коцюба
С.В. Лавренчук

ПЛОСКІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Луцьк – 2012

УДК 539.3 (066)
ББК 22.251 в6
М 17

В.М. Максимович, А.Ю. Коцюба, С.В. Лавренчук
ПЛОСКІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ СКЛАДНОЇ ФОРМИ. Монографія. – Луцьк: ЛНТУ, 2012. – 98 с.
Іл. 31, табл. 4, бібліогр. 95 назв.

У монографії розроблено методику дослідження широкого класу задач про контактну взаємодію пружних тіл складної форми з системою жорстких штампів за наперед незаданих ділянок контакту. Методика базується на класичних та уточнених умовах контакту, методах інтегральних рівнянь і квадратичного програмування.

Досліджено контактні напруження під штампами різної форми, що взаємодіють із півплощиною або смугою, яка розташована на опорах за класичних, лінеаризованих уточнених та загальних нелінійних умов контакту; показано ефективність застосування розробленої методики для випадку декількох ділянок контакту; досліджено вплив тертя між тілами та штампами на розподіл контактних напружень.

Побудовано інтегральні рівняння для випадку взаємодії штампа з межею отвору складної форми за допомогою методу конформного відображення; виконано дослідження контактних напружень у пластинці з еліптичним та квадратним отворами для штампів складної форми.

Для спеціалістів в області механіки деформівного твердого тіла і математичної фізики, інженерів, аспірантів та студентів вузів.

Ключові слова: плоска контактна задача, коефіцієнт тертя, півплощина, смуга на опорах, пластинка з отвором довільної форми, шорстка основа, радіальний роликовий підшипник.

Рецензенти:
А.О. Сяський – докт. техн. наук, професор, завідувач кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету;
Р.М. Мартиняк – докт. фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, завідувач відділу математичних проблем контактної механіки Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;
В.І. Шваб'юк – докт. техн. наук, професор, керівник навчально-наукового центру післядипломної освіти Луцького національного технічного університету.

Рекомендовано Вченою радою Луцького національного технічного університету (протокол № 4 від 29 листопада 2012р.)

ISBN 978–617–672–006–5

© В.М. Максимович, А.Ю. Коцюба, С.В. Лавренчук, 2012

ЗМІСТ

ВСТУП..... 101
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ 107
1.1. Основні рівняння плоскої задачі теорії пружності 107
1.1.1. Узагальнений плоский напружений стан 107
1.1.2. Плоска деформація 109
1.2. Комплексне зображення розв'язку плоскої задачі теорії пружності 109
1.2.1. Комплексні потенціали в нескінченній пластинці при дії зосереджених сил 111
1.3. Співвідношення для переміщень на межі пружних тіл.. 111
1.3.1. Переміщення межі півплощини 112
1.3.2. Співвідношення для переміщень в пружній смузі, що розташована на опорах 112
1.3.3. Співвідношення для переміщень в нескінченній пластинці з еліптичним отвором 113
1.3.4. Співвідношення для переміщень в нескінченній пластинці з отвором складної форми 113
РОЗДІЛ 2. КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ З НЕЗАДАНИМИ ОБЛАСТЯМИ ВЗАЄМОДІЇ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ ТА СМУГИ 115
2.1. Загальна постановка задачі та виведення умов контакту 115
2.1.1. Постановка задачі 115
2.1.2. Умови контакту 116
2.1.3. Визначення переміщень (u, v) межі тіла 117
2.1.4. Побудова інтегральних рівнянь та додаткових рівностей ... 118
2.1.5. Побудова альтернативної системи інтегральних рівнянь та нерівностей 119
2.2. Класична постановка контактної задачі для півплощини 120
2.2.1. Постановка задачі 120
2.2.2. Умови контакту 121
2.2.3. Побудова альтернативної системи інтегральних рівнянь та нерівностей задачі 121
2.2.4. Побудова квадратурних формул 123
2.2.5. Альтернативна система лінійних рівнянь та нерівностей ... 125
2.2.6. Задача квадратичного програмування 126
2.2.7. Тестування числового алгоритму 127

2.2.8. Контактні напруження під штампом близьким до плоского із закругленими краями 129
2.2.9. Контактні напруження під штампом складної форми 130
2.3. Контактна задача з уточненою умовою контакту для півплощини 132
2.3.1. Умови контакту 132
2.3.2. Знаходження контактних напружень під штампом кругової форми на плоскій або шорсткій поверхні 133
2.3.3. Знаходження контактних напружень під штампом складної форми на шорсткій поверхні 135
2.4. Контактна задача з нелінійною умовою контакту для півплощини 137
2.4.1. Умови контакту 137
2.4.2. Дослідження збіжності розв'язків при контактній взаємодії штампа кругової форми з плоскою або шорсткою поверхнями 139
2.5. Класична постановка контактної задачі для смуги, що розташована на двох опорах 141
2.5.1. Постановка задачі 141
2.5.2. Умови контакту 142
2.5.3. Побудова інтегральних рівнянь 143
2.5.4. Побудова числового алгоритму 144
2.5.5. Тестування чисельного алгоритму 144
2.5.6. Порівняння напружень під круговим та параболічним штампами 147
2.5.7. Контактні напруження під штампом параболічної форми на хвилястій (шорсткій) поверхні 148
РОЗДІЛ 3. КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ З НЕЗАДАНИМИ ОБЛАСТЯМИ ВЗАЄМОДІЇ ДЛЯ ПЛАСТИН З ОТВОРОМ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ 150
3.1. Загальна постановка контактної задачі для нескінченної пластинки з еліптичним отвором та виведення умов контакту 150
3.1.1. Постановка задачі 150
3.1.2. Умови контакту 151
3.2. Контактна задача для нескінченної пластинки з круговим отвором 152
3.2.1. Умови контакту 152
3.2.2. Побудова альтернативної системи інтегральних рівнянь і нерівностей задачі та числового алгоритму її розв'язання 153

3.2.3. Тестування числового алгоритму 155
3.2.4. Круговий штамп довільного радіуса в отворі, форма якого близька до кругової 159
3.2.5. Еліптичний штамп 164
3.2.6. Штамп складної форми 169
3.3. Контактна задача для нескінченної пластинки з еліптичним отвором 171
3.3.1. Умови контакту 171
3.3.2. Побудова числового алгоритму 173
3.3.3. Розміри штампа та отвору однакові 174
3.4. Контактна задача для нескінченної пластинки з отвором складної форми 176
3.4.1. Постановка задачі 176
3.4.2. Умови контакту 177
3.4.3. Побудова інтегральних рівнянь 177
3.4.4. Побудова числового алгоритму 181
3.4.5. Розрахунок контактних напружень для штампа еліптичної форми в квадратному отворі 182
3.4.6. Розрахунок контактних напружень для круглого штампа в квадратному отворі 183
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 185

ВСТУП

При взаємодії деталей машин та елементів конструкцій, як правило, виникають високі контактні напруження. За цих умов проведення розрахунків на міцність передбачає детальне вивчення напруженого стану, що виникає в області контакту. У випадку тіл і штампів складних форм, зокрема, за врахування їх шорсткості, ці області можуть складатися з декількох наперед не заданих ділянок. Такі задачі в літературі вивчені в значно меншій мірі, оскільки вони належать до істотно нелінійних. Зазначимо, що навіть за наперед заданої кількості ділянок контакту попередньо визначають їх межі із систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, які не завжди вдається записати у явному вигляді.

В останні роки розвиваються підходи, в яких уточнюються умови контакту. Зокрема, більш реально враховуються форми штампів та основи у роботах Б.А. Галанова [8, 9] та І.А. Солдатенкова [70, 71].

Особливо ускладнюється вивчення контактних напружень при взаємодії штампів складної форми з пружними пластинками, що послаблені отворами. Загальним методам дослідження таких контактних задач теорії пружності присвячені праці Д.В. Гриліцького [18–20], В.В. Панасюка [59–61], Г.М. Савіна [66, 67], А.О. Сяського [72, 73], М.Й. Теплого [74, 75], М.В. Чернеця [78], І.Я. Штаєрмана [80] та інших авторів. Найповніше в літературі вивчені задачі про дію штампа на межу отвору в пружному тілі, в яких область контакту суцільна і форми штампа та отвору є близькими між собою. Менш досліджено випадки, коли штамп має складну форму та область контакту складається з наперед невизначеної кількості ділянок.

Тому актуальною на даний час є проблема побудови числово-аналітичної методики визначення контактних напружень при взаємодії штампів та тіл складних форм за наперед невідомих ділянок контакту. Монографія присвячена розробленню методики дослідження контактної взаємодії системи жорстких штампів та пружних тіл складної форми з урахуванням сил тертя на основі лінійних класичних, уточнених та нелінійних умов взаємодії. Сформульоване завдання є актуальним для механіки деформів-

ного твердого тіла і відображає прикладні запити машинобудування, трибології, будівельної індустрії, біомеханіки тощо.

Аналіз класів плоских контактних задач та методик їх розв'язування. Дослідження контактних задач теорії пружності розпочато класичними працями Герца і Бусінеска, виконаними в кінці XIX століття і працями С.А. Чаплигіна, О.М. Динника, М.А. Садовського, що відносяться до початку XX століття. В 30-х роках XX століття М.І. Мусхелішвілі розробив ефективний математичний апарат розв'язання плоских задач теорії пружності. У цей період одержано також фундаментальні результати в теорії інтегральних рівнянь, до яких зводяться контактні задачі.

Подальший розвиток статичних і динамічних контактних задач проходив у напрямі одержання більш загальних результатів шляхом відмови від окремих припущень, прийнятих Герцом (Н.М. Бєляєв, Л.О. Галін, М.А. Кільчевський, А.І. Лур'є, В.І. Моссаковський, М.І. Мусхелішвілі, Г.М. Савін, І.Я. Штаєрман та ін.), та врахування таких ускладнюючих факторів як:

- скінченні розміри тіл, що перебувають у контакті;
- наявність у зоні контакту сил тертя (як наслідок − зношування взаємодіючих тіл або тепловиділення від тертя);
- наявність у зоні контакту мастила;
- температура, руйнування або шорсткість поверхні тіл, що перебувають у контакті;
- анізотропія, неоднорідність, багатошаровість, пластичність або в'язкопружність матеріалу;
- вплив включень, тріщин або отворів різної форми на контактні напруження тощо.

Випадок контактної взаємодії за умов плоскої деформації або плоского напруженого стану в конкретних задачах представлено в монографіях [2, 4, 5, 11, 15–17, 20, 21, 52, 53, 55, 56, 59, 62, 63, 66, 67, 69, 74, 80, 81, 91, 95].

Методики розв'язування таких задач розвивалися на основі аналітичних і числових підходів.

На розвиток аналітичних методів загальний вплив мали фундаментальні праці М.І. Мусхелішвілі, Л.О. Галіна, І.Я. Штаєрмана та ін. Розроблені ними методи теорії функцій комплексної змінної і теорії інтегральних рівнянь виявилися ефективними для дослідження мішаних задач теорії пружності. Питання побудови

та наближеного розв'язування інтегральних чи інтегро-диференціальних рівнянь, до яких зводяться контактні задачі, розглянуто в [12, 44, 45, 58, 84, 89, 90].

Для дослідження взаємодії штампів із некласичними областями, що мають вигляд смуги, клину використано метод розкладу за малим параметром, який дозволив отримати наближені аналітичні розв'язки широкого кола контактних задач.

Для областей канонічної форми (прямокутник, сектор круга і т.д.) широкого поширення набули аналітичні методи, що базуються на зведенні мішаної крайової задачі до парних (потрійних) функціональних (інтегральних) рівнянь (або рядів).

Аналітичні методи виявились ефективними також і при розгляді неоднорідних, анізотропних тіл, при врахуванні тертя та мікроструктури поверхонь.

Широке застосування до розв'язування контактних задач для тіл складної форми знайшли числові методи, що базуються на методі скінченних елементів (МСЕ) та методі граничних інтегральних рівнянь (МГІР). Перший із них характерний своєю простотою і водночас великим обсягом обчислень. Застосування другого методу, який дозволяє отримати високу точність результатів на ділянках великих градієнтних напружень, вирізняється простотою реалізації та невеликим об'ємом вхідної інформації, дає ряд переваг порівняно з аналогічними схемами МСЕ. Серед інших загальних методів розв'язання контактних задач для областей складної форми вкажемо на метод R-функцій, що поєднує в собі алгебраїчні методи математики з класичними методами математичної фізики [63].

В роботі розглядаються класи плоских контактних задач теорії пружності про взаємодію жорсткого штампа з пружними: півплощиною; смугою; пластинкою, що послаблена криволінійним контуром; тілами більш складної форми.

Перший клас задач у літературі вивчено найбільш повно. За класичної умови контакту найбільш розповсюджені аналітичні методи їх розв'язування. Розроблені методи дозволяють досліджувати напруження під системою плоских або гладких штампів, у тому числі за врахування сил тертя [11, 14, 16, 27, 33, 36, 42, 69, 71, 81], температури [20, 27], шорсткості [21, 36, 41, 42, 50, 67, 80, 88], анізотропії [41, 43, 79, 92].

Дещо менше вивченими є задачі другого класу. Початок досліджень у цьому напрямку зроблено у працях І.Г. Альперіна та О.Я. Шехтера. Розглядалися задачі для смуги, яка або шарнірно [2, 62], або нерухомо [2, 16, 28, 62, 83] закріплена нижньою основою з абсолютно жорсткою півплощиною. Розв'язання таких задач зводилося до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Крім зазначених вище, розглядається постановка, в якій смуга (балка) защемлена з обох сторін [23, 81] або лежить на вінклерівській основі. Вивчалась проблема неоднорідності по глибині та багатошаровості смуг [25, 53]. При знаходженні контактних напружень враховувались сили тертя [2, 23, 28], шорсткість основи [21], періодична структура [2, 23], анізотропія [25, 28], змінна товщини смуги [70] та ін. Розвиваються аналітико-числові методи знаходження розподілу контактних напружень під штампом складної форми на пружній смузі, що розташована на двох опорах [13, 21, 31, 37, 76].

Достатньо вивченими в літературі є задачі третього класу. Вагомих результатів у цьому напрямі дослідження задач про взаємодію жорстких чи пружних штампів, включень або підсилювальних ребер із криволінійними отворами в нескінченній пластинці досягли В.М. Александров, М.Х. Арутюнян, Д.В. Гриліцький, Л.Г. Доборджгінідзе, А.І. Каландія, А.І. Лур'є, М.І. Мусхелішвілі, А.А. Сяський, М.Й. Теплий, В.М. Чернець, І.Я. Штаєрман та інші.

Основи дослідження контактної взаємодії для пластин із круговими отворами і пружних або жорстких круглих дисків при їх сполученні із зазором розвинуто в роботах [19, 26, 47–49, 56, 59, 60, 66, 67, 69]. Найбільш повний огляд досліджень цього класу задач наведено в монографії В.В. Панасюка [59]. Подальший розвиток досліджень проблеми міститься у роботах [74, 89]. Контактна взаємодія циліндричних тіл, обмежених поверхнями, які незначно відрізняються від кругових, досліджується в роботах В.В. Панасюка [61], М.В. Чернеця [78].

Задачі про контактну взаємодію жорсткого диска з контуром еліптичного отвору нескінченної ізотропної пластинки розглянуто в [7, 22, 73]. Так, у роботі [22] В.К. Перехватовим і А.П. Смирновою розглянуто контактну задачу про посадку із зазором жорсткого диска в еліптичний отвір нескінченної ізотропної пластинки, розв'язок якої будується методом сил, а величина зони контакту

визначається методом спроб. Аналогічна задача при силовій взаємодії пластинки та диска розв'язана Л.Т. Доборжгінідзе із використанням методу колокації. Випадки, коли пластинка послаблена отвором більш складної форми, розглянуто в [34, 56, 72]. Під час побудови співвідношень для переміщень межі криволінійного отвору використано метод конформного відображення.

Додаткове врахування тертя в контактних задачах теорії пружності досліджено в [1, 2, 11, 14, 16, 23, 27, 28, 32, 33, 36, 42, 69, 71, 81].

Випадку шорсткості присвячено праці В.М. Александрова [4], Л.О. Галіна [11], І.Г. Горячової [14, 15], К. Джонсона [21], Р.М. Мартиняка [14, 27, 41, 42, 50], В. Паука [88], А.П. Хусу [77], І.Я. Штаєрмана [80]. В роботах [21, 36] шорсткість задається за допомогою косинусоїди. Крім того, при дослідженні шорсткості поверхонь досить часто використовується теоретико-ймовірнісний підхід [77].

В останні роки проводяться дослідження на основі уточнених умов контакту, в яких враховується більш реально форма штампа та основи [8–10, 36, 69, 71, 81].

В літературі найменш вивченими залишаються задачі взаємодії тіл та штампів складної форми, коли кількість ділянок контакту та їх межі є наперед невизначеними. Стосовно таких задач найчастіше використовують варіаційні підходи, які зводяться до побудови функціоналу, точка мінімуму якого є шуканим розв'язком. На поверхні, де відбувається взаємодія тіл, вводяться в'язі спеціального виду, здатні передавати тільки односторонні стискуючі зусилля у напрямку загальної нормалі до контактуючих поверхонь. Взаємні переміщення дотичних тіл в тому ж напрямі обмежуються умовами непроникнення контактуючих тіл один в одного. Фактично розв'язування поставленої задачі у варіаційній постановці зводиться до проблеми мінімізації функціоналу повної енергії системи з лінійними обмеженнями у вигляді нерівностей.

Вперше контактну задачу як варіаційну задачу з обмеженнями у вигляді нерівностей розглянув А. Сіньйоріні [94] в 1933 р. Ним же [93] в 1959 р. було розвинено даний підхід. Контактні задачі на основі варіаційного методу досліджувались в роботах І. Главачека [64], Ж. Дюво [24], А.С. Кравчука [40].

Ідея застосування методу квадратичного програмування до розв'язування контактних задач запропонована в роботах В.М. Фрідмана і В.С. Черніної. Надалі питання застосування квадратичного програмування вивчалися у працях [40, 87].

Застосування варіаційних методів до розв'язування контактних задач з наперед незаданими ділянками контакту в літературі, як правило, проводять із використанням варіаційно-різницевого методу або МСЕ, які базуються на еквівалентних варіаційних формулюваннях задачі [6, 7, 21, 24, 31−37, 40, 47−49, 53, 64, 86].

У монографії досліджуються задачі про плоску контактну взаємодію жорстких штампів із пружними тілами складної форми за допомогою методів інтегральних рівнянь, механічних квадратур, конформного відображення та квадратичного програмування. При цьому в розробленому підході невідомими є контактні напруження тільки на межі тіла в областях взаємодії, тобто кількість невідомих є на порядок меншою, ніж при застосуванні МСЕ у вказаних вище підходах. Детальні дослідження виконані для областей, що мають вигляд: півплощини, смуги на двох опорах та пластинки з криволінійним отвором. Розрахунки виконані на основі класичних та уточнених умов контакту (в тому числі і нелінійних) за врахування сил тертя. Розроблена аналітико-числова методика дозволяє разом із розподілами контактних напружень знаходити межі всіх ділянок контакту, в тому числі і для випадків, коли область фактичного контакту суттєво відрізняється від відповідної номінальної області контакту.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

1.1. Основні рівняння плоскої задачі теорії пружності

Плоска задача теорії пружності аналітично об'єднує дві фізично різні задачі: про узагальнений плоский напружений стан та про плоску деформацію.

1.1.1. Узагальнений плоский напружений стан

Приймемо, що в кожній точці пластинки товщиною $2h$ є площина пружної симетрії, що паралельна серединній площині. Нехай зовнішні зусилля прикладені до бокової поверхні пластинки так, що результуюча цих зусиль по висоті $2h$ лежить в серединній площині. Віднесемо пластинку до декартової системи координат так, щоб серединна площина збігалась із площиною *Oxy*. Грані пластинки $t = h$ і $t = -h$ – будемо вважати вільними від зовнішніх зусиль.

При розгляді тонких пластинок замість компонентів тензора напружень $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\sigma}_y$, $\tilde{\tau}_{xy}$ розглядають їх усереднені значення

$$\sigma_x = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} \tilde{\sigma}_x dt\,,\ \sigma_y = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} \tilde{\sigma}_y dt\,, \tau_{xy} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} \tilde{\tau}_{xx} dt\,.$$

Інші компоненти тензора напружень приймаються рівними нулю.

Рівняння рівноваги для усереднених значень напружень у декартовій системі координат *Oxy* мають вигляд [56]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0\,,\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0\,, \qquad (1.1)$$

де X, Y − усереднені по товщині проекції вектора масових сил (проекція до третьої осі рівна нулю).

Аналогічно замість компонентів тензора деформацій вводяться усереднені по товщині деформації ε_x, ε_y, γ_{xy}. Ці деформації визначаються через значення усереднених по товщині переміщень u, v (переміщень вздовж осей *Ox* і *Oy* відповідно) за формулами [56]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (1.2)$$

Усереднені деформації задовольняють умову сумісності [56]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \qquad (1.3)$$

Узагальнений закон Гука, який зв'язує усереднені по товщині деформації ε_x, ε_y, γ_{xy} і напруження σ_x, σ_y, τ_{xy} для ізотропної пластинки, має вигляд [56]

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right),\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right),\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \qquad (1.4)$$

де E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, G – модуль зсуву. Зазначимо, що існує зв'язок між цими сталими $E = 2\left(1+\nu\right)G$.

Рівняння (1.1), (1.2), (1.4) або (1.1), (1.3), (1.4) складають замкнену систему рівнянь для узагальненого плоского напруженого стану. Зазначимо, що всі рівняння записані для серединної площини пластинки.

Розв'язок цих рівнянь повинен задовольняти крайові умови, що задаються на межі області, яку займає серединна площина пластинки, а саме на контурі L.

У випадку першої основної задачі на контурі L задаються проекції зовнішніх сил $\left(X_n, Y_n\right)$. Контурні умови в таких задачах записуються для напружень у вигляді [56]

$$\sigma_x \cos\left(\bar{n}, \bar{x}\right) + \tau_{xy} \cos\left(\bar{n}, \bar{y}\right) = X_n,$$

$$\tau_{xy} \cos\left(\bar{n}, \bar{x}\right) + \sigma_y \cos\left(\bar{n}, \bar{y}\right) = Y_n, \qquad (1.5)$$

де $\cos\left(\bar{n}, \bar{x}\right)$, $\cos\left(\bar{n}, \bar{y}\right)$ – кути між зовнішньою нормаллю до контуру L та осями *Ox*, *Oy* відповідно.

Друга основна задача має місце, якщо на межі L задано переміщення $\left(g_1, g_2\right)$, які після деформування набуває пластина. Крайові умови тоді мають вигляд [56]

$$u\left(x, y\right) = g_1\left(x, y\right),\ v\left(x, y\right) = g_2\left(x, y\right),\ \left(x, y\right) \in L. \qquad (1.6)$$

Мішані задачі теорії пружності виникають тоді, коли на частині контуру L задано напруження (тобто тут має місце умова (1.5)), а на решті контуру – переміщення (тобто справедлива умова (1.6)).

Для задач теорії пружності доведені теореми існування і єдиності [56]. Так, розв'язок першої основної задачі існує за умови, коли головний вектор і момент всіх сил, які прикладені до пластинки, рівні нулю. Тоді напруження визначаються однозначно, а переміщення – з точністю до доданків, якими описується жорстке зміщення пластинки. Розв'язок другої та мішаної задачі існує; напруження та переміщення для цих випадків визначаються однозначно.

1.1.2. Плоска деформація

Плоска деформація має місце в тілах циліндричної форми, коли до їх бокової поверхні прикладено зовнішні зусилля, перпендикулярні до осі тіла, що не змінюються вздовж твірної. Віднесемо циліндричне тіло до декартової системи координат (x, y, t) так, щоб вісь Ot збігалась із його віссю. За вказаних умов виписані вище рівняння (1.1)–(1.5) для плоского напруженого стану залишаються справедливими і для випадку плоскої деформації, якщо зробити в них наступні зміни: в усіх рівняннях напруження, переміщення, деформації та вектор масових сил істинні (а не усереднені, як вище); в законі Гука (1.4) необхідно здійснити наступні заміни:

$$E \to E' = E \big/ \left(1-\nu^2\right); \ \nu \to \nu' = \nu \big/ \left(1-\nu\right).$$

Таким чином, основні рівняння для плоскої деформації збігаються із рівняннями для плоского напруженого стану. Ці рівняння називають рівняннями плоскої задачі теорії пружності.

1.2. Комплексне зображення розв'язку плоскої задачі теорії пружності

Розглянемо спочатку випадок, коли масові сили відсутні. Якщо ввести функцію Ейрі U на основі залежностей [56]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \ \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \qquad (1.7)$$

то рівняння рівноваги (1.1) тотожно задовольняються при будь-якій функції U. Підставивши формули (1.7) у вирази для визначення деформацій (1.4), а знайдені деформації у рівняння сумісності (1.3), отримують основне (бігармонійне) рівняння теорії пружності для функції U [56]

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=0\,. \qquad (1.8)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.8) може бути записаний через дві аналітичні функції $\varphi(z)$, $\kappa(z)$ від однієї комплексної змінної $z=x+iy$ за формулою Гурса

$$U(x,y)=\mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi(z)+\kappa(z)\right],\ \bar{z}=x-iy\,. \qquad (1.9)$$

Компоненти напружень σ_x, σ_y, τ_{xy} і переміщень u, v виражаються через комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ за формулами [56]

$$\sigma_x+\sigma_y=2\left[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right];$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\left[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)\right]; \qquad (1.10)$$

$$2G(u+iv)=\chi\varphi(z)-z\overline{\Phi(z)}-\overline{\psi(z)}+icz+d\,; \qquad (1.11)$$

де $\Phi(z)=\varphi'(z)$; $\Psi(z)=\psi'(z)$; $\psi(z)=\kappa'(z)$; c, d – довільні дійсні та комплексні сталі, які визначають поворот та зміщення тіла як жорсткого; $\chi=3-4\nu$ для плоскої деформації і $\chi=\dfrac{3-\nu}{1+\nu}$ – для узагальненого плоского напруженого стану.

На основі умов (1.5) крайові умови для першої основної задачі записуються у вигляді [56]

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=i\int_0^s (X_n+iY_n)ds+C\ , \qquad (1.12)$$

де C – довільна комплексна стала, ds – диференціал дуги на контурі L, $z\in L$, L – межа пластинки. Надалі за межу візьмемо контур, що обмежує серединну площину пластинки.

Аналогічно для другої основної задачі контурні умови для функцій $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ на основі (1.6) запишуться у вигляді [56]

$$\chi\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}=2G(g_1+ig_2). \qquad (1.13)$$

1.2.1. Комплексні потенціали в нескінченній пластинці при дії зосереджених сил

Приймемо, що до пластинки прикладено зосереджену силу (X,Y) в точці (x_0,y_0). Такий розв'язок можна також розглядати як фундаментальний щодо дії масових сил.

Встановлено, що в околі точки прикладання сили потенціали в нескінченній пластинці мають наступні особливості [56]

$$\Phi(z)=-\frac{A}{z-z_0},\ \Psi(z)=\frac{\chi\overline{A}}{z-z_0}-\frac{\overline{z_0}A}{(z-z_0)^2}; \qquad (1.14)$$

де $A=\dfrac{X+iY}{2\pi(1+\chi)}$, $z_0=x_0+iy_0$.

1.3. Співвідношення для переміщень на межі пружних тіл

Для розв'язування контактних задач теорії пружності найбільш широко використовують метод інтегральних рівнянь, в якому невідомими вводять контактні напруження. Такі рівняння записують на основі фундаментального розв'язку задачі теорії пружності для області, яку займає пластинка. Для його побудови необхідно записати співвідношення для знаходження переміщень у будь-якій точці межі пружного тіла, спричинених дією зосередженої сили, що прикладена до фіксованої точки на його межі. Для нескінченних чи півнескінченних тіл фундаментальні розв'язки будуються безпосередньо. При розгляді обмежених тіл такий розв'язок необхідно модифікувати, з огляду на те, що прикладене до тіла навантаження повинно бути самозрівноваженим (наприклад, може розглядатись система самозрівноважених сил).

Попередньо наведемо для визначення переміщень через комплексні потенціали на межі тіла більш зручну, ніж (1.11) формулу. Для цього розглянемо область, яка обмежена замкненим контуром L. Додамо рівняння (1.12) і (1.13). Тоді отримаємо

$$\left(\chi+1\right)\varphi\left(z\right)=2G\left(u+iv\right)+i\int_{0}^{s}\left(X_n+iY_n\right)ds+C, \quad (1.15)$$

де Y_n, X_n − проекції вектора напружень на осі *Ox, Oy* відповідно на площинці, дотичній до кривої L.

1.3.1. Переміщення межі півплощини

Розглянемо нижню півплощину, до межі якої прикладено нормальні та дотичні зусилля σ_y та τ_{xy}. У роботі [11] для цього випадку отримано співвідношення для визначення комплексних потенціалів $\Phi\left(z\right)$ і $\Psi\left(z\right)$ у вигляді

$$\Phi\left(z\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_y\left(t\right)\frac{dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau_{xy}\left(t\right)\frac{dt}{t-z}, \quad (1.16)$$

$$\Psi\left(z\right)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau_{xy}\left(t\right)\frac{dt}{t-z}+z\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_y\left(t\right)\frac{dt}{\left(t-z\right)^2}-$$

$$-z\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau_{xy}\left(t\right)\frac{dt}{\left(t-z\right)^2}; \quad (1.17)$$

На основі співвідношень (1.16) та (1.17) за формулами (1.11) переміщення u, v запишуться у вигляді

$$\begin{cases} u\left(x,0\right)=\dfrac{\chi-1}{4G}\displaystyle\int_{0}^{x}\sigma_y\left(t\right)dt+\dfrac{\chi+1}{4\pi G}\int_{\Omega}\tau_{xy}\left(t\right)\ln\left|t-x\right|dt, \\ v\left(x,0\right)=\dfrac{\chi+1}{4\pi G}\displaystyle\int_{\Omega}\sigma_y\left(t\right)\ln\left|t-x\right|dt-\dfrac{\chi-1}{4G}\int_{0}^{x}\tau_{xy}\left(t\right)dt; \end{cases} \quad (1.18)$$

де Ω – сукупність відрізків, уздовж яких зусилля ненульові (область контакту).

1.3.2. Співвідношення для переміщень в пружній смузі, що розташована на опорах

Для смуги $-H\le y\le 0$ були одержані наступні співвідношення для переміщень навантаженої межі $y=0$

$$\begin{cases} u(x,0)=\int\limits_{\Omega}\sigma_y(t)K_1(x-t)\,dt+u_{\Delta}(x), \\ v(x,0)=\int\limits_{\Omega}\sigma_y(t)K_2(x-t)\,dt+v_{\Delta}(x); \end{cases} \tag{1.19}$$

де $K_1(x)=\dfrac{\chi+1}{2G}\int\limits_0^x \mathrm{Re}\left(\Phi_2(\xi,z_0)\right)d\xi$, $K_2(x)=\dfrac{\chi+1}{2G}\int\limits_0^x \mathrm{Im}\left(\Phi_2(\xi,z_0)\right)d\xi$;

тут z_0 – комплексна змінна, а $\Phi_2(x,z_0)$ – введена в [68] відповідно функція комплексної змінної, $u_{\Delta}(x)$ і $v_{\Delta}(x)$ – переміщення, зумовлені реакцією опор.

1.3.3. Співвідношення для переміщень в нескінченній пластинці з еліптичним отвором

Якщо нескінченна пружна пластинка послаблена отвором еліптичної форми з півосями R_x та R_y, то співвідношення для переміщень межі отвору (отримані А.О. Сяським) мають вигляд

$$2G(u+iv)=\frac{\chi+1}{2\pi i}\int\limits_L\left(N(t)+iT(t)\right)\ln\left(\frac{t-z}{t}\right)\omega'(t)\,dt-$$

$$-\frac{\chi}{2\pi i}\int\limits_L\left(N(t)+iT(t)\right)\ln\left(\frac{z}{t}\right)\omega'(t)\,dt-\frac{\chi}{2}\int\limits_L\left(N(t)+iT(t)\right)\omega'(t)\,dt+$$

$$+\frac{\chi-1}{2}\int\limits_0^z\left(N(t)+iT(t)\right)\omega'(t)\,dt, \tag{1.20}$$

де $\omega(t)=R\left(t+\dfrac{\gamma}{t}\right)$, $R=\dfrac{R_x+R_y}{2}$, $\gamma=\dfrac{R_x-R_y}{R_x+R_y}$, $t=\mathrm{e}^{i\xi}$, $z=\mathrm{e}^{i\alpha}$;

L – область контакту.

1.3.4. Співвідношення для переміщень в нескінченній пластинці з отвором складної форми

У випадку, коли нескінченна пружна пластинка послаблена отвором складної форми, співвідношення для переміщень межі отвору мають вигляд [56]

$$2G(u+iv)=\frac{\chi+1}{2\pi}\int\limits_{M_n}\sigma(\xi)\ln\left(2\sin\frac{|\xi-\alpha|}{2}\right)\gamma\omega'(\gamma)\,d\gamma+$$

$$+\frac{i(\chi-1)P\alpha}{4\pi}+i\frac{\chi-1}{2}\int\limits_0^{\alpha}\sigma(\xi)\gamma\omega'(\gamma)\,d\gamma-(\chi+1)\times$$

$$\times\int\limits_{M_n}\sigma(\xi)\varphi_{\Delta}\left(\zeta,\gamma,\mathrm{Re}\left(\gamma\omega'(\gamma)\right),\mathrm{Im}\left(\gamma\omega'(\gamma)\right)\right)d\gamma+const\,, \quad (1.21)$$

де M_n – область контакту, $\omega(\zeta)$ − функція, яка конформно відображає область, яку займає пластинка, на зовнішність одиничного кругу, P – сила, що прикладена до штампа; φ_{Δ} − відома гладка функція.

РОЗДІЛ 2
КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ З НЕЗАДАНИМИ ОБЛАСТЯМИ ВЗАЄМОДІЇ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ ТА СМУГИ

2.1. Загальна постановка задачі та виведення умов контакту

2.1.1. Постановка задачі

Розглянемо нескінченне, напівнескінченне або обмежене пружне тіло, яке перебуває в умовах плоского напруженого або деформованого стану. Приймемо, що воно взаємодіє із системою m жорстких штампів та додатково перебуває під дією зосереджених сил $\left(X_i, Y_i\right)$, прикладених в точках M_i, $i=\overline{1,n}$. Тут тіло віднесено до декартової системи координат Oxy. Покладемо при цьому, що відомі головний вектор та момент всіх сил, прикладених до штампів, які відповідно дорівнюють $\left(P_x^j, P_y^j\right)$ і M^j ($j=\overline{1,m}$). У випадку обмеженого тіла вважається, що прикладені до нього та до штампів сили є самозрівноваженими.

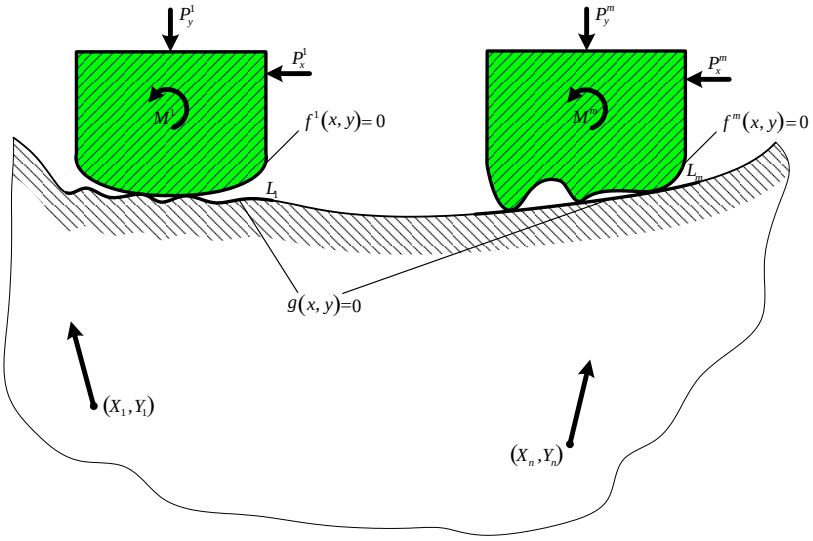


Рис. 2.1. Загальна постановка задачі

Запишемо рівняння межі тіла у вигляді $g(x,y)=0$, а рівняння штампів опишемо функціями $f^j(x,y)=0$, $j=\overline{1,m}$. Вважатимемо, що кожен з штампів та відповідна межа пружного тіла можуть мати складну форму. Тобто область контакту може складатися з декількох, довільним чином розташованих, ділянок.

При формулюванні крайових умов під штампами будемо виходити із того, що після деформування точки, які знаходяться на межі тіла і перебувають в умовах контакту, задовольняють рівняння відповідних штампів з урахуванням їх зміщень в напрямках координатних осей та поворотів на деякі кути. Крім цього вважатимемо, що:

- під штампами, крім нормальних напружень σ, виникають за рахунок тертя дотичні напруження τ, які пов'язані між собою згідно закону Кулона-Амонтона співвідношенням $\tau=\rho\sigma$, де ρ – коефіцієнт тертя;
- межа тіла поза штампами вільна від навантаження.

2.1.2. Умови контакту

Для запису умов контакту врахуємо те, що після деформування граничні точки пластини, які знаходяться в області контакту, для кожного j-го штампа будуть задовольняти рівняння основи штампа з урахуванням його зміщення в напрямку координатних осей *Ox* та *Oy* відповідно на деякі відстані D_x^j та D_y^j і його повороту на деякий кут θ^j. При цьому приймаємо, що на початковій стадії штамп дотикається до тіла в деякій точці (або в декількох точках) M, далі він зміщується в напрямку нормалі до межі тіла в цій точці і може повертатись. Тоді серед трьох введених зміщень і кутів для кожного із штампів D_x^j, D_y^j, θ^j незалежними будуть дві величини.

Умови контакту за врахування зміщень та повороту штампів матимуть вигляд

$$f^j\left(\xi+\eta\theta^j+D_x^j,-\xi\theta^j+\eta+D_y^j\right)=0,\ j=\overline{1,m} \qquad (2.1)$$

де $\xi=x+u(x,y)+U_P(x,y)$, $\eta=y+v(x,y)+V_P(x,y)$ – координати межі пружного тіла після контактної взаємодії, (u,v) –

сумарні переміщення межі тіла g, зумовлені дією всіх штампів, (U_P, V_P) – переміщення цієї ж межі, зумовлені дією всіх зосереджених сил. Всі переміщення разом із величинами D_x^j, D_y^j та θ^j будемо вважати малими. Після підстановки значень ξ та η в залежності (2.1), одержимо умову контакту у вигляді

$$f^j\Big(x+u(x,y)+U_P(x,y)+\big(y+v(x,y)+V_P(x,y)\big)\theta^j+D_x^j, -\big(x+$$
$$+u(x,y)+U_P(x,y)\big)\theta^j+y+v(x,y)+V_P(x,y)+D_y^j\Big)=0,\ j=\overline{1,m} \quad (2.2)$$

Механічний зміст цих умов полягає в тому, що точки межі пружного тіла після деформування задовольняють рівняння основи штампів із урахуванням їх зміщень у координатних напрямках та поворотів на деякі кути.

Опишемо межу тіла параметрично у вигляді $x=g_1(\alpha)$, $y=g_2(\alpha)$. Тоді умова (2.2) буде

$$f_1^j(\alpha)\tilde{u}(\alpha)+f_2^j(\alpha)\tilde{v}(\alpha)=-\tilde{f}^j(\alpha)-f_1^j(\alpha)\tilde{U}_P(\alpha)-f_2^j(\alpha)\tilde{V}_P(\alpha)-$$
$$-D_x^j f_1^j(\alpha)-D_y^j f_2^j(\alpha)+\theta^j f_3^j(\alpha)+\delta^j(\alpha),\ j=\overline{1,m}, \quad (2.3)$$

де $\tilde{f}^j(\alpha)=f^j\big(g_1(\alpha),g_2(\alpha)\big)$, $f_1^j(\alpha)=f_x^{j\prime}\big(g_1(\alpha),g_2(\alpha)\big)$, $f_2^j(\alpha)=f_y^{j\prime}\big(g_1(\alpha),g_2(\alpha)\big)$, $f_3^j(\alpha)=g_1(\alpha)\cdot f_2^j(\alpha)-g_2(\alpha)\cdot f_1^j(\alpha)$; $\tilde{u}(\alpha)=u\big(g_1(\alpha),g_2(\alpha)\big)$, $\tilde{v}(\alpha)=v\big(g_1(\alpha),g_2(\alpha)\big)$, $\tilde{U}_P(\alpha)=$ $=U_P\big(g_1(\alpha),g_2(\alpha)\big)$, $\tilde{V}_P(\alpha)=V_P\big(g_1(\alpha),g_2(\alpha)\big)$; $\delta^j(\alpha)=o(\tilde{u},\tilde{v})$ – додаткові члени, які мають другий порядок малості відносно переміщень.

Нехтуючи величиною δ^j, умову (2.3) можна лінеаризувати.

2.1.3. Визначення переміщень (u,v) межі тіла

Вважатимемо, що фундаментальний розв’язок задачі теорії пружності відомий, тобто відомі переміщення у будь-якій точці межі заданого пружного тіла, спричинені дією довільних зосереджених сил. Тоді переміщення межі цього тіла, що зумовлені дією контактних напружень можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \tilde{u}(\alpha) = \int\limits_{\Omega} \sigma(\xi) K_{11}(\alpha,\xi)\, d\xi + \int\limits_{\Omega} \tau(\xi) K_{12}(\alpha,\xi)\, d\xi, \\ \tilde{v}(\alpha) = \int\limits_{\Omega} \sigma(\xi) K_{21}(\alpha,\xi)\, d\xi + \int\limits_{\Omega} \tau(\xi) K_{22}(\alpha,\xi)\, d\xi; \end{cases} \tag{2.4}$$

де функції K_{ij}, $i, j = \overline{1,2}$ визначаються за допомогою фундаментального розв'язку; $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Omega_k$, Ω_k – область зміни параметру, яка відповідає *k*-ій ділянці контакту.

Враховуючи закон Кулона-Амонтона, співвідношення (2.4) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \tilde{u}(\alpha) = \int\limits_{\Omega} \sigma(\xi) K_{\tilde{u}}(\alpha,\xi)\, d\xi, \\ \tilde{v}(\alpha) = \int\limits_{\Omega} \sigma(\xi) K_{\tilde{v}}(\alpha,\xi)\, d\xi; \end{cases} \tag{2.5}$$

де $K_{\tilde{u}}(\alpha,\xi) = K_{11}(\alpha,\xi) + \rho K_{12}(\alpha,\xi)$, $K_{\tilde{v}}(\alpha,\xi) = K_{21}(\alpha,\xi) + \rho K_{22}(\alpha,\xi)$.

2.1.4. Побудова інтегральних рівнянь та додаткових рівностей

Після підстановки співвідношень (2.5) в умову контакту (2.3) при нехтуванні величинами δ^j (лінеаризована умова контакту) одержимо інтегральні рівняння

$$\int\limits_{\Omega} \sigma(\xi) J^j(\alpha,\xi)\, d\xi = F^j(\alpha) - D_x^j f_1^j(\alpha) - D_y^j f_2^j(\alpha) + \theta^j f_3^j(\alpha),$$

$$j = \overline{1,m}; \tag{2.6}$$

де $J^j(\alpha,\xi) = f_1^j(\alpha) K_{\tilde{u}}(\alpha,\xi) + f_2^j(\alpha) K_{\tilde{v}}(\alpha,\xi)$, $F^j(\alpha) = -\tilde{f}^j(\alpha) - f_1^j(\alpha)\tilde{U}_P(\alpha) - f_2^j(\alpha)\tilde{V}_P(\alpha)$.

Для знаходження невідомих (лінійно залежних) D_x^j, D_y^j, θ^j, $j = \overline{1,m}$, систему інтегральних рівнянь (2.6) доповнимо додатковими $2m$ інтегральними умовами, які випливають із умов рівноваги штампів

$$\int_{\Omega^j} \sigma\left[(C - S\rho)\overline{y} - (S - C\rho)\overline{x}\right] ds = -M^j,$$

$$\int_{\Omega^j} \sigma(C - S\rho) ds = -P_x^j \text{ або } \int_{\Omega^j} \sigma(S + \rho C) ds = -P_y^j; \quad (2.7)$$

де $C = \cos\left(\overline{n}, \hat{\overline{x}}\right)$, $S = \cos\left(\overline{n}, \hat{\overline{y}}\right)$, $\overline{x} = x - x_M$, $\overline{y} = y - y_M$, $\left(x_M, y_M\right)$ – точка в області Ω^j, відносно якої відомий момент прикладених до *j*-го штампа сил.

2.1.5. Побудова альтернативної системи інтегральних рівнянь та нерівностей

Визначення контактних напружень з умов (2.6)–(2.7) є досить складною задачею. Це пов'язано з тим, що може мати місце контакт на декількох ділянках, знаходження меж яких зводиться до відшукання розв'язків досить громіздкої системи нелінійних рівнянь. Тому далі розв'язування цієї задачі буде проводитися чисельно. При цьому спочатку задачу (2.6)–(2.7) зведемо до альтернативної інтегральної системи рівнянь та нерівностей, використовуючи підхід Сіньйоріні [93, 94]. Введемо в розгляд сукупність областей D^j таких, що покривають області Ω^j. Тут області D^j – прогнозована область контакту, яку необхідно вибрати так, щоби вона включала в себе реальну ділянку контакту Ω^j. Альтернативна система інтегральних рівнянь та нерівностей запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \int_{D^j} \sigma(\xi) J^j(\alpha, \xi) d\xi + D_x^j f_1^j(\alpha) + D_y^j f_2^j(\alpha) - \theta^j f_3^j(\alpha) = \\ \qquad\qquad = F^j(\alpha), \sigma(\alpha) < 0, \\ \int_{D^j} \sigma(\xi) J^j(\alpha, \xi) d\xi + D_x^j f_1^j(\alpha) + D_y^j f_2^j(\alpha) - \theta^j f_3^j(\alpha) \le \\ \qquad\qquad \le F^j(\alpha), \sigma(\alpha) = 0, \\ \int_{D^j} \sigma\left[(C - S\rho)\overline{y} - (S - C\rho)\overline{x}\right] ds = -M^j, \\ \int_{D^j} \sigma(S + \rho C) ds = -P_y^j, \qquad j = \overline{1, m}; \end{cases} \quad (2.8)$$

де $D=\bigcup_{k=1}^{m} D^j$. Тут знехтувано величинами δ^j та довизначено поза областями реального контакту (при $\xi \notin \Omega^j$) $\sigma(\xi)=0$.

2.2. Класична постановка контактної задачі для півплощини

2.2.1. Постановка задачі

Нехай верхня межа пружного тіла задається рівнянням $g(x,y)=0$, і відомо, що воно знаходиться в контактній взаємодії з одним жорстким штампом, який до контакту описується рівнянням $f(x,y)=0$. Вважатимемо, що відомі прикладені до штампа сили, головні вектори та момент яких відповідно дорівнюють (P_x, P_y) і M (рис. 2.2). Будемо вважати, що штамп може мати складну форму, а область контакту при цьому може складатися з декількох, довільним чином розташованих, ділянок. Приймемо, що загальна область контакту є малою в порівнянні із розмірами тіла, в зв'язку з чим при записі умов контакту тіло розглядатимемо як нижню півплощину.

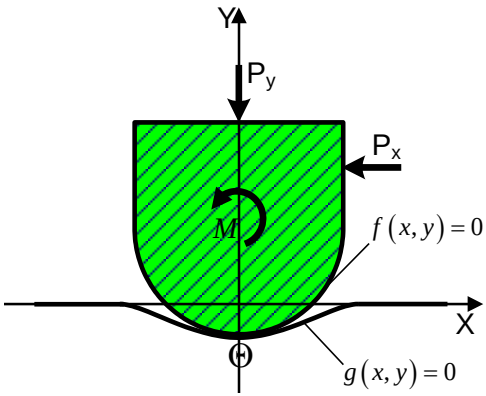


Рис. 2.2. Постановка задачі для півплощини

При розв'язуванні задачі покладемо, що між штампом та пружним тілом мають місце сили тертя. Вважатимемо, що штамп

знаходиться в стані граничної рівноваги і має місце закон Кулона-Амонтона, тобто для півплощини виконується [11] $P_x = \rho P_y$, перед навантаженням штамп дотикається до межі тіла.

2.2.2. Умови контакту

Після деформування граничні точки тіла, що знаходяться в області контакту, задовольнятимуть рівняння межі штампа з урахуванням його зміщення в напрямку координатної вісі *Oy* на деяку відстань D_y та його повороту на деякий кут θ. Тобто умову (2.1) для заданої постановки можна переписати у вигляді

$$f\left(\xi + \eta\theta, D_y + \eta - \xi\theta\right) = 0, \tag{2.9}$$

де координати межі пружного тіла після контактної взаємодії будуть $\xi = x + u(x, y)$, $\eta = y + v(x, y)$.

Тоді умову (2.2) запишемо у вигляді

$$f\left(x + u(x,y) + \left(y + v(x,y)\right)\theta, D_y + y + v(x,y) - \left(x + u(x,y)\right)\theta\right) = 0. \tag{2.10}$$

Детальніше розглянемо випадок, коли рівняння межі тіла в околі штампа має вигляд $g(x, y) = y - g_\varepsilon(x)$, де g_ε – обмежена за модулем малим числом ε функція, яка характеризує криволінійність межі пружного тіла. Тоді умова (2.3) матиме такий вигляд

$$f_1(x)\tilde{u}(x) + f_2(x)\tilde{v}(x) = -\tilde{f}(x) - D_y f_2(x) + \theta f_3(x) + \delta(x), \tag{2.11}$$

де $\tilde{f}(x) = f\left(x, g_\varepsilon(x)\right)$, $f_1(x) = f'_x\left(x, g_\varepsilon(x)\right)$, $f_2(x) = f'_y\left(x, g_\varepsilon(x)\right)$, $f_3(x) = x \cdot f_2\left(x, g_\varepsilon(x)\right) - g_\varepsilon(x) \cdot f_1\left(x, g_\varepsilon(x)\right)$; $\tilde{u}(x) = u\left(x, g_\varepsilon(x)\right)$, $\tilde{v}(x) = v\left(x, g_\varepsilon(x)\right)$; $\delta = o(\tilde{u}, \tilde{v})$.

2.2.3. Побудова альтернативної системи інтегральних рівнянь та нерівностей задачі

Тоді, враховуючи співвідношення (1.18), закон Кулона-Амонтона $\sigma = \rho\tau$, переміщення (2.5) для пружної півплощини будуть

$$\begin{cases} \tilde{u}(x) = \dfrac{\chi-1}{4G}\displaystyle\int_0^x \sigma(t)\,dt + \dfrac{\chi+1}{4\pi G}\rho\displaystyle\int_\Omega \sigma(t)\ln|t-x|\,dt, \\ \tilde{v}(x) = \dfrac{\chi+1}{4\pi G}\displaystyle\int_\Omega \sigma(t)\ln|t-x|\,dt - \dfrac{\chi-1}{4G}\rho\displaystyle\int_0^x \sigma(t)\,dt. \end{cases} \tag{2.12}$$

Рівняння штампа опишемо функцією $f(x,y) = y - f_{шт}(x)$. Тоді для співвідношення (2.11) отримаємо

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = g_\varepsilon(x) - f_{шт}(x),\ f_1(x) = -f'_{шт}(x), \\ f_2(x) = 1,\ f_3(x) = x + g_\varepsilon(x)\cdot f_{шт}{}'(x). \end{cases} \tag{2.13}$$

Підставляючи (2.12) і (2.13) в (2.11) та нехтуючи величиною δ, отримаємо лінеаризовану умову контакту у вигляді інтегрального рівняння

$$\frac{\chi+1}{4\pi G}\left(1-\rho f'_{шт}(x)\right)\int_\Omega \sigma(t)\ln|t-x|\,dt - \frac{\chi-1}{4G}\left(\rho + f'_{шт}(x)\right)\int_0^x \sigma(t)\,dt =$$
$$= f_{шт}(x) - g_\varepsilon(x) - D_y + \theta\left(x + g_\varepsilon(x)\, f'_{шт}(x)\right). \tag{2.14}$$

Нехтуючи величиною $f'_{шт}(x)$ порівняно з одиницею, отримуємо відомі в літературі рівняння вигляду

$$\frac{\chi+1}{4\pi G}\int_\Omega \sigma(t)\ln|t-x|\,dt - \frac{\chi-1}{4G}\rho\int_0^x \sigma(t)\,dt = f_{шт}(x) - g_\varepsilon(x) - D_y +$$
$$+\theta\left(x + g_\varepsilon(x)\, f'_{шт}(x)\right). \tag{2.15}$$

Для знаходження невідомих D_y і θ, що входять у рівняння (2.14) або (2.15), доповнимо ці співвідношення додатковими рівняннями, які випливають з умов рівноваги штампа

$$\int_\Omega \sigma(t)\,dt = -P_y,\ \int_\Omega \sigma(t)\,t\,dt = M. \tag{2.16}$$

Надалі рівняння (2.15) разом із додатковими умовами (2.16) будемо називати лінійними класичними умовами контакту для напівнескінченного тіла, межа якого задається рівнянням $y - g_\varepsilon(x) = 0$. Якщо покласти $g_\varepsilon = 0$, то ці умови будуть лінійними класичними умовами контакту для півплощини. Така постановка широко дос-

ліджена в літературі. Для параболічного, плоского та інших форм штампів в [11] існують відповідні аналітичні розв'язки.

Альтернативна система інтегральних рівнянь та нерівностей [24, 93, 94] матиме вигляд

$$\begin{cases} \int\limits_D \sigma(t) J(x,t)\,dt + D_y f_2(x) - \theta f_3(x) = F(x), \sigma(x) < 0, \\ \int\limits_D \sigma(t) J(x,t)\,dt + D_y f_2(x) - \theta f_3(x) \le F(x), \sigma(x) = 0, \\ \int\limits_D \sigma(t)\,dt = -P_y, \int\limits_D \sigma(t) t\,dt = M; \end{cases} \quad (2.17)$$

де $J(x,t) = \dfrac{\chi+1}{4\pi G} \cdot \ln|t-x| - \rho \dfrac{\chi-1}{4G} \cdot K(x-t)$, $F(x) = -\tilde{f}(x)$;

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2.2.4. Побудова квадратурних формул

Для чисельного розв'язування системи інтегральних рівнянь та нерівностей будемо використовувати метод механічних квадратур. В альтернативну систему рівнянь та нерівностей (2.17) входять інтеграли виду $I(x) = \int\limits_D \sigma(t) J(x,t)\,dt$, де J – функція, що має логарифмічну особливість. У цьому інтегралі для побудови квадратурних формул неперервну функцію σ використовуючи лінійний інтерполяційний поліном Лагранжа перепишемо у вигляді

$$\sigma(t) = \sum_{n=0}^{N} \sigma_n S_h(t - x_n), \quad (2.18)$$

де $S_h(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{h}, & |x| \le h, \\ 0, & |x| > h; \end{cases}$ $\sigma_n = \sigma(x_n)$, $x_0, x_1, ..., x_N$ – вузлові точки, що покривають область D.

Зокрема, приймаючи, що область D розміщена на деякому проміжку $[a,b]$, маємо $x_0 = a$, $x_{j+1} = x_j + h$, $j = \overline{0, N-1}$, $N+1$ –

кількість вузлових точок, $h = \dfrac{b-a}{N}$ – крок розбиття. В загальному випадку область D може складатись із окремих сегментів, розбиття на кожному з них може проводитись із різним кроком.

Після підстановки (2.18) в інтеграл $I(x)$ отримаємо наступні квадратурні формули

$$I(x_\nu) = \sum_{n=0}^{N} A_{\nu,n}\sigma_n \,, \tag{2.19}$$

де $A_{\nu,n} = \int\limits_{-h}^{h} S_h(t - x_n)\, J(x_\nu, t)\, dt = \int\limits_{-h}^{h} S_h(t)\, J(x_\nu, x_n + t)\, dt$.

У перші дві умови в системі (2.17) входять інтеграли

$$I_1(x) = \int\limits_D \sigma(t) \ln|t - x|\, dt \;\text{ та }\; I_2(x) = \int\limits_D \sigma(t) K(x - t)\, dt \,, \tag{2.20}$$

тобто інтеграли, в яких ядро є різницевою функцією. У зв'язку з цим побудуємо квадратурні формули для інтегралів, у яких $J(x,t) = J(x-t)$. Після відповідної підстановки для рівномірного розбиття неперервної прогнозованої області контакту одержимо

$$I(x_\nu) = \sum_{n=0}^{N} A_{\nu-n}\sigma_n \,, \tag{2.21}$$

де

$$A_m = \int\limits_{-h}^{h} S_h(t)\, J(mh - t)\, dt \,. \tag{2.22}$$

У загальному випадку для довільних функцій J коефіцієнти (2.22) можуть бути знайдені чисельно з використанням стандартних програм, які розроблені в математичних комп'ютерних середовищах. Зазначимо, що ці програми дозволяють знаходити і невласні інтеграли для інтегрованих функцій J .

Розглянемо випадок, коли інтеграли (2.22) можуть бути знайдені аналітично. Нехай відома функція $J^{**}(x) = \iint J(x) dx dx$. Тоді легко показати, що

$$A_m = \frac{1}{h}\left(J^{**}(mh - h) - 2J^{**}(mh) + J^{**}(mh + h) \right).$$

Перевага квадратурної формули (2.21) над формулою (2.19) полягає в тому, що тут її двовимірні коефіцієнти визначаються через одновимірні, а це дозволяє зменшити обсяг обчислень.

2.2.5. Альтернативна система лінійних рівнянь та нерівностей

Використовуючи формули (2.21) для інтегралів (2.20), отримаємо квадратурні формули

$$I_j\left(x_\nu\right)=\sum_{n=0}^{N}A_{\nu-n}^{j}\sigma_n\,,\ \ j=\overline{1,2}\,,$$

де

$$A_m^j=\frac{1}{h}\left(L^j\left(mh-h\right)-2L^j\left(mh\right)+L^j\left(mh+h\right)\right),\ \ j=\overline{1,2}\,; \qquad (2.23)$$

$$L^1\left(x\right)=\frac{x^2}{2}\left(\ln\left|x\right|-\frac{3}{2}\right),\ L^2\left(x\right)=\begin{cases} x^2/2\,, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

На основі побудованих квадратурних формул систему інтегральних рівнянь та нерівностей (2.17) запишемо в дискретному вигляді

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{N+2}A_{\nu,n}\sigma_n=F_\nu,\ \sigma_\nu<0,\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N+2}A_{\nu,n}\sigma_n\le F_\nu,\ \sigma_\nu=0,\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\lambda_n^1\sigma_n=-P,\ \sum_{n=0}^{N}\lambda_n^2\sigma_n=M\,,\ \nu=\overline{0,N};\end{cases} \qquad (2.24)$$

де $A_{\nu,n}=\dfrac{\chi+1}{4\pi G}\cdot A_{\nu-n}^1-\dfrac{\chi-1}{4G}\rho\cdot A_{\nu-n}^2$, $\nu,n=\overline{0,N}$; $A_{\nu,N+1}=1$, $A_{\nu,N+2}=$ $=-\left(x_\nu+g_\varepsilon\left(x_\nu\right)f'_{шт}\left(x_\nu\right)\right)$; $F_\nu=f_{шт}\left(x_\nu\right)-g_\varepsilon\left(x_\nu\right)$; $\lambda_n^1=h$, $\lambda_n^2=hx_n$. Тут позначено $\sigma_{N+1}=D_y$, $\sigma_{N+2}=\theta$ і для останніх двох інтегралів (2.17) використано формулу трапецій та враховано, що $\sigma\left(x\right)$ належить до класу неперервних функцій, що мають нульове значення на кінцях проміжку.

2.2.6. Задача квадратичного програмування

Використовуючи [31] систему лінійних рівнянь та нерівностей (2.24) зведемо до розв'язування задачі квадратичного програмування. Для цього розглянемо задачу: знайти мінімум величини

$$\mathrm{Y} = \sum_{\nu=0}^{N} C_\nu \left(\left(\sum_{n=0}^{N+2} A_{\nu,n}\sigma_n - F_\nu \right) \sigma_\nu \right) \tag{2.25}$$

при умовах

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{N+2} A_{\nu,n}\sigma_n \le F_\nu, \quad \nu = \overline{0,\mathrm{N}}, \\ \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda_n^1 \sigma_n = -P, \ \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda_n^2 \sigma_n = M, \\ \sigma_n \le 0, \quad n = \overline{0,\mathrm{N}}; \end{cases} \tag{2.26}$$

де C_ν, $\nu = \overline{0, N}$ – задані додатні сталі, вибір яких дозволяє покращити збіжність алгоритму. Очевидно, що величина (2.25) досягає свого мінімуму, який дорівнює нулю, тоді, коли невідомі напруження у вузлових точках σ_n задовольняють умови контакту (2.24).

Надалі задачу квадратичного програмування про мінімізацію величини (2.25) за умов (2.26) називатимемо ЗКП (2.25)−(2.26).

Будемо далі виходити з припущення, що розв'язок поставлених нами задач існує і він єдиний (питання існування і єдиності розв'язків контактних задач теорії пружності досліджено в роботі [1]). Розв'язок КЗ задовольняє умові (2.26) і, як було сказано вище, при виконанні цих умов цільова функція (2.25) досягає свого мінімального значення – *0*. Тобто при існуванні розв'язку КЗ існує розв'язок відповідної ЗКП і в ньому цільова функція досягає *0*. Це дає змогу контролювати точність розв'язування задачі. При проведені числових розрахунків за допомогою ЗКП визначають не лише напруження, а й значення цільової функції. Якщо значення цільової функції менше по величині від 10^{-10}, то отриманий розв'язок ЗКП вважатимемо розв'язком поставленої задачі, в протилежному випадку, необхідно розв'язок уточнити (збільшити кількість вузлових точок тощо).

Таким чином, запропонований підхід має одну з переваг: за допомогою величини Y додатково з'явилася можливість контролювання точності розв'язування контактних задач в цілому.

2.2.7. Тестування числового алгоритму

З метою дослідження точності та стійкості алгоритму виконаємо розрахунок контактних напружень для задач, для яких у літературі отримано аналітичний розв'язок.

Зокрема, тестування проводилося для параболічного штампа

$$f_{шт}(x) = \frac{\left(x - x_c\right)^2}{2R}, \tag{2.27}$$

де $\left(x_c, 0\right)$ – вершина параболи, R – радіус кривини у вершині.

При розрахунках приймалось, що штамп зміщується вертикально (без повороту, відома вертикальна сила P_y, що його притискує) і враховувалося тертя між основою та штампом. Для таких задач в [20] існує аналітичний розв'язок (з якого при $\rho = 0$ випливає розподіл Герца)

$$p^*\left(x\right) = \frac{2P_y \cos\pi\alpha \left(a^* + d^* - x_c + x\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \cdot \left(a^* - d^* + x_c - x\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{\pi\left(1 - 4\alpha^2\right)a^{*2}}, \tag{2.28}$$

де $p^*\left(x\right) = \dfrac{\sigma^*\left(x\right)}{2G}$, $\alpha = \dfrac{1}{\pi}\arctan\left(\dfrac{\rho\left(\chi - 1\right)}{\chi + 1}\right)$, $a^* = \sqrt{\dfrac{\left|P_y\right|\left(\chi + 1\right)R}{2\pi G\left(1 - 4\alpha^2\right)}}$, $d^* = 2a^*\alpha$.

Результати розрахунків контактних напружень при $\chi = 2$ (тобто при $\nu = 1/3$ для узагальненого плоского напруженого стану або при $\nu = 1/4$ для плоскої деформації), $N = 71$, $b = -\left(a + \right.$ $\left. + 0.004R\right) = 0.028R$, $Q_y = P_y/2GR = 0.00075$, $\rho = 0.1$ та $\rho = 0.725$ наведено відповідно на рис. 2.3а та 2.3б. Тут суцільним кривим (1 і 2) відповідають відносні контактні напруження $p\left(x\right) = \sigma\left(x\right)/2G$, які знайдені чисельно, а штрих-пунктирним кривим (1' і 2') –

величини $p^*(x)$, що знайдені за аналітичними формулами (2.28). У виділених прямокутниках на рисунках рис. 2.3в і 2.3г наведено у збільшеному масштабі відповідні фрагменти контактних напружень. Для кожного з вибраних вище значень коефіцієнта тертя ρ на рис. 2.3д і 2.3е наведено відповідні залежності між інтегральною відносною похибкою

$$\delta = \frac{\int\limits_D \left| p(x) - p^*(x) \right| dx}{\int\limits_D \left| p^*(x) \right| dx} \cdot 100\% \qquad (2.29)$$

та кількістю точок розбиття N.

Як видно з рис. 2.3а і 2.3б, достатньо висока для практики точність досягається вже при $N = 21$. А при $N = 71$ одержимо, що $\delta\big|_{\rho=0.1} = 0.166\%$ і $\delta\big|_{\rho=0.725} = 0.084\%$. Для обох цих випадків у центральній частині суцільні та штрих-пунктирні криві практично збігаються, а на кінцях області контакту вони різняться між собою дещо більше. Крім цього з відповідних залежностей між δ та N видно, що при $N > 21$ – $\delta < 1\%$, а при $N > 101$ – $\delta < 0.1\%$. Звідси випливає, що незалежно від значення коефіцієнта тертя при збільшенні кількості точок розбиття числовий розв'язок швидко збігається до відповідного аналітичного.

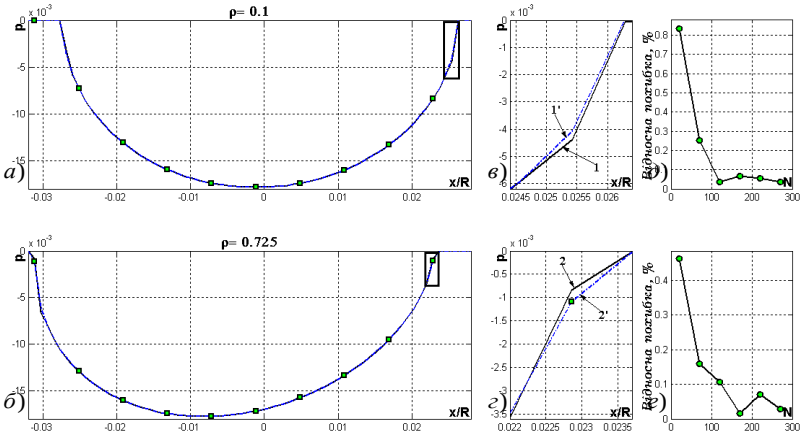


Рис. 2.3. Контактні напруження під параболічним штампом на півплощині

Очевидно, що характер збіжності у вищезгаданому розумінні можна досліджувати і за допомогою інших оцінок відхилення числового розв'язку від аналітичного. Зокрема, розглянуто

$$\delta_1 = \frac{\left|\max\limits_{x\in D}|p| - \max\limits_{x\in D}|p^*|\right|}{\max\limits_{x\in D}|p^*|}\cdot 100\%,\ \delta_2 = \frac{|d-d^*|}{|d^*|}\cdot 100\%;$$

де d і d^* – довжини областей контакту для одержаних та аналітичних розв'язків відповідно. Тут δ_1 характеризує відносні похибки розрахованих максимальних напружень, а δ_2 − довжин областей контакту. Розраховані величини наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1.

Похибки числового розв'язку

N	$\rho = 0.1$		$\rho = 0.725$	
	δ_1, %	δ_2, %	δ_1, %	δ_3, %
21	0.04665	9.27273	0.05661	8.04484
31	0.02440	5.22560	0.00963	4.04318
41	0.02525	3.20203	0.01117	5.04360
51	0.01140	4.41617	0.01684	3.24285
81	0.00210	1.68435	0.00049	2.04235
121	0.00010	1.17846	0.00032	1.04194

Як видно з таблиці 2.1, при збільшенні кількості точок розбиття похибки прямують до нуля.

2.2.8. Контактні напруження під штампом близьким до плоского із закругленими краями

На практиці плоскі штампи закруглюють біля кінців. Для опису форми таких штампів використаємо рівняння

$$f_{шт}(x) = R\left(1 - \sqrt[n]{1 - \left(x/R\right)^n}\right) \text{ при } \left|x/R\right| \le 1, \qquad (2.30)$$

де R – стала, n – ціле парне число. Розрахунки проведені при $\chi = 2$, $N = 421$ та при різних прогнозованих інтервалах контакту

(розв'язкам, наведеним на рис. 2.4б і 2.4в відповідають $b = -a = 0.232R$, а розв'язкам, наведеним на рис. 2.4д і 2.4е – $b = -a = 0.61R$). На рис. 2.4а та 2.4г графічно зображено форму штампа та основу пружного тіла при вказаних значеннях величини n. Контактні напруження розраховані при різних значеннях коефіцієнта тертя – $\rho = 0.1$ та $\rho = 0.725$. Перший випадок наведено на рис. 2.4б і 2.4д, другий – на рис. 2.4в і 2.4е. На цих рисунках суцільним кривим (1-4) відповідають розв'язки, знайдені при $Q_y^1 = 0.00075$, а штриховим кривим (1'-4') – знайдені при $Q_y^2 = 0.0015$.

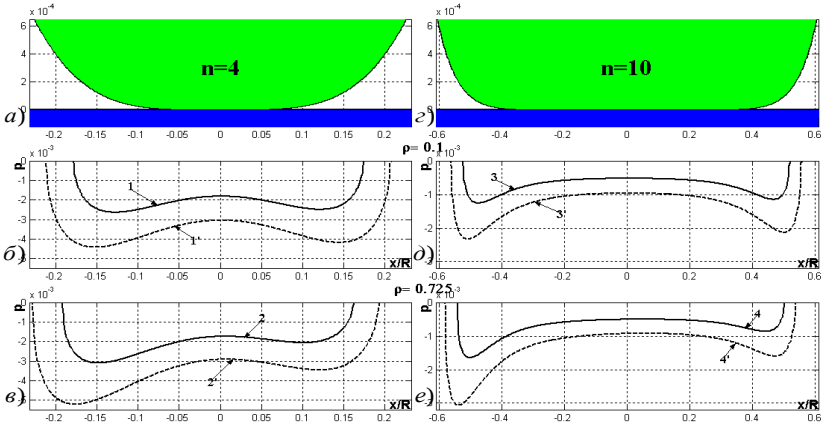


Рис. 2.4. Контактні напруження під плоским штампом із закругленими краями на півплощині

Як видно з наведених прикладів, розроблений алгоритм можна використовувати для класу задач, у яких штамп має складну форму і розв'язок яких записати в аналітичному вигляді досить проблематично.

2.2.9. Контактні напруження під штампом складної форми

Розглянемо задачу, коли штамп має складну форму, а область контакту складається з окремих ділянок, кількість і розміщення яких наперед невідомі. Приймемо при цьому, що форма штампа описується рівнянням

$$f_{шт}(x) = 2.679339\left(x/R\right)^6 - 0.014278\left(x/R\right)^5 - 0.645162\left(x/R\right)^4 +$$
$$+0.009914\left(x/R\right)^3 + 0.039093\left(x/R\right)^2 - 0.000857\left(x/R\right) +$$
$$+0.000033. \qquad (2.31)$$

Розрахунки проведені при $\chi = 2$, при виборі *881*-ї вузлової точки та при різних значеннях коефіцієнта тертя. Для застосування методики, необхідно вибрати прогнозовану область $D = [a, b]$, яка вміщує всі ділянки контакту. При розрахунках приймемо, що $b = -a = 0.44R$, та врахуємо тертя між штампом та основою.

На рис. 2.5а зображено форму штампа та пружну основу, в яку втискають штамп. На рис. 2.5б і 2.5в графічно зображені розподіли відносних контактних напружень $p(x) = \sigma(x)/2G$ відповідно при $\rho = 0.1$ і $\rho = 0.725$. Суцільним кривим (1 і 2) відповідають відносні контактні напруження при вказаному вище значенні Q_y^1, а штриховим (1’ і 2’) – при Q_y^2.

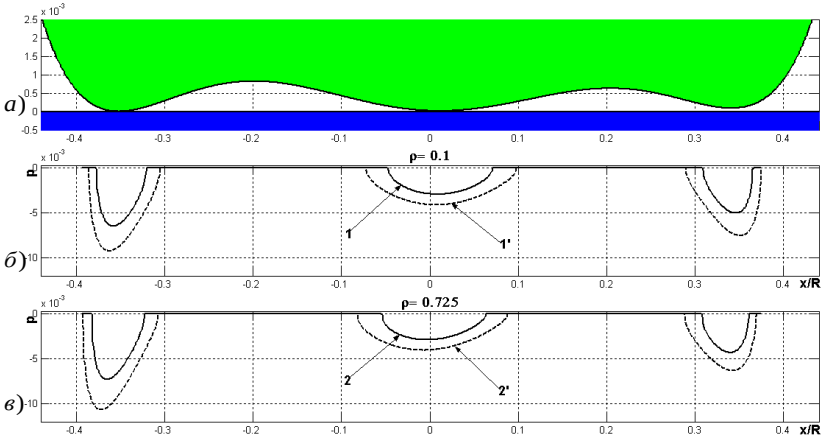


Рис. 2.5. Контактні напруження під штампом складної форми на півплощині

Як видно з рис. 2.5б і 2.5в, розроблена методика дозволяє знаходити відносні розподіли з декількома ділянками контакту. Тут

мають місце *3* ділянки контакту, на кожній з яких напруження розподілені несиметрично. Розв'язування таких задач аналітичними методами виявилось би достатньо складним, оскільки для знаходження областей контакту, необхідно було би знайти *6* невідомих меж областей, що потребувало би розв'язання *6*-ти досить громіздких нелінійних рівнянь із *6*-ма невідомими. В той же час запропонований алгоритм дозволяє ефективно знаходити як розподіли контактних напружень, так і межі всіх цих ділянок автоматично.

2.3. Контактна задача з уточненою умовою контакту для півплощини

2.3.1. Умови контакту

Розглянемо уточнені умови контакту, в яких крім нормальних, враховуються дотичні переміщення. Зазначимо, що уточнена умова контакту для півпростору розглядались у роботах [8−10].

Виходимо із наведених вище інтегральних рівнянь (2.14). Рівняння (2.14) має змінні коефіцієнти біля інтегралів, тому побудувати його розв'язок у аналітичному вигляді можна тільки в часткових випадках. Застосуємо для розв'язування цієї задачі розроблений алгоритм, особливістю якого є те, що він дозволяє розв'язувати рівняння із змінними коефіцієнтами. При цьому практично не ускладнюється його реалізація в порівнянні з класичною постановкою.

Відповідна альтернативна система інтегральних рівнянь та нерівностей матиме вигляд (2.17), в якій

$$J(x,t)=\frac{\chi+1}{4\pi G}\left(1-\rho f'_{шт}(x)\right)\cdot\ln|t-x|-\frac{\chi-1}{4G}\left(\rho+f'_{шт}(x)\right)\cdot K(x-t).$$

Оскільки у рівняння входять інтеграли виду (2.20), то замінимо їх побудованими вище квадратурними формулами (2.23). Поклавши при цьому, що

$$A_{\nu,n}=\frac{\chi+1}{4\pi G}\left(1-\rho f'_{шт}(x_\nu)\right)\cdot A^1_{\nu-n}-\frac{\chi-1}{4G}\left(\rho+f'_{шт}(x_\nu)\right)\cdot A^2_{\nu-n}, \quad (2.32)$$

одержимо альтернативну систему лінійних алгебраїчних рівнянь та нерівностей вигляду (2.24).

Далі цю систему рівнянь та нерівностей зведемо до задачі квадратичного програмування (2.25)−(2.26), в якій коефіцієнти $A_{\nu,n}$ обчислюються за формулою (2.32).

2.3.2. Знаходження контактних напружень під штампом кругової форми на плоскій або шорсткій поверхні

Розглянемо випадок контактної взаємодії жорсткого штампа, що задається рівнянням (2.30) при $n = 2$, та пружного тіла, основа якого є або плоскою (тобто $g_\varepsilon = 0$), або задається функцією

$$g_\varepsilon(x) = 8.8 \cdot 10^{-5} \cdot \cos(320x). \qquad (2.33)$$

Зазначимо, що функція вигляду (2.33) використовується в літературі для моделювання шорсткості основи [16, 21, 77].

Розрахунки проведені при $\chi = 2$, при виборі 377-ми вузлових точок, при різних значеннях головного вектора вертикальної сили, коефіцієнта тертя та прийнято, що $a = -0.052R$ і $b = 0.042R$.

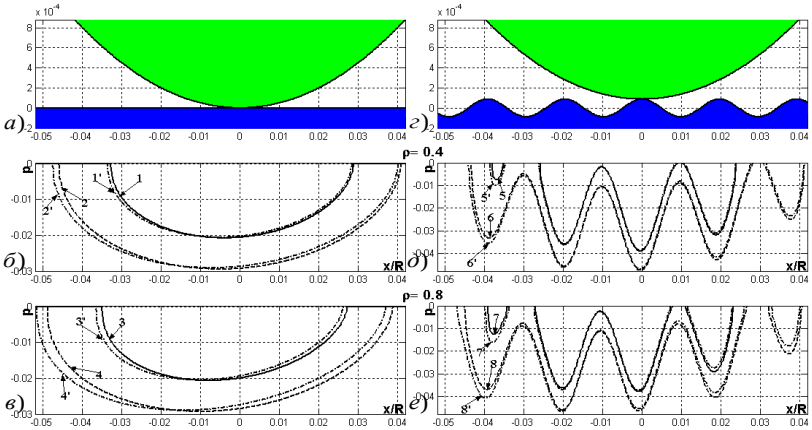


Рис. 2.6. Порівняння контактних напружень, одержаних із класичної і уточненої постановок на гладкій та хвилястій поверхнях півплощини

На рис. 2.6а і 2.6г зображені форма штампа та пружна основа, в яку втискають штамп. На рис. 2.6б і 2.6в графічно зображені розподіли відносних контактних напружень $p(x) = \sigma(x)/2G$ для гладкої основи відповідно при $\rho = 0.4$ і $\rho = 0.8$. Суцільним кривим (1 і 3) відповідають відносні контактні напруження при $Q_y^1 = 0.001$, а штриховим (2 і 4) – при $Q_y^2 = 0.002$. Крім цих розподілів, тут

штрих-пунктирними лініями (1’-4’) позначено розв’язки відповідних задач у класичній постановці (тобто, розв’язкові задачі в уточненій постановці 1 відповідає розв’язок задачі у класичній постановці 1’ і т.д.). Аналогічні результати для хвилястої основи зображено на рис. 2.6д і 2.6е. Суцільним кривим (5 і 7) відповідають відносні контактні напруження при Q_y^1, а штриховим (6 і 8) – при Q_y^2. Відповідними штрих-пунктирними кривими (5’-8’) тут позначено розв’язки задач у класичній постановці.

Оцінимо різницю між розв’язками задачі в класичній та уточненій постановках. З цією метою розраховані відносні інтегральні відхилення за формулою (2.29). Їх значення залежно від значень коефіцієнта тертя та головного вектора вертикальних сил наведено у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2.

Різниця між класичною та уточненою постановками

Плоска основа					
ρ	**Значення відносних інтегральних похибок δ, %**				
	$Q_y^1 = 0.0005$	$Q_y^2 = 0.001$	$Q_y^3 = 0.0015$	$Q_y^4 = 0.002$	$Q_y^5 = 0.0025$
0.0	0.7487114	1.0559388	1.2920855	1.4295015	1.4989160
0.1	0.9071180	1.2514037	1.5109853	1.7115377	1.8582657
0.2	1.4694079	1.9454333	2.2879109	2.5600057	2.7878684
0.3	2.0893234	2.7508466	3.2215502	3.5987060	3.8482249
0.4	2.7230971	3.5757009	4.1801499	4.6625263	4.8418084
0.5	3.3642028	4.4093229	5.1490018	5.7387905	5.8290708
0.6	4.0062626	5.2459775	6.1219113	6.8195248	6.8622329
0.7	4.6479839	6.0827526	7.0945811	7.8999121	7.8867589
0.8	5.2892506	6.9156364	8.0633659	8.9766287	8.9119181
0.9	5.9254798	7.7451078	9.0280878	9.9432637	9.9169224

Шорстка основа					
ρ	**Значення відносних інтегральних похибок δ, %**				
	$Q_y^1 = 0.0005$	$Q_y^2 = 0.001$	$Q_y^3 = 0.0015$	$Q_y^4 = 0.002$	$Q_y^5 = 0.0025$
0.0	0.7149517	0.9078277	1.3892441	1.3470781	1.3287018
0.1	0.8414470	1.3637790	1.6114267	1.6968461	1.7373345

Шорстка основа					
ρ	Значення відносних інтегральних похибок δ, %				
	$Q_y^1 = 0.0005$	$Q_y^2 = 0.001$	$Q_y^3 = 0.0015$	$Q_y^4 = 0.002$	$Q_y^5 = 0.0025$
0.2	1.3269218	2.0866627	2.4012927	2.4936617	2.5906125
0.3	1.9213016	2.8809453	3.3491466	3.4861007	3.6225375
0.4	2.5175584	3.6970384	4.3228854	4.5079802	4.6703587
0.5	3.1071508	4.5223961	5.3070245	5.5472029	5.7938514
0.6	3.7173152	5.3548195	6.2924012	6.5950881	6.9234198
0.7	4.2986464	6.1910951	7.2725683	7.6516696	8.0021021
0.8	4.8914681	7.0250900	8.2473743	8.7182829	9.0443077
0.9	5.4659832	7.8555161	9.2084422	9.7635094	10.0410259

Із наведених графіків та таблиці випливає, що при малих коефіцієнтах тертя або навантаженнях класичні умови контакту дозволяють з достатньою для практики точністю розраховувати контактні напруження. При збільшенні коефіцієнта тертя та головного вектора вертикальних сил різниця між розв'язками, отриманими із класичних та уточнених умов контакту збільшується.

Таким чином, побудована методика дозволяє знаходити розподіли контактних напружень на хвилястій основі пружного тіла як для класичної, так і для уточненої постановок контактної задачі.

2.3.3. Знаходження контактних напружень під штампом складної форми на шорсткій поверхні

Розглянемо випадок контактної взаємодії жорсткого штампа, що задається рівнянням (2.31), та пружного шорсткого тіла, основа якого задається функцією

$$g_\varepsilon(x) = 8 \cdot 10^{-5} \cdot \cos(60x).$$

Розрахунки проведені при $\chi = 2$, при виборі *441*-ї вузлової точки та при різних значеннях коефіцієнта тертя. Крім цього, тут прийнято, що $b = -a = 0.44R$.

На рис. 2.7а графічно зображено форму штампа та пружну шорстку основу, в яку втискають штамп. На рис. 2.7б і 2.7в графічно зображені розподіли відносних контактних напружень p відповідно при $\rho = 0.4$ і $\rho = 0.8$. Суцільним кривим (1 і 3) відповіда-

ють відносні контактні напруження при $Q_y^1 = 0.001$, а штриховим (2 і 4) – при $Q_y^2 = 0.002$. Крім цього на рисунках штрих-пунктирними кривими (1’-4’) зображено розв’язки відповідних задач у класичній постановці.

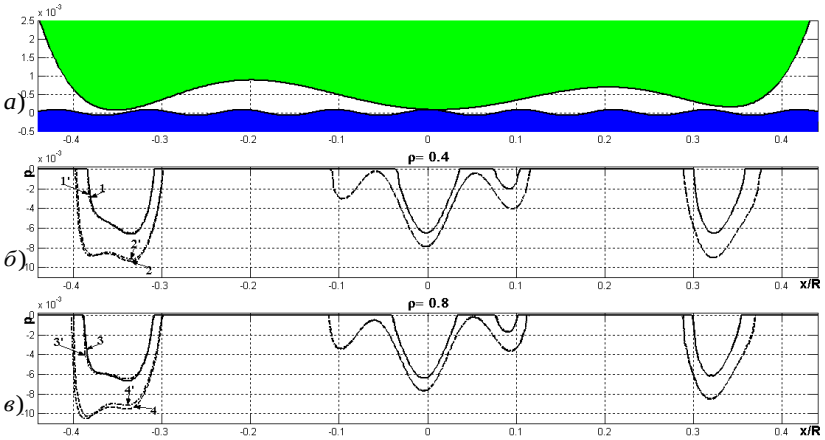


Рис. 2.7. Контактні напруження під штампом складної форми на хвилястій поверхні півплощини

Розраховано відносну інтегральну похибку класичного розв’язку, що обчислюється за формулою (2.29) залежно від значень коефіцієнта тертя та головного вектора сили. Результати розрахунків наведено в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3.

Різниця між класичною та уточненою постановками

ρ	**Значення відносних інтегральних похибок δ, %**				
	$Q_y^1 = 0.0005$	$Q_y^2 = 0.001$	$Q_y^3 = 0.0015$	$Q_y^4 = 0.002$	$Q_y^5 = 0.0025$
0.0	0.2964958	0.5602461	0.7663728	0.9307051	1.0875691
0.1	0.3654713	0.6351326	0.8470770	1.0336561	1.1754683
0.2	0.5035587	0.7818486	1.0579675	1.2131425	1.3621907
0.3	0.6884633	1.0523314	1.3372830	1.5283250	1.6812918
0.4	0.8875780	1.3378563	1.7248925	1.9391614	2.1162537
0.5	1.0906322	1.6894226	2.1234868	2.3865055	2.6084390

ρ	Значення відносних інтегральних похибок δ, %				
	$Q_y^1 = 0.0005$	$Q_y^2 = 0.001$	$Q_y^3 = 0.0015$	$Q_y^4 = 0.002$	$Q_y^5 = 0.0025$
0.6	1.3290063	1.9974769	2.5491873	2.8671851	3.1278796
0.7	1.5397019	2.3753243	2.9645411	3.3419739	3.6542774
0.8	1.7783962	2.6960778	3.3935916	3.8263824	4.1774227
0.9	2.0083017	3.0859937	3.8411332	4.3198630	4.7279058

Із рисунків та таблиці випливає, що при збільшенні коефіцієнта тертя та головного вектора прикладених до штампа сил, різниця між відповідними розв'язками класичної і уточненої постановок збільшується. В цілому можна зробити висновок, що для розглянутого класу задач контактні напруження можуть знаходитись на основі класичних умов.

2.4. Контактна задача з нелінійною умовою контакту для півплощини

2.4.1. Умови контакту

Нехай після зміщення в напрямку координатної осі *Oy* на деяку відстань D_y та повороту штампа на кут θ рівняння його основи має вигляд (2.10). Розглянемо контактну задачу за умов строгого задоволення умов контакту. Ця задача нелінійна. Для її розв'язання використаємо ітераційний процес, аналогічний до ітераційного методу розв'язування нелінійних рівнянь. Для цього запишемо нелінійну умову у вигляді рекурентного співвідношення

$$f_x'(x,y)u^{(n+1)}(x,y) + f_y'(x,y)v^{(n+1)}(x,y) + f_y'(x,y)D^{(n+1)} - \\ -\theta^{(n+1)}\left(xf_y'(x,y) - yf_x'(x,y)\right) = -f(x,y) + \delta^{(n)}, \quad (2.34)$$

де

$$\delta^{(n)} = f\left(x + \tilde{u}^{(n)}(x,y) + \left(y + \tilde{v}^{(n)}(x,y)\right)\theta^{(n)}, D^{(n)} + y + \tilde{v}^{(n)}(x,y) - \right. \\ \left. -\left(x + \tilde{u}^{(n)}(x,y)\right)\theta^{(n)}\right) + f_x'(x,y)u^{(n)}(x,y) + f_y'(x,y)v^{(n)}(x,y) + \\ + f_y'(x,y)D^{(n)} - \theta^{(n)}\left(xf_y'(x,y) - yf_x'(x,y)\right) + f(x,y), \; n = 0,1,\ldots.$$

Тут індекс (n) поверху вказує на значення відповідної величини на n-му етапі ітераційного процесу (на n-ій ітерації), а $(n+1)$ – на наступному.

Використовуючи параметризацію рівняння межі пружного тіла та позначення в (2.11) та (2.13), умову (2.34) перепишемо у вигляді

$$-f'_{шт}(x)\tilde{u}^{(n+1)}(x)+\tilde{v}^{(n+1)}(x)+D^{(n+1)}-\theta^{(n+1)}\left(x+g_{\varepsilon}(x)\,f'_{шт}(x)\right)=$$
$$=f\left(x+\tilde{u}^{(n)}(x)+\left(g_{\varepsilon}(x)+\tilde{v}^{(n)}(x)\right)\theta^{(n)},D^{(n)}+g_{\varepsilon}(x)+\tilde{v}^{(n)}(x)-\right.$$
$$\left.-\left(x+\tilde{u}^{(n)}(x)\right)\theta^{(n)}\right)-f'_{шт}(x)\tilde{u}^{(n)}(x)+\tilde{v}^{(n)}(x)+D^{(n)}-\theta^{(n)}\times$$
$$\times\left(x+g_{\varepsilon}(x)\,f'_{шт}(x)\right), \qquad (2.35)$$

де

$$\begin{cases}\tilde{u}^{(n)}(x)=\dfrac{\chi-1}{4G}\displaystyle\int_0^x\sigma^{(n)}(t)\,dt+\dfrac{\chi+1}{4\pi G}\rho\displaystyle\int_{\Omega}\sigma^{(n)}(t)\ln|t-x|\,dt,\\ \tilde{v}^{(n)}(x)=\dfrac{\chi+1}{4\pi G}\displaystyle\int_{\Omega}\sigma^{(n)}(t)\ln|t-x|\,dt-\dfrac{\chi-1}{4G}\rho\displaystyle\int_0^x\sigma^{(n)}(t)\,dt.\end{cases} \qquad (2.36)$$

Тут $\sigma^{(n)}$ – нормальні напруження, знайдені на n-ій ітерації; $D^{(n)}$ і $\theta^{(n)}$ – відповідно зміщення в напрямку осі *Oy* та кут повороту, знайдені на цій же ітерації.

Для задоволення умови (2.34) використаємо наступний ітераційний процес. За *0*-ве наближення приймаємо розв'язок задачі у визначеній вище уточненій постановці (при нехтуванні величиною $\delta^{(0)}$ в умові (2.34)). Позначимо знайдені розв'язки для цієї задачі через $\sigma^{(0)}$, $D^{(0)}$ і $\theta^{(0)}$ та знаходимо відповідні їм переміщення на *0*-ій ітерації за формулою (2.36) при $n=0$.

При розв'язуванні задачі на *1*-му етапі ітераційного процесу, застосуємо рекурентну умову контакту (2.35). При цьому будемо використовувати в ній розв'язки та переміщення, знайдені в *0*-му етапі. Аналогічно розв'язуємо задачу на *2*-му та наступних етапах.

Ця задача відрізняється від розглянутої вище уточненої постановки лише відомою функцією δ у правій частині, що, очевидно, суттєво не ускладнює реалізацію вказаного вище алгоритму. Ітераційний процес продовжуємо доти, доки знайдені контактні напруження на двох послідовних ітераціях не будуть відрізнятися на наперед задану малу величину.

2.4.2. Дослідження збіжності розв'язків при контактній взаємодії штампа кругової форми з плоскою або шорсткою поверхнями

Розглянемо контактну взаємодію жорсткого штампа, що задається рівнянням (2.30), та пружного тіла, основа якого є або плоскою (тобто $g_\varepsilon = 0$), або задається функцією (2.33). Розрахунки будемо проводити при $\chi = 2$, при виборі *377*-ми вузлових точок, при значеннях коефіцієнта тертя $\rho = 0.4$ і $\rho = 0.8$ та значеннях відносного головного вектора вертикальних сил $Q_y^1 = 0.001$ і $Q_y^2 = 0.002$. Крім цього, тут прийнято, що $a = -0.052R$ і $b = 0.042R$. Для класичної та уточненої постановок відповідні розв'язки зображено на рис. 2.6.

На рис. 2.8а і 2.8г графічно зображені форми штампа та пружної основи. Для цих двох постановок при різних значеннях коефіцієнта тертя та головного вектора вертикальних сил обчислено наступні величини, які характеризують збіжність ітераційного процесу

$$\delta_I = \frac{\int\limits_D \left| p^{(I)}(x) - p^{(I-1)}(x) \right| dx}{\int\limits_D \left| p^{(I-1)}(x) \right| dx} \cdot 100\%, \; I = \overline{1,4},$$

де $p^{(I)}(x) = \dfrac{\sigma^{(I)}(x)}{2G}$ – відповідні розподіли відносних контактних напружень, що знайдені на I-й ітерації за допомогою рекурентних співвідношень (2.35).

Обчислені значення величин δ_1 для кожного з вищевказаних випадків наведено в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4.

Інтегральні відносні оцінки відхилення δ_1 між *1*-ю та *0*-ю ітераціями

ρ	Q_y	**Інтегральна відносна оцінка відхилення δ_1, %**	
		Плоска основа	**Шорстка основа**
0.4	0.001	0.03462013366	0.03989280348
	0.002	0.06321596170	0.07090515632

ρ	Q_y	Інтегральна відносна оцінка відхилення δ_1, %	
		Плоска основа	**Шорстка основа**
0.8	0.001	0.09549014739	0.11747426991
	0.002	0.17514534390	0.19935861111

Як видно з таблиці 2.4, інтегральні відносні оцінки відхилення δ_1 прямопропорційні коефіцієнту тертя та головному вектору вертикальних сил (так само як і для інтегрального відхилення між розв'язками уточненої та класичної постановок). Максимальне відхилення становить приблизно *0.2%*. Величина δ_2 значно менша за δ_1, тому розв'язок на *1*-ій ітерації з великою точністю можна вважати розв'язком задачі в нелінійній постановці.

На рис. 2.8б і 2.8в зображено знайдені величини

$$\delta_I^* = \ln \delta_I \,,\ I = \overline{1,4}\,, \tag{2.37}$$

для випадку плоскої основи. Суцільним кривим із кружечками відповідають значення цих величин для відносного головного вектора сили Q_y^1, а штриховим кривим із квадратиками – Q_y^2. Аналогічно на рис. 2.8д і 2.8е зображені величини (2.37) для шорсткої основи при вказаних вище значеннях коефіцієнта тертя та відносного головного вектора сили.

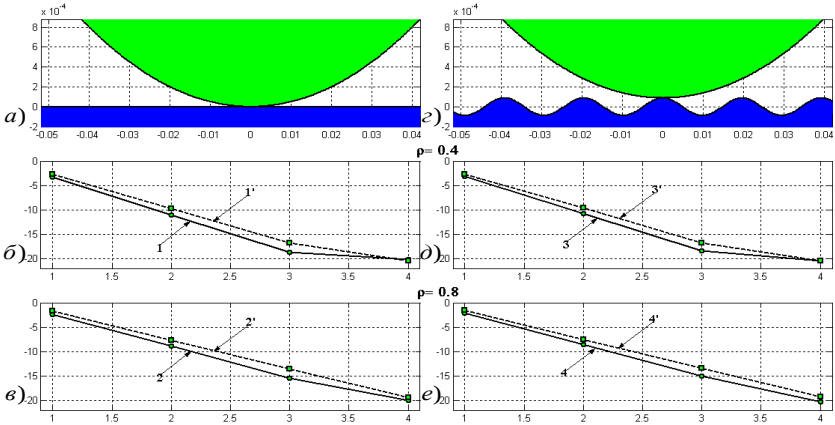


Рис. 2.8. Характер зміни величин δ^*

Як видно з рис. 2.8, збіжність проходить практично так, як і у спадній геометричній прогресії. З цих рисунків також видно, що при збільшенні значення головного вектора сили збіжність дещо уповільнюється як за рахунок більших перших членів геометричної прогресії δ_1, так і за рахунок менших знаменників. Для цього випадку за розв'язок задачі в нелінійній постановці можна прийняти розв'язок, що знайдено на *3*-й ітерації.

2.5. Класична постановка контактної задачі для смуги, що розташована на двох опорах

2.5.1. Постановка задачі

Розглянемо пружну смугу $-H \le y \le 0$, яка розміщена на двох опорах та навантажена штампом довільної форми. Приймемо, що дотичні напруження між смугою і опорою відсутні, розміри області контакту під опорами малі порівняно з величиною H, тому реакції опор розглядаємо як зосереджені сили $(0, P_1)$, $(0, P_2)$, прикладені в заданих точках $(l_1, -H)$, $(l_2, -H)$, що є центрами опор.

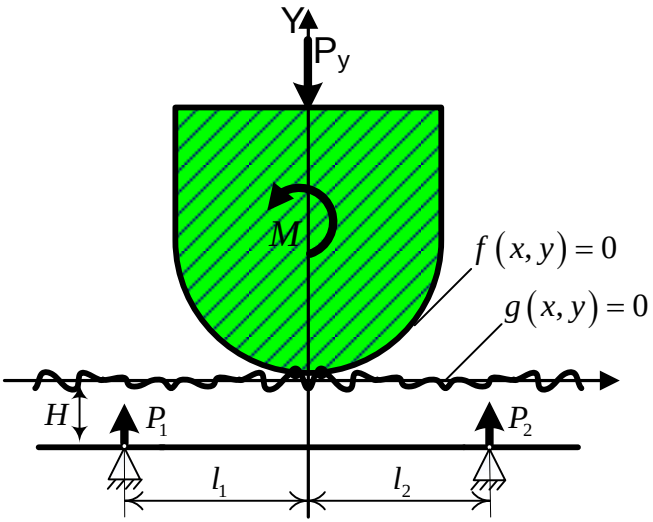


Рис. 2.9. Постановка задачі для смуги, що розташована на двох опорах

Нехай верхня межа пружного тіла в околі штампа задається рівнянням $g(x,y)=0$, а рівняння основи штампа має вигляд $f(x,y)=0$. Покладемо, що відомі головний вектор P_y та момент M всіх зусиль, прикладених до штампа. Припустимо, що перед навантаженням штамп перебуває в умовах початкового дотику з межею тіла. Будемо вважати, що штамп може мати складну форму, а область контакту при цьому може складатися з декількох, довільно розташованих ділянок.

2.5.2. Умови контакту

Для запису умови контакту врахуємо те, що після деформування граничні точки смуги, що знаходяться в області контакту, будуть задовольняти рівняння основи штампа з урахуванням його зміщення в напрямку координатної вісі Oy на деяку відстань D_y та його повороту на деякий кут θ. Умову (2.1) для заданої постановки перепишемо у вигляді (2.9), де координати пружного тіла після контактної взаємодії будуть $\xi = x + u(x,y) + \sum_{k=1}^{2} P_k u_k(l_k, x, y)$, $\eta = y + v(x,y) + \sum_{k=1}^{2} P_k v_k(l_k, x, y)$, де (u_k, v_k), $k=\overline{1,2}$ – переміщення верхньої межі смуги, що зумовлені дією одиничної реакції k-ї опори, яка прикладена в точці $(l_k, -H)$. Тоді умова (2.2) матиме вигляд

$$f\Bigg(x+u(x,y)+\sum_{k=1}^{2}P_k u_k(l_k,x,y)+\Bigg(y+v(x,y)+\sum_{k=1}^{2}P_k v_k(l_k,x,y)\Bigg)\times$$

$$\times\theta, D_y + y + v(x,y) + \sum_{k=1}^{2} P_k v_k(l_k,x,y) -$$

$$-\Bigg(x+u(x,y)+\sum_{k=1}^{2}P_k u_k(l_k,x,y)\Bigg)\theta\Bigg)=0.$$

Враховуючи, що $g(x,y) = y - g_\varepsilon(x)$, умова (2.3) буде

$$f_1(x)\tilde{u}(x) + f_2(x)\tilde{v}(x) = -\tilde{f}(x) - \sum_{k=1}^{2} P_k\left(f_1(x)\tilde{u}_k(x) + f_2(x)\tilde{v}_k(x)\right) -$$

$$-D_y f_2(x)+\theta f_3(x)+\delta(x), \qquad (2.38)$$

де $\tilde{u}_k(x)=u_k\left(l_k,x,g_\varepsilon(x)\right)=\dfrac{\chi+1}{2G}\int\limits_0^x \mathrm{Re}\left(\Phi_2\left(\xi,l_k-iH\right)\right)d\xi$,

$\tilde{v}_k(x)=v_k\left(l_k,x,g_\varepsilon(x)\right)=\dfrac{\chi+1}{2G}\int\limits_0^x \mathrm{Im}\left(\Phi_2\left(\xi,l_k-iH\right)\right)d\xi$. Всі інші позначення тут аналогічні як і в умові (2.11).

2.5.3. Побудова інтегральних рівнянь

Зі співвідношень (1.19) переміщення (2.5) для пружної смуги, розташованої на двох опорах, отримаємо у вигляді

$$\begin{cases}\tilde{u}(x)=\int\limits_\Omega \sigma(t)K_1(x-t)\,dt,\\ \tilde{v}(x)=\int\limits_\Omega \sigma(t)K_2(x-t)\,dt.\end{cases} \qquad (2.39)$$

Реакції опор визначаємо із умов рівноваги

$$\begin{cases}P_1+P_2=P,\\ P_1\cdot(l_1-x_M)+P_2\cdot(l_2-x_M)=M;\end{cases} \qquad (2.40)$$

тут x_M – абсциса в області Ω, відносно якої відомий момент прикладених до штампа сил.

Підставивши співвідношення (2.39) і (2.13) в рівняння (2.38) та знехтувавши в ньому величиною δ, отримаємо інтегральне рівняння для знаходження напружень σ у вигляді

$$-f'_{шт}(x)\cdot\int\limits_\Omega \sigma(t)K_1(x-t)\,dt+\int\limits_\Omega \sigma(t)K_2(x-t)\,dt=f_{шт}(x)-g_\varepsilon(x)-$$

$$-D_y+\theta\left(x+g_\varepsilon(x)\,f'_{шт}(x)\right)-f_{оп}(x), \qquad (2.41)$$

де $f_{оп}(x)=\dfrac{\chi+1}{2G}\sum\limits_{k=1}^{2}P_k\eta_k$;

$$\eta_k=\int\limits_0^x\left(\mathrm{Im}\left(\Phi_2\left(\xi,l_k-iH\right)\right)-f'_{шт}(x)\,\mathrm{Re}\left(\Phi_2\left(\xi,l_k-iH\right)\right)\right)d\xi,$$

$\Phi_{1,2}$ – відомі функції [68].

Якщо врахувати під штампом тільки переміщення в напрямку координатної вісі *Oy*, то рівняння (2.41) матиме вигляд

$$\int_{\Omega} \sigma(t) K_2(x-t)\,dt = f_{шт}(x) - g_{\varepsilon}(x) - D_y +$$

$$+\theta\left(x + g_{\varepsilon}(x)\, f'_{шт}(x)\right) - v_{оп}(x), \qquad (2.42)$$

де $v_{оп}(x) = \dfrac{\chi+1}{2G}\sum_{k=1}^{2} P_k \int_0^x \operatorname{Im}\left(\Phi(\xi, l_k - iH)\right) d\xi$.

Для знаходження невідомих D_y і θ, що входять у рівняння (2.42), залучаємо додатково умови рівноваги штампа.

Рівняння (2.42) разом із додатковими умовами відповідають класичним умовам контакту для смуги, верхня межа якої задається рівнянням $y - g_{\varepsilon}(x) = 0$.

2.5.4. Побудова числового алгоритму

Для розв'язування задачі введемо в розгляд область $D = [a,b]$, яка вміщує всі ділянки контакту. Довизначимо в ній поза областями контакту (при $x \notin \Omega$) $\sigma(x) = 0$. Тоді умови (2.42) та (2.16) перепишемо у вигляді альтернативної системи інтегральних рівнянь та нерівностей (2.17), у якій $J(x,t) = K_2(x-t)$ і $F(x) = f_{шт}(x) - g_{\varepsilon}(x) - v_{оп}(x)$.

Використовуючи розроблений вище алгоритм, перепишемо умову (2.17) у вигляді альтернативної системи лінійних рівнянь та нерівностей (2.24) (в ній $F_{\nu} = f_{шт}(x_{\nu}) - g_{\varepsilon}(x_{\nu}) - v_{оп}(x_{\nu})$), яку, в свою чергу, зводимо до відповідної ЗКП.

2.5.5. Тестування чисельного алгоритму

Нехай рівняння основи штампа задається функцією (2.27), а $g_{\varepsilon}(x) = 0$. Для тестування алгоритму покладемо, що штамп не повертається, абсциса центра $x_c = 0$ та виконується умова $l_2 = -l_1 = l$.

Розрахунки контактних напружень виконано при $\chi = 1.8$ (при $\nu = 3/7$ для узагальненого плоского напруженого стану або при $\nu = 0.3$ для плоскої деформації), $l = 20H$, $R = 4H$. Розглянуто чотири значення прикладених до штампа відносних сил, головні вектори яких відповідно $Q_y^1 = \dfrac{P_y^1}{2GH} = 0.003366$, $Q_y^2 = 0.003186$, $Q_y^3 = 0.003104$ та $Q_y^4 = 0.003022$. Позначимо через a_j і b_j, $j = \overline{1,4}$ значення крайніх лівих та відповідних правих меж областей контакту.

Розраховані відповідні їм значення правої межі області контакту будуть: $b_1 = 3H$, $b_2 = 2H$, $b_3 = 1.5H$, $b_4 = H$.

На рис. 2.10а зображено форму штампа та пружну смугу на опорах. На рис. 2.10б кривими (1-4) графічно зображені розподіли відносних контактних напружень p, що відповідають вказаним вище значенням сил. На рис. 2.10в ці ж розподіли контактних напружень наведені відносно безрозмірних поздовжних координат x/b_j.

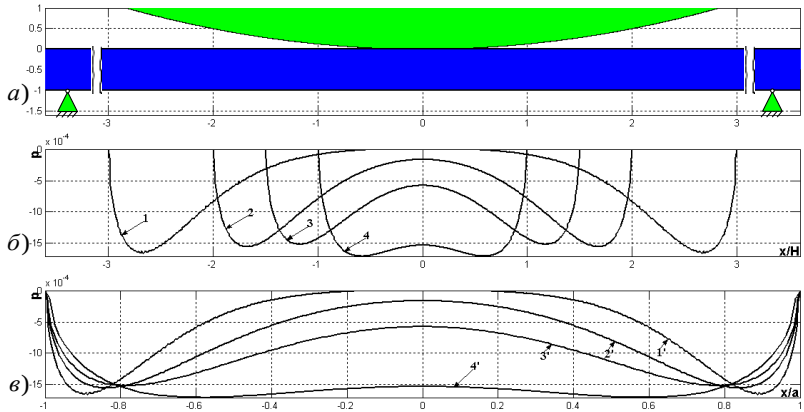


Рис. 2.10. Контактні напруження під параболічним штампом на смузі, що розташована на двох опорах

Наведені на рисунку криві (2-4) практично збігаються із відповідними розв’язками [76] (в цій роботі при розрахунках прий-

малось, що $H = 1$см), які отримано іншим методом, в основі якого є припущення, що область контакту завжди суцільна і змінюватися можуть знаки перед напруженнями. Зазначимо, що для цих розв'язків мають місце суцільні області контакту для обох методик. А для кривої (1) область контакту складається із двох ділянок. Тому цей розподіл контактних напружень дещо відрізняється від наведеного в [76].

Проведемо дослідження при більших значеннях прикладених до штампа сил, при яких з'явиться відлипання основи від штампа.

На рис 2.11б кривим (1-4) відповідають розподіли відносних контактних напружень відповідно при $b_1 = 4.92H$ і $Q_y^1 = 0.00377$, $b_2 = 4.36H$ і $Q_y^2 = 0.00364$, $b_3 = 3.72H$ і $Q_y^3 = 0.00351$, та $b_4 = 3.08H$ і $Q_y^4 = 0.00338$. На рис. 2.11в наведено розподіл контактних напружень відносно безрозмірних координат x / b_j.

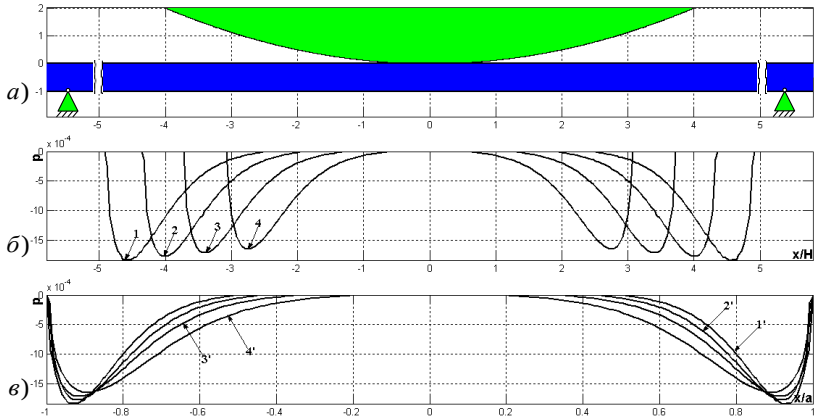


Рис. 2.11. Контактні напруження для випадку відлипання параболічного штампа від поверхні смуги, що розташована на двох опорах

Зазначимо, що в запропонованій методиці врахування відлипання штампа від поверхні деформованої смуги не ускладнює процесу розв'язування задачі.

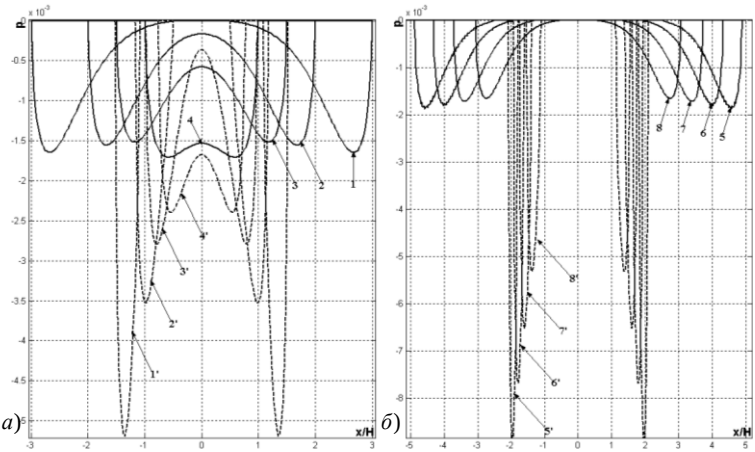
2.5.6. Порівняння напружень під круговим та параболічним штампами

У літературі досить часто замінюють круговий штамп параболічним. З одного боку, це спрощує процес одержання результату, а з другого – вважається, що для ділянок контакту малих розмірів таке спрощення не приводить до істотних похибок.

З метою дослідження цієї проблеми виконаємо порівняння контактних напружень для параболічного та кругового штампів.

Рівняння кругового штампа описуємо функцією (2.30) при $n = 2$. Приймемо, що величини χ, l та R такі ж, як і вибрані вище для випадку параболічного штампа.

На рис. 2.12а та 2.12б зображено результати розрахунків відносних контактних напружень. Тут кривим (1 і 1’) відповідають відносні контактні напруження при значенні відносної сили сили $Q_y^1 = 0.003366$, кривим (2 і 2’) − $Q_y^2 = 0.003186$, кривим (3 і 3’) − $Q_y^3 = 0.003104$, кривим (4 і 4’) − $Q_y^4 = 0.003022$, кривим (5 і 5’) − $Q_y^5 = 0.00377$, кривим (6 і 6’) − $Q_y^6 = 0.00364$, кривим (7 і 7’) − $Q_y^7 = 0.00351$, кривим (8 і 8’) − $Q_y^8 = 0.00338$. Суцільним кривим на цих рисунках відповідають розподіли відносних контактних напружень під параболічним штампом, а штриховим − під круговим штампом.



а) *б*)

Рис. 2.12. Порівняння контактних напружень під параболічним та круговим штампами на смузі, що розташована на двох опорах

Як видно із рисунків в усіх розглянутих випадках контактні напруження під круговим штампом і параболічним штампом, що має таку ж кривину в вершині, істотно відрізняються між собою (до двох і більше разів при великих навантаженнях). Істотно відрізняються між собою і розміри ділянок контакту. Тому розв'язування контактних задач для смуги при великих ділянках контакту необхідно проводити з повним врахуванням геометрії штампа та поверхні пружного тіла.

2.5.7. Контактні напруження під штампом параболічної форми на хвилястій (шорсткій) поверхні

Дослідження хвилястості (шорсткості) проведемо з використанням класичних умов контакту. Для цього використаємо інтегральне рівняння (2.42), яке справедливе для штампів довільної форми.

Приймемо, що штамп має параболічну форму, а рівняння основи має вигляд

$$g_{\varepsilon}\left(x\right) = 0.0002 \cdot \cos(12x)\,. \qquad (2.43)$$

Нехай при цьому $\chi = 1.8$, $l_2 = -l_1 = 5H$, $R = 2H$ та $N = 401$.

На рис. 2.13 суцільній кривій 1 та штриховій кривій 2 відповідають розподіли відносних контактних напружень відповідно при $Q_y^1 = 0.0288$ та $Q_y^2 = 0.0398$. Штрих-пунктирною кривою 3 на цьому рисунку графічно зображена форма (шорстка) поверхні тіла.

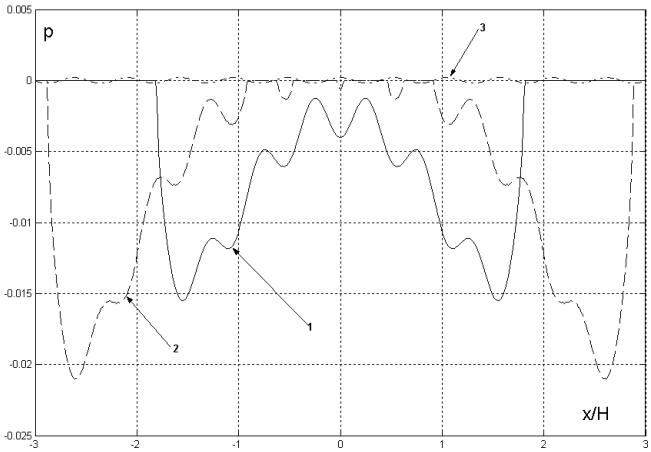


Рис. 2.13. Контактні напруження під параболічним штампом на хвилястій поверхні смуги, що розташована на двох опорах

Наведені на рис. 2.13 криві 1 і 2 ілюструють процес відлипання параболічного штампа від шорсткої поверхні деформованої смуги. При цьому за незначного збільшення значення головного вектора сили суцільна область контакту може перетворитися в дискретну, що складається з 5-ти ділянок.

РОЗДІЛ 3
КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ З НЕЗАДАНИМИ ОБЛАСТЯМИ ВЗАЄМОДІЇ ДЛЯ ПЛАСТИН З ОТВОРОМ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

3.1. Загальна постановка контактної задачі для нескінченної пластинки з еліптичним отвором та виведення умов контакту

3.1.1. Постановка задачі

Нехай нескінченна пружна пластинка послаблена отвором близької до еліптичної форми. Рівняння межі отвору опишемо функцією $g(x, y) = 0$. Пластинка знаходиться в умовах контактної взаємодії зі штампом, межа якого описується рівнянням $f(x, y) = 0$. Припустимо, що прикладені до штампа сили, головні вектори та момент яких відповідно дорівнюють (P_x, P_y) і M (рис. 3.1).

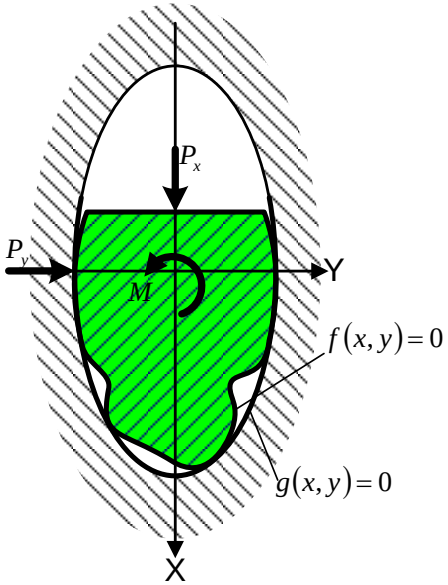


Рис. 3.1. Постановка задачі про штамп складної форми, що втискається в межу еліптичного отвору в нескінченній пружній пластинці

При розв'язуванні задачі будемо вважати, що між штампом та пружним тілом мають місце сили тертя. Покладемо, що штамп знаходиться в стані граничної рівноваги і має місце закон Кулона-Амонтона.

3.1.2. Умови контакту

Умови контакту (2.3) для заданої постановки перепишемо у вигляді

$$f_1(\alpha)\tilde{u}(\alpha)+f_2(\alpha)\tilde{v}(\alpha)=-\tilde{f}(\alpha)-D_x f_1(\alpha)+\theta f_3(\alpha)+\delta(\alpha), \quad (3.1)$$

де $\tilde{f}(\alpha)=f\left(g_1(\alpha),g_2(\alpha)\right)$, $f_1(\alpha)=f_x'\left(g_1(\alpha),g_2(\alpha)\right)$, $f_2(\alpha)=$ $=f_y'\left(g_1(\alpha),g_2(\alpha)\right)$, $f_3(\alpha)=g_1(\alpha)\cdot f_2(\alpha)-g_2(\alpha)\cdot f_1(\alpha)$; $\tilde{u}(\alpha)=u\left(g_1(\alpha),g_2(\alpha)\right)$, $\tilde{v}(\alpha)=v\left(g_1(\alpha),g_2(\alpha)\right)$; $\delta(\alpha)=o(\tilde{u},\tilde{v})$ – додаткові члени, які мають другий порядок малості відносно переміщень.

Рівняння межі отвору еліптичної форми з півосями R_x і R_y у параметричному вигляді буде $g_1(\alpha)=R_x\cos\alpha$, $g_2(\alpha)=R_y\sin\alpha$. Дотичні напруження τ під штампом пов'язані з нормальними σ згідно закону Кулона-Амонтона співвідношенням $\sigma=\rho\tau$. Тоді умову (1.20) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases}\tilde{u}(\alpha)=\int\limits_{\Omega}\sigma(\xi)\left(K_1(\alpha,\xi)-\rho K_2(\alpha,\xi)\right)d\xi,\\ \tilde{v}(\alpha)=\int\limits_{\Omega}\sigma(\xi)\left(K_2(\alpha,\xi)+\rho K_1(\alpha,\xi)\right)d\xi;\end{cases} \quad (3.2)$$

де

$$K_1(\alpha,\xi)=-\frac{R}{4\pi G}\Bigg[-(\chi+1)\Bigg(\ln 2\sin\frac{|\alpha-\xi|}{2}(1-\gamma)\cos\xi-$$

$$-\frac{\alpha-\xi+\pi}{2}(1+\gamma)\sin\xi\Bigg)-\chi(1+\gamma)(\alpha-\xi+\pi)\cdot\sin\xi+$$

$$+\pi(\chi-1)(1+\gamma)K(\alpha-\xi)\sin\xi\Bigg];$$

$$K_2(\alpha,\xi)=-\frac{R}{4\pi G}\left[-(\chi+1)\left(\ln 2\sin\frac{|\alpha-\xi|}{2}(1+\gamma)\sin\xi+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha-\xi+\pi}{2}(1-\gamma)\cos\xi\right)+\chi(1-\gamma)(\alpha-\xi+\pi)\cos\xi-$$

$$\left.-\pi(\chi-1)(1-\gamma)K(\alpha-\xi)\cos\xi\right]. \qquad (3.3)$$

Тут K − функція, що введена в співвідношенні (2.17).

3.2. Контактна задача для нескінченної пластинки з круговим отвором

3.2.1. Умови контакту

Якщо покласти у (3.3) $\gamma=0$, то одержимо ядра для кругового отвору з радіусом R, для якого $g_1(\alpha)=R\cos\alpha$, $g_2(\alpha)=R\sin\alpha$.

Нехай рівняння кругового штампа радіуса r має вигляд

$$f(x,y)=(x-\varepsilon)^2+y^2-r^2, \qquad (3.4)$$

де $\varepsilon=R-r$ − величина зазору.

Знехтувавши величиною δ та врахувавши, що $\tilde{f}^*(\alpha)=\dfrac{\tilde{f}(\alpha)}{2R^2}$, $f_1^*(\alpha)=\dfrac{f_1(\alpha)}{2R}$, $f_2^*(\alpha)=\dfrac{f_2(\alpha)}{2R}$, $f_3^*(\alpha)=\dfrac{f_3(\alpha)}{2R}$, $\tilde{u}^*(\alpha)=\dfrac{\tilde{u}(\alpha)}{R}$, $\tilde{v}^*(\alpha)=\dfrac{\tilde{v}(\alpha)}{R}$, $\varepsilon^*=\dfrac{\varepsilon}{R}$ і $D_x^*=\dfrac{D_x}{R}$; одержимо умову у вигляді

$$\tilde{u}^*\cos\alpha+\tilde{v}^*\sin\alpha-\varepsilon^*\tilde{u}^*=-D_x^*\left(\cos\alpha-\varepsilon^*\right)+\theta\cdot\varepsilon^*\sin\alpha-$$

$$-\varepsilon^*(1-\cos\alpha). \qquad (3.5)$$

Після відповідних підстановок та перетворень звідси отримуємо інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_\Omega\sigma(\xi)G^1(\alpha-\xi)d\xi-\frac{\varepsilon^*}{\pi}\cdot\int_\Omega\sigma(\xi)G^2(\alpha,\xi)d\xi=$$

$$=-D_x^*\left(\cos\alpha-\varepsilon^*\right)+\theta\cdot\varepsilon^*\sin\alpha-\varepsilon^*(1-\cos\alpha), \qquad (3.6)$$

де $G^1(x) = -\frac{\chi+1}{4G}\ln 2\sin\frac{|x|}{2}(\cos x + \rho\sin x) + \frac{\chi-1}{8G}\left(\pi\left(1-K(x)\right)+\right.$

$\left.+x\right)(\sin x - \rho\cos x)$, $G^2(\alpha,\xi) = -\frac{\chi+1}{4G} + \left(\ln 2\sin\frac{|\alpha-\xi|}{2}(\cos\xi - \rho\sin\xi)+\right.$

$\left.+\frac{|\alpha-\xi|-\pi}{2}(\sin\xi + \rho\cos\xi)\right) + \left(-\frac{\chi}{4G}(\alpha-\xi+\pi) + K(\alpha-\xi)\times\right.$

$\left.\times\left(\frac{\chi+1}{4G}(\alpha-\xi-\pi) + \frac{\pi\chi}{2G}\right)\right)(\sin\xi + \rho\cos\xi)$.

Додаткові умови для знаходження невідомих D_x^* і θ будуть

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} \sigma(\xi)(\cos\xi - \rho\sin\xi)\,d\xi = -P_x^*, \\ \int\limits_{\Omega} \sigma(\xi)(\sin\xi + \rho\cos\xi)\,d\xi = -P_y^*; \end{cases} \tag{3.7}$$

де $P_x^* = \frac{P_x}{R}$, $P_y^* = \frac{P_y}{R}$.

З (3.6) випливає, що розв’язок залежить від величини $\frac{R-r}{R} = \varepsilon^*$.

У випадку, коли радіус штампа r близький до радіуса отвору R, тобто величина ε^* є малою величиною порядку пружних переміщень $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, D_x^* та кута повороту θ, рівняння (3.5) матиме вигляд, який введено у праці [67]

$$\tilde{u}\cos\alpha + \tilde{v}\sin\alpha = -D_x^*\cos\alpha - \varepsilon^*(1-\cos\alpha). \tag{3.8}$$

3.2.2. Побудова альтернативної системи інтегральних рівнянь і нерівностей задачі та числового алгоритму її розв’язання

Введемо в розгляд прогнозовану область D, яка вміщує в собі область контакту Ω, і вважатимемо в цій області для всіх $\xi \notin \Omega$ $\sigma(\xi) = 0$. Альтернативну систему інтегральних рівнянь та нерівностей типу (2.8) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \int\limits_D \sigma(\xi) J(\alpha,\xi) d\xi + D_x^* f_1^*(\alpha) - \theta f_3^*(\alpha) = F(\alpha), \ \sigma(\alpha) < 0, \\ \int\limits_D \sigma(\xi) J(\alpha,\xi) d\xi + D_x^* f_1^*(\alpha) - \theta f_3^*(\alpha) \le F(\alpha), \ \sigma(\alpha) = 0, \\ \int\limits_D \sigma(\xi)(\cos\xi - \rho\sin\xi) d\xi = -P_x^*, \\ \int\limits_D \sigma(\xi)(\sin\xi + \rho\cos\xi) d\xi = -P_y^*; \end{cases} \tag{3.9}$$

де $J(\alpha,\xi) = \dfrac{1}{\pi} G^1(\alpha-\xi) - \dfrac{\varepsilon^*}{\pi} G^2(\alpha,\xi)$, $F(\alpha) = -\tilde{f}^*(\alpha)$.

Далі побудуємо квадратурні формули вигляду (2.21) та (2.19) для інтегралів $I_1(\alpha) = \int\limits_\Omega \sigma(\xi) G^1(\alpha-\xi) d\xi$ та $I_2(\alpha) = \int\limits_\Omega \sigma(\xi) G^2(\alpha,\xi) d\xi$ та позначимо коефіцієнти цих квадратурних формул відповідно через $A_{\nu-n}^1$ і $A_{\nu,n}^2$.

Тоді дискретний аналог системи (3.9) набуде вигляду системи лінійних рівнянь та нерівностей

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{N+2} A_{\nu,n}\sigma_n = F_\nu, \ \sigma_\nu < 0, \\ \sum\limits_{n=0}^{N+2} A_{\nu,n}\sigma_n \le F_\nu, \ \sigma_\nu = 0, \\ \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda_n^1 \sigma_n = -P_x^*, \ \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda_n^2 \sigma_n = -P_y^*, \ \nu = \overline{0,N}; \end{cases} \tag{3.10}$$

де $A_{\nu,n} = \dfrac{1}{\pi} \cdot A_{\nu-n}^1 - \dfrac{\varepsilon^*}{\pi} \cdot A_{\nu,n}^2$, $\nu, n = \overline{0,N}$; $A_{\nu,N+1} = f_1^*(\alpha_\nu)$, $A_{\nu,N+2} = f_3^*(\alpha_\nu)$; $F_\nu = F(\alpha_\nu)$; $\lambda_n^1 = h(\cos(\alpha_n) - \rho\sin(\alpha_n))$, $\lambda_n^2 = h(\sin(\alpha_n) + \rho\cos(\alpha_n))$.

Тут позначено $\sigma_{N+1} = D_x^*$, $\sigma_{N+2} = \theta$ та для останніх двох інтегралів (3.9) використано формулу трапецій.

Використовуючи [31] систему лінійних рівнянь та нерівностей (3.10) зводимо до ЗКП, аналогічної до задачі (2.25)−(2.26).

3.2.3. Тестування числового алгоритму

Тестування алгоритму проведемо на основі розв'язку, одержаного в роботі В.В. Панасюка [59]. Отримане в цій праці інтегральне рівняння разом із додатковими умовами запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} \sigma^*(\xi) J_P(\alpha-\xi)\, d\xi = \dfrac{\varepsilon^* \alpha^2}{2} + C_1\alpha + C_2, \\ \int\limits_{\Omega} \sigma^*(\xi)(\cos\xi - \rho\sin\xi)\, d\xi = -P_x^*, \\ \int\limits_{\Omega} \sigma^*(\xi)(\sin\xi + \rho\cos\xi)\, d\xi = -P_y^*,\ R^2\rho\int\limits_{\Omega} \sigma^*(\xi)\, d\xi = M; \end{cases} \tag{3.11}$$

де $J_P(x) = \dfrac{\chi+1}{4\pi G}\left(\rho I(x) + \ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right| - \dfrac{x^2}{4}\right) + \dfrac{\chi-1}{4G}(x-\rho)K(x) +$

$$+\frac{\chi}{2\pi G\sqrt{P_x^{*2}+P_y^{*2}}}(\cos x + \rho\sin x),\ I(x) = \int\limits_0^x \ln\left|\sin\frac{\varsigma}{2}\right| d\varsigma .$$

У роботі [59] для задачі (3.11) при $\rho = 0$ побудовано аналітичний розв'язок

$$p^{**}(\alpha) = \frac{P_0}{\pi R}\left[\frac{\sqrt{a_0^2+1}-1}{a_0^2+1}\ln\left(\frac{\sqrt{a_0^2+1}-\varphi(\alpha)}{\sqrt{a_0^2+1}+\varphi(\alpha)}\right) + \frac{2\varphi(\alpha)}{\sqrt{a_0^2+1}\left(1+\xi^2\right)}\right] -$$

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{a_0^2+1}}\left(F + \frac{2\pi\varepsilon^* E}{(1+\chi)(1+\nu)}\right)\ln\left(\frac{\sqrt{a_0^2+1}-\varphi(\alpha)}{\sqrt{a_0^2+1}+\varphi(\alpha)}\right), \tag{3.12}$$

де $\varphi(\alpha) = \sqrt{a_0^2-\xi^2}$, $\xi = tg\dfrac{\alpha}{2}$, $a_0 = tg\dfrac{\alpha_0}{2}$, $-a_0 \le \xi \le a_0$; $F = P_1 - 2P_2$;

$P_0 = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$,

$$P_1 = \frac{2P_0 a_0^2}{\left(a_0^2+1\right)\left[2-\ln\left(a_0^2+1\right)\right]R} + \frac{2\pi\varepsilon^* E\ln\left(a_0^2+1\right)}{(1+\chi)(1+\nu)\left[2-\ln\left(a_0^2+1\right)\right]},$$

$$P_2 = -\frac{P_0\left(\sqrt{a_0^2+1}-1\right)\left[a_0^2+\sqrt{a_0^2+1}\left(2-\ln\left(a_0^2+1\right)\right)\right]}{\left(a_0^2+1\right)\left[2-\ln\left(a_0^2+1\right)\right]R} -$$

$$-\frac{2\pi\varepsilon^* E\left(\sqrt{a_0^2+1}-1\right)}{(1+\chi)(1+\nu)\left[2-\ln\left(a_0^2+1\right)\right]};$$

величина області контакту $2\alpha_0$ визначається з рівняння

$$\frac{2a_0^4+\ln\left(a_0^2+1\right)-2}{a_0^4+a_0^2} = \frac{4\pi R\varepsilon^* E\left(\sqrt{a_0^2+1}-1\right)}{(1+\chi)(1+\nu)P_0}.$$

Зазначимо, що задача (3.11), як і її аналітичний розв'язок (3.12), коректна лише тоді, коли $\varepsilon^* \to 0$. Апробуємо розроблену методику при $\rho = 0$, при різних значеннях головних векторів сил та величини ε^*.

Результати розрахунків контактних напружень при $\chi = 2$, $N = 301$, $D = [-42°, 42°]$, при $\rho = 0$ та при $Q_y = P_y / 2GR = 0$ наведено на рис. 3.2. Тут кривими (1-9) позначено результати розрахунків відносних контактних напружень $p^*(\alpha) = \sigma^*(\alpha) / 2G$ за-

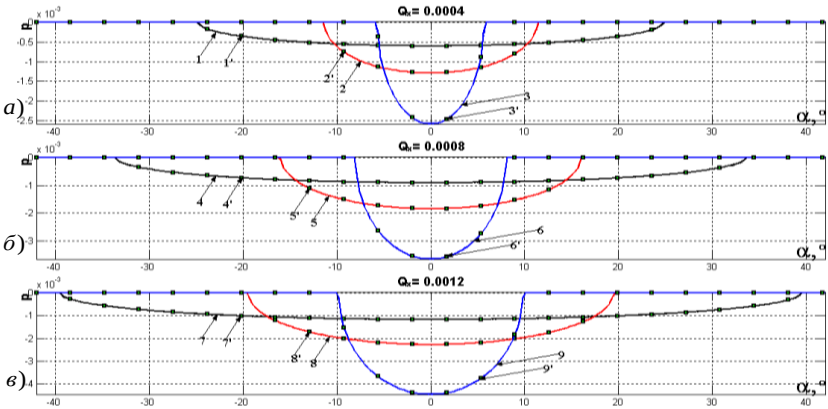


Рис. 3.2. Тестування задачі (3.11) при $\rho = 0$ та $Q_y = 0$

дачі (3.11), а квадратиками (1’-9’) − відповідні аналітичні розв’язки $p^{**}(\alpha)$, які обчислюються за формулою (3.12). На цьому рисунку розподілам контактних напружень (1-9) та (1’-9’) відповідають вказані значення головного вектора сили $Q_x = P_x / 2GR$. Кривим (1, 1’, 4, 4’, 7, 7’) відповідає значення величини $\varepsilon^* = 0.002$, кривим (2, 2’, 5, 5’, 8, 8’) − $\varepsilon^* = 0.01$, а кривим (3, 3’, 6, 6’, 9, 9’) − $\varepsilon^* = 0.04$.

З цього рисунку видно, що при відносно невеликій кількості точок розбиття та при $\varepsilon^* = 0.04$ аналітичні розв’язки (3.12) та розв’язки задачі (3.11), знайдені за допомогою побудованої методики практично збігаються. Далі для кожної з кривих (1-9) або (1’-9’) побудуємо залежності між інтегральною відносною похибкою, що обчислюється за формулою

$$\delta = \frac{\int\limits_D \left| p^*(x) - p^{**}(x) \right| dx}{\int\limits_D \left| p^{**}(x) \right| dx} \cdot 100\%, \qquad (2.28')$$

та кількістю точок розбиття N.

Результати розрахунків відносних інтегральних похибок за формулою (2.28’) для кривих (1-9) та (1’-9’) з рис. 3.2 наведено на рис. 3.3. Тут ламаним із ромбиками відповідає значення величини $\varepsilon^* = 0.002$, ламаним із кружечками − $\varepsilon^* = 0.01$, а ламаним із трикутниками − $\varepsilon^* = 0.04$.

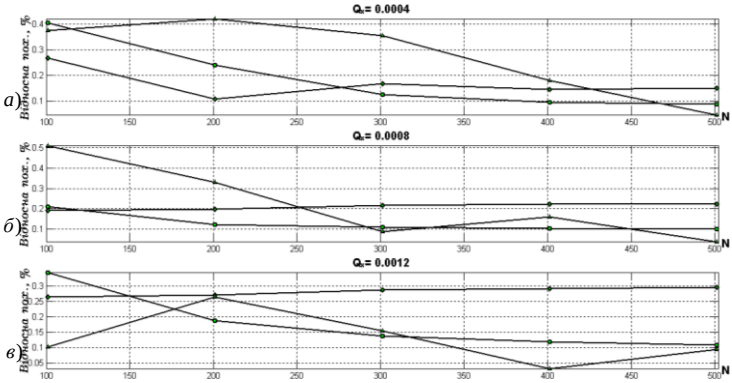


Рис. 3.3. Значення інтегральних відносних похибок між числовими та аналітичними розв’язками задачі (3.11)

Наведені графіки вказують на високу точність методики – виявилось, що $\delta << 1\%$.

Умови контакту (3.11) відрізняються від умов (3.6)–(3.7), що отримані у даній роботі. Покажемо, що при $\varepsilon^* \to 0$ отримані на основі рівнянь (3.6)–(3.7) та (3.11) результати практично збігаються. З цією метою виконано розрахунки для різних умов при $\varepsilon^* = 0.0001$.

Результати розрахунків контактних напружень при $\chi = 2$, $N = 301$, $D = [-115°, 145°]$, при різних значеннях величин (Q_x, Q_y) та ρ наведено на рис. 3.4. Кривим (1-3) відповідають результати розрахунків відносних контактних напружень p задачі (3.6)–(3.7), а квадратиками (1'-3') позначено відповідні розв'язки p^* для задачі (3.11). Тут кривим (1 та 1') відповідають значення коефіцієнта тертя $\rho = 0$, кривим (2 та 2') – $\rho = 0.4$, а кривим (3 та 3') – $\rho = 0.8$. Значення відповідних головних векторів сили вказано на рисунках.

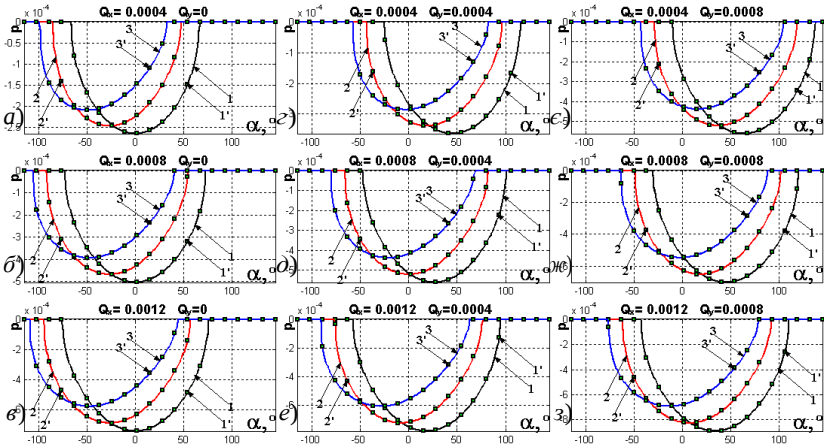


Рис. 3.4. Тестування задачі (3.6)–(3.7) при різних значеннях ρ

Як видно з цього рисунку, при відносно невеликій кількості точок розбиття розв'язки задач (3.6)–(3.7) та (3.11), знайдені за допомогою побудованої методики практично збігаються.

Результати розрахунків відносних інтегральних відхилень контактних напружень, знайдених за формулою (2.28) наведено на рис. 3.5. Тут ламаним із ромбиками відповідає значення коефіцієнта тертя $\rho = 0$, ламаним із кружечками − $\rho = 0.4$, а ламаним із трикутниками − $\rho = 0.8$.

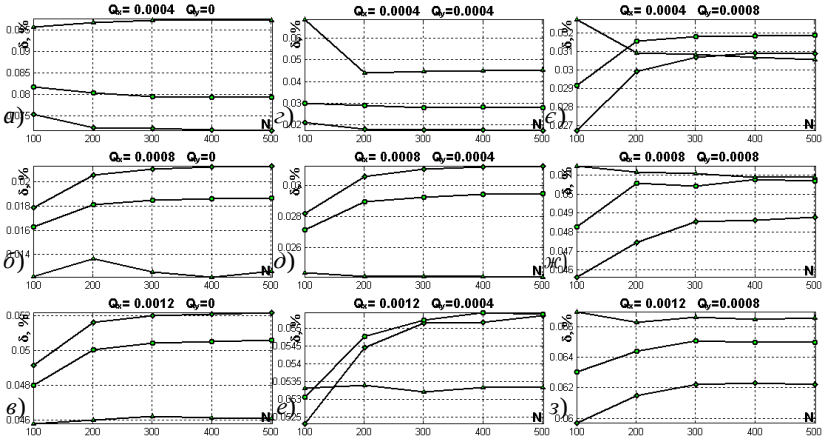


Рис. 3.5. Значення інтегральних відносних відхилень між числовими розв’язками задач (3.6)−(3.7) та (3.11)

Як видно з цього рисунку, що при $\varepsilon^* \to 0$ рівняння (3.6)−(3.7) та (3.11) приводять до практично однакових результатів.

3.2.4. Круговий штамп довільного радіуса в отворі, форма якого близька до кругової

Використаємо для дослідження контактних задач рівняння (3.6)−(3.7), які коректні для довільних значень $0 \le \varepsilon^* < 1$.

Розглянемо отвори, що мають близьку до кругової форму. Рівняння таких отворів у параметричній формі задамо у вигляді

$$g_1(\alpha) = \tilde{R}(\alpha)\cos\alpha\,,\ g_2(\alpha) = \tilde{R}(\alpha)\sin\alpha\,, \qquad (3.13)$$

де $\left|\tilde{R}(\alpha) - R\right| \to 0$.

Круговий штамп задамо рівнянням (3.4), величина зазору ε в якому шукається наступним чином. Спочатку знаходимо всі розв’язки рівняння

$$\min_{\alpha\in[-\pi,\pi]}\left|r^2+2\varepsilon r\cos\alpha+\varepsilon^2-\tilde{R}^2(\alpha)\right|=0\,. \qquad (3.14)$$

Серед множини знайдених розв'язків, шукаємо ті, для яких кут α мінімальний по абсолютній величині. У випадку, якщо таких розв'язків є декілька, то за ε вибираємо серед них мінімальне значення.

Інтегральне рівняння (3.1) після нехтування величиною δ та підстановки в нього співвідношень $\tilde{f}^*(\alpha)=\dfrac{\tilde{f}(\alpha)}{2\tilde{R}^2(\alpha)}$, $f_1^*(\alpha)=$ $=\dfrac{f_1(\alpha)}{2\tilde{R}(\alpha)}$, $f_2^*(\alpha)=\dfrac{f_2(\alpha)}{2\tilde{R}(\alpha)}$, $f_3^*(\alpha)=\dfrac{f_3(\alpha)}{2\tilde{R}(\alpha)}$, $\tilde{u}^*(\alpha)=\dfrac{\tilde{u}(\alpha)}{\tilde{R}(\alpha)}$, $\tilde{v}^*(\alpha)=\dfrac{\tilde{v}(\alpha)}{\tilde{R}(\alpha)}$ матиме вигляд

$$\tilde{u}^*\cos\alpha+\tilde{v}^*\sin\alpha-\frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)}\tilde{u}^*=-\frac{D_x}{\tilde{R}(\alpha)}\left(\cos\alpha-\frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)}\right)+$$

$$+\theta\cdot\frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)}\sin\alpha-\left(\frac{\tilde{R}^2(\alpha)+\varepsilon^2-R_x^2}{2\tilde{R}^2(\alpha)}-\frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)}\cos\alpha\right). \quad (3.5')$$

Перетворене рівняння, аналогічне до (3.6), для цієї постановки буде

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_\Omega\sigma(\xi)\hat{G}^1(\alpha,\xi)\,d\xi-\frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\int_\Omega\sigma(\xi)\hat{G}^2(\alpha,\xi)\,d\xi=$$

$$=-\frac{D_x}{\tilde{R}(\alpha)}\left(\cos\alpha-\frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)}\right)+\theta\cdot\frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)}\sin\alpha-$$

$$-\left(\frac{\tilde{R}^2(\alpha)+\varepsilon^2-R_x^2}{2\tilde{R}^2(\alpha)}-\frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)}\cos\alpha\right), \qquad (3.6')$$

де $\hat{G}^1(\alpha,\xi)=\dfrac{G^1(\alpha-\xi)}{\tilde{R}(\alpha)}$, $\hat{G}^2(\alpha,\xi)=\dfrac{G^2(\alpha,\xi)}{\tilde{R}^2(\alpha)}$.

Додаткові рівності для знаходження невідомих D_x^* і θ будуть

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} \sigma(\xi)(\cos\xi - \rho\sin\xi)\tilde{R}(\xi)\,d\xi = -P_x^*, \\ \int\limits_{\Omega} \sigma(\xi)(\sin\xi + \rho\cos\xi)\tilde{R}(\xi)\,d\xi = -P_y^*. \end{cases} \qquad (3.7')$$

Альтернативна система інтегральних рівнянь та нерівностей для задачі (3.6’)–(3.7’) матиме вигляд

$$\begin{cases} \int\limits_{D} \sigma(\xi) J(\alpha,\xi)\,d\xi + D_x^* f_1^*(\alpha) - \theta f_3^*(\alpha) = F(\alpha),\ \sigma(\alpha) < 0, \\ \int\limits_{D} \sigma(\xi) J(\alpha,\xi)\,d\xi + D_x^* f_1^*(\alpha) - \theta f_3^*(\alpha) \le F(\alpha),\ \sigma(\alpha) = 0, \\ \int\limits_{D} \sigma(\xi)(\cos\xi - \rho\sin\xi)\tilde{R}(\xi)\,d\xi = -P_x^*, \\ \int\limits_{D} \sigma(\xi)(\sin\xi + \rho\cos\xi)\tilde{R}(\xi)\,d\xi = -P_y^*; \end{cases} \qquad (3.9')$$

де

$$J(\alpha,\xi) = \frac{1}{\pi}\hat{G}^1(\alpha,\xi) - \frac{\varepsilon}{\pi}\hat{G}^2(\alpha,\xi),$$

$$F(\alpha) = -\left(\frac{\tilde{R}^2(\alpha) + \varepsilon^2 - R_x^2}{2\tilde{R}^2(\alpha)} - \frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)}\cos\alpha\right).$$

Далі побудуємо квадратурні формули (2.19) для інтегралів $I_j(\alpha) = \int\limits_{\Omega} \sigma(\xi)\hat{G}^j(\alpha,\xi)\,d\xi$, $j = \overline{1,2}$. Коефіцієнти квадратурних формул позначимо відповідно $A_{\nu,n}^j$, $j = \overline{1,2}$. Запишемо дискретний аналог системи (3.9’) у вигляді лінійних рівнянь та нерівностей (3.10), в якій заміняємо $A_{\nu,n} = \frac{1}{\pi}\cdot A_{\nu,n}^1 - \frac{\varepsilon}{\pi}\cdot A_{\nu,n}^2$, $\nu, n = \overline{0, N}$; $\lambda_n^1 = h(\cos(\alpha_n) - \rho\sin(\alpha_n))\tilde{R}(\alpha_n)$, $\lambda_n^2 = h(\sin(\alpha_n) + \rho\cos(\alpha_n))\tilde{R}(\alpha_n)$. За величини σ_{N+1} та σ_{N+2} тут прийнято відповідно D_x та θ.

Покладемо

$$\tilde{R}(\alpha)\big/R = 1 - 0.00012\cdot\cos(40\alpha). \qquad (3.15)$$

Схематично постановки задачі (3.6’)–(3.7’) при $R = 1$ зображено на рис. 3.6а та 3.6б.

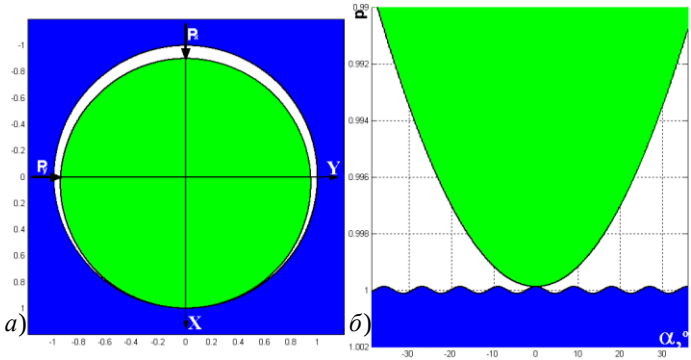


Рис. 3.6. Схематичне зображення постановки задачі (3.6’)–(3.7’)

Результати розрахунків контактних напружень при $\chi = 2$, $N = 376$, $D = [-39°, 36°]$, при різних значеннях величин (Q_x, Q_y) та ρ наведено на рис. 3.7. Тут кривими (1-3) позначено результати розрахунків відносних контактних напружень p задачі (3.6’)–(3.7’). На цьому рисунку кривим (1) відповідають значення коефіцієнта тертя $\rho = 0$, кривим (2) – $\rho = 0.3$, а кривим (3) – $\rho = 0.6$. Значення відповідних головних векторів сили вказано на рисунку.

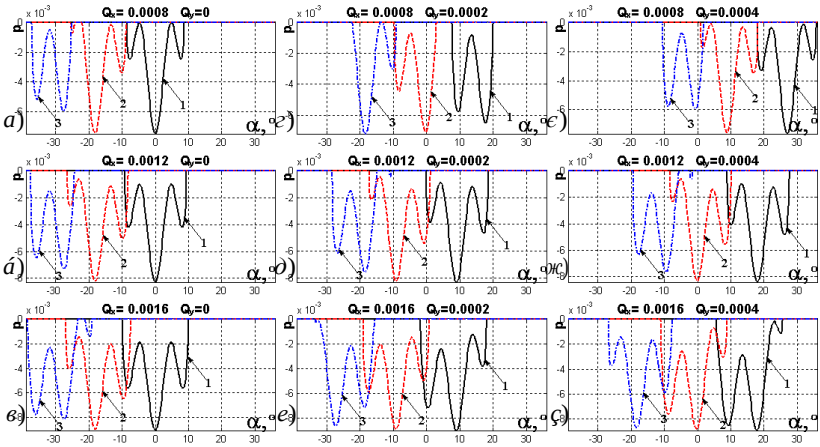


Рис. 3.7. Контактні напруження під круговим штампом при $r/R = 0.95$ на хвилястій поверхні кругового отвору

Як видно з цього рисунку, побудована методика в наведеному класі задач дозволяє автоматично визначати кількість і межі всіх ділянок контакту.

Покажемо, як при фіксованих значеннях величин (Q_x, Q_y) та ρ на гладкій та хвилястій поверхнях ведуть себе розподіли контактних напружень при різних значення відношення r/R. Нехай шорсткість поверхні кругового отвору задається рівнянням

$$\tilde{R}(\alpha)/R = 1 - 0.0001 \cdot \cos(100\alpha). \qquad (3.16)$$

Результати розрахунків контактних напружень при $\chi = 2$, $N = 361$, $D = [3°, 22.5°]$, $Q_x = 0.002$, $Q_y = 0.001$ та при $\rho = 0.25$ наведено на рис. 3.8. Тут кривими (1-3) на рис. 3.8а позначено результати розрахунків відносних контактних напружень на гладкій поверхні, тобто коли в задачі (3.6')–(3.7') $\tilde{R}(\alpha)/R = 1$; а кривими (1'-3') на рис. 3.8б − на шорсткій поверхні, тобто коли в задачі (3.6')–(3.7') хвилястість задається рівнянням (3.16). На цьому рисунку кривим (1 та 1') відповідає відношення $r/R = 0.9$, кривим (2 та 2') − $r/R = 0.8$, кривим (3 та 3') − $r/R = 0.7$.

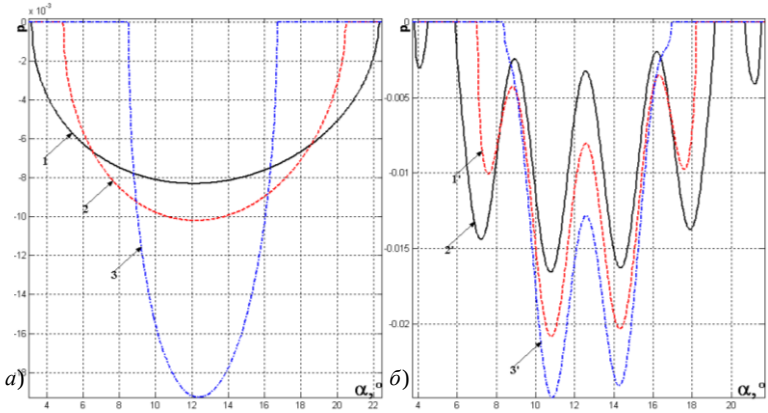


Рис. 3.8. Контактні напруження під круговим штампом при різних значеннях відношення r/R на гладкій та хвилястій поверхнях кругового отвору

З цього рисунку видно, що хвилястість поверхні отвору суттєво впливає на характер та розмір ділянок контакту.

3.2.5. Еліптичний штамп

Знайдемо розподіли контактних напружень під еліптичним штампом із півосями r_x та r_y, форма якого задається рівнянням

$$f\left(x,y\right)=\left(x-\varepsilon\right)^2+my^2-r_x^2, \qquad (3.17)$$

де $m=r_x^2/r_y^2$.

Після нехтування величиною δ умова (3.1) для гладкої поверхні кругового отвору буде мати вигляд

$$\tilde{u}^*\cos\alpha+\tilde{v}^*m\sin\alpha-\varepsilon^*\tilde{u}^*=-D_x^*\left(\cos\alpha-\varepsilon^*\right)+\theta\cdot\left(\frac{m-1}{2}\sin 2\alpha+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^*\sin\alpha\right)-\frac{m-1}{2}\sin^2\alpha-\varepsilon^*\left(1-\cos\alpha\right). \qquad (3.18)$$

Після відповідних підстановок та перетворень з умови (3.18) отримаємо рівняння

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_\Omega\sigma\left(\xi\right)G^1\left(\alpha-\xi\right)d\xi-\frac{\varepsilon^*}{\pi}\cdot\int_\Omega\sigma\left(\xi\right)G^2\left(\alpha,\xi\right)d\xi+$$

$$+\frac{m-1}{\pi}\cdot\int_\Omega\sigma\left(\xi\right)G^3\left(\alpha,\xi\right)d\xi=-D_x^*\left(\cos\alpha-\varepsilon^*\right)+$$

$$+\theta\cdot\left(\frac{m-1}{2}\sin 2\alpha+\varepsilon^*\sin\alpha\right)-\frac{m-1}{2}\sin^2\alpha-\varepsilon^*\left(1-\cos\alpha\right), \qquad (3.19)$$

де $G^3\left(\alpha,\xi\right)=\frac{\pi}{R}\left(K_2\left(\alpha,\xi\right)+\rho K_1\left(\alpha,\xi\right)\right)$; тут K_1 та K_2 – функції, що визначаються зі співвідношень (3.3) при $\gamma=0$.

Приймемо, що рівняння отвору у параметричній формі задається формулами (3.13). Тоді використовуючи позначення, введе-

ні в рівнянні (3.5’), одержимо для цієї постановки умову контакту у вигляді

$$\tilde{u}^* \cos\alpha + \tilde{v}^* m \sin\alpha - \frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)} \tilde{u}^* = -\frac{D_x}{\tilde{R}(\alpha)} \left(\cos\alpha - \frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)} \right) + \theta \times$$

$$\times \left(\frac{m-1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)} \sin\alpha \right) - \frac{m-1}{2} \sin^2\alpha -$$

$$- \left(\frac{\tilde{R}^2(\alpha) + \varepsilon^2 - R_x^2}{2\tilde{R}^2(\alpha)} - \frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)} \cos\alpha \right). \qquad (3.18')$$

Після перетворень відповідне рівняння матиме вигляд

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_\Omega \sigma(\xi) \hat{G}^1(\alpha,\xi) d\xi - \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot \int_\Omega \sigma(\xi) \hat{G}^2(\alpha,\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{m-1}{\pi} \cdot \int_\Omega \sigma(\xi) \hat{G}^3(\alpha,\xi) d\xi = -\frac{D_x}{\tilde{R}(\alpha)} \left(\cos\alpha - \frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)} \right) +$$

$$\theta \cdot \left(\frac{m-1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)} \sin\alpha \right) - \frac{m-1}{2} \sin^2\alpha -$$

$$- \left(\frac{\tilde{R}^2(\alpha) + \varepsilon^2 - R_x^2}{2\tilde{R}^2(\alpha)} - \frac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)} \cos\alpha \right), \qquad (3.19')$$

де $\hat{G}^3(\alpha,\xi) = \dfrac{G^3(\alpha,\xi)}{\tilde{R}(\alpha)}$.

Альтернативна система інтегральних рівнянь та нерівностей для задачі (3.19’)–(3.7’) матиме вигляд (3.9’), в якій $J(\alpha,\xi) = \dfrac{1}{\pi}\hat{G}^1(\alpha,\xi) - \dfrac{\varepsilon}{\pi}\hat{G}^2(\alpha,\xi) + \dfrac{m-1}{\pi}\hat{G}^3(\alpha,\xi)$, $F(\alpha) = -\dfrac{m-1}{2}\sin^2\alpha - \left(\dfrac{\tilde{R}^2(\alpha) + \varepsilon^2 - R_x^2}{2\tilde{R}^2(\alpha)} - \dfrac{\varepsilon}{\tilde{R}(\alpha)} \cos\alpha \right)$.

Побудуємо квадратурні формули (2.19) для інтегралів $I_j(\alpha)=\int\limits_{\Omega}\sigma(\xi)\hat{G}^j(\alpha,\xi)d\xi$, $j=\overline{1,3}$ та позначимо коефіцієнти квадратурних формул через відповідно $A^j_{\nu,n}$, $j=\overline{1,3}$. Запишемо дискретний аналог системи (3.9') у вигляді лінійних рівнянь та нерівностей вигляду (3.10), в якій

$$A_{\nu,n}=\frac{1}{\pi}\cdot A^1_{\nu,n}-\frac{\varepsilon}{\pi}\cdot A^2_{\nu,n}+\frac{m-1}{\pi}\cdot A^3_{\nu,n},\ \nu,n=\overline{0,N}.$$

Розрахунки виконані при $r/R=0.3$ (або $\varepsilon^*=0.7$), $m=0.25$, $Q_y=0$ та при різних значеннях Q_x та ρ.

На рис. 3.9а та 3.9б кривим (1-4) та (1'-4') відповідають розподіли контактних напружень відповідно при $Q^j_x=0.007\cdot j$, де $Q^j_x=P^j_x/2GR$.

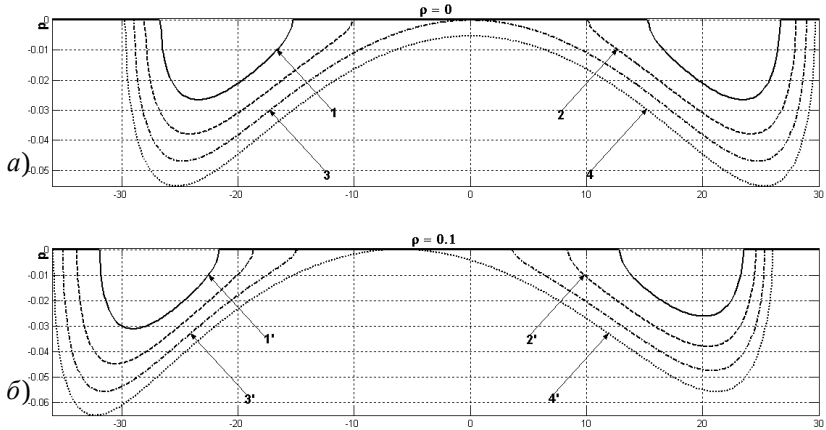


Рис. 3.9. Контактні напруження під еліптичним штампом при $\varepsilon^*=0.7$, $m=0.25$ та $Q_y=0$ на гладкій поверхні кругового отвору

Як видно з цього рисунку, при $\rho = 0$ та при навантаженнях, для яких $Q_x < 0.02$ у центральній частині штампа контакт відсутній. При більших навантаженнях має місце контакт всюди під штампом. При цьому максимальними будуть напруження ближче до країв області контакту. При збільшенні коефіцієнта тертя значення головного вектора сили Q_x, при якому область контакту стає суцільною також збільшується.

Розглянемо випадок хвилястості поверхні кругового отвору, яку описуватимемо рівнянням

$$\tilde{R}(\alpha)\Big/_{R} = 1 - 0.00004 \cdot \cos(80\alpha). \qquad (3.20)$$

На рис. 3.10б та 3.10в зображено схематично штамп та основу кругового отвору, коли кутову координату відкладено вздовж горизонтальної осі.

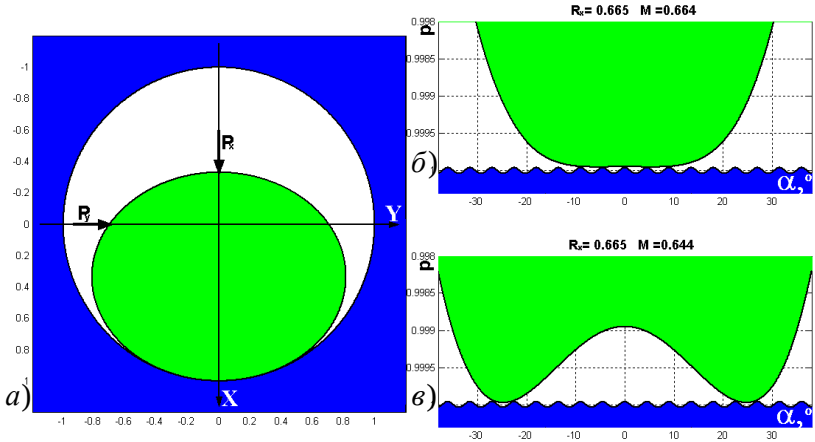


Рис. 3.10. Схематичне зображення еліптичного штампа та гладкого або хвилястого кругового отвору

Результати розрахунків контактних напружень при $\chi = 2$, $N = 319$, $D = [-34°, 19°]$, при $Q_y = 0$ та при різних значеннях величин Q_x та ρ наведено на рис. 3.11а і 3.11б. На рис 3.11в і 3.11г наведено розподіл відносних контактних напружень при

$Q_y = 0.0005$ (вибиралось $N = 331$, $D = [-21°, 34°]$). Кривими 1 і 2 відповідають результати розрахунків відносних контактних напружень p для гладкої поверхні, а кривим 1’ і 2’ − для хвилястої. На цьому рисунку непарним номерам кривих відповідають значення коефіцієнта тертя $\rho = 0$, а парним номерам − $\rho = 0.3$. Значення прийнятих відносних головних векторів сил, що прикладені до штампа, вказано на рисунку вверху.

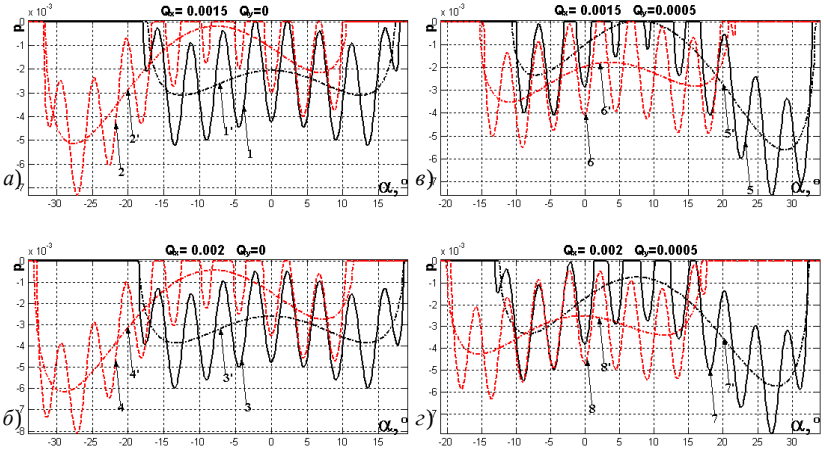


Рис. 3.11. Контактні напруження під еліптичним штампом при $r/R = 0.665$ і $m = 0.664$ на гладкій та хвилястій поверхнях кругового отвору

Із рисунків видно, що на хвилястих поверхнях контактні напруження коливаються біля відповідного розподілу контактних напружень для отвору із гладкою поверхнею.

Наведені на рисунках дані вказують на ефективність та простоту реалізації запропонованого підходу до дослідження контактних напружень для штампів і поверхонь складної форми. При чому кількість і межі всіх ділянок контакту тут визначаються автоматично.

Результати розрахунків контактних напружень при дії сили в напрямку осі *Ox* (в напрямку меншої півосі еліптичного штампа)

при $\chi = 2$, $N = 391$, $D = [-38°, 27°]$ та при різних значеннях головних векторів сил і коефіцієнта тертя наведено на рис. 3.12а та 3.12б. Розраховані відносні контактні напруження при дії додаткової сили на штамп у напрямку осі *Oy* наведено на рис. 3.12в та 3.12г.

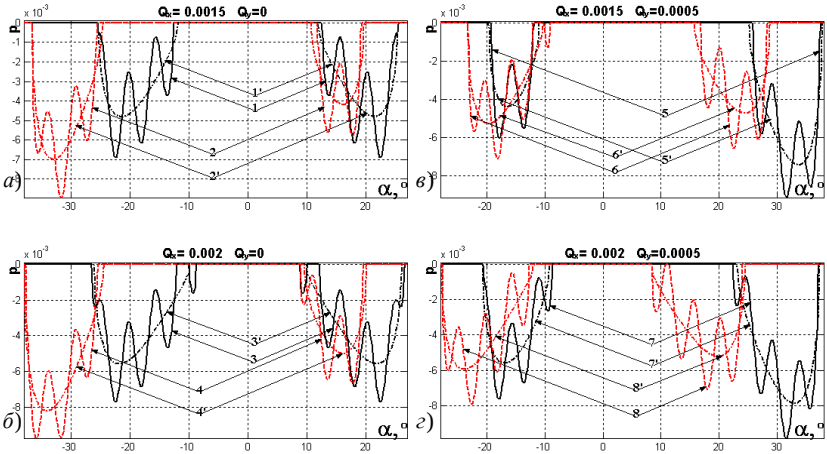


Рис. 3.12. Контактні напруження під еліптичним штампом при $r/R = 0.665$ і $m = 0.664$ на гладкій та хвилястій поверхнях кругового отвору

Із рисунків видно, що на хвилястих поверхнях контактні напруження коливаються біля відповідного розподілу контактних напружень для отвору із гладкою поверхнею.

3.2.6. Штамп складної форми

Розглянемо задачу про контактну взаємодію нескінченної пластинки з круговим отвором зі штампом складної форми, межу якого будемо описувати співвідношеннями

$$\tilde{f}(\alpha)=\begin{cases} R^2-2R\Big(\cos\varphi_0\left(\hat{a}\cos\alpha+\hat{b}\sin\alpha\right)+\sin\varphi_0\times \\ \times\left(\hat{a}\sin\alpha-\hat{b}\cos\alpha\right)\Big)+\hat{a}^2+\hat{b}^2-\hat{r}^2, \quad \gamma\le\dfrac{\hat{T}}{2}, \\ R^2-2R\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2-\hat{r}^2}+\hat{a}^2+\hat{b}^2-\hat{r}^2, \gamma>\dfrac{\hat{T}}{2}; \end{cases}$$

$$f_1(\alpha)=\begin{cases} 2R\cos\alpha-2\left(\hat{a}\cos\varphi_0-\hat{b}\sin\varphi_0\right), \ \gamma\le\dfrac{\hat{T}}{2}, \\ 2R\cos\alpha-2\cos\alpha\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2-\hat{r}^2}, \quad \gamma>\dfrac{\hat{T}}{2}; \end{cases}$$

$$f_2(\alpha)=\begin{cases} 2R\sin\alpha-2\left(\hat{a}\sin\varphi_0+\hat{b}\cos\varphi_0\right), \ \gamma\le\dfrac{\hat{T}}{2}, \\ 2R\sin\alpha-2\sin\alpha\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2-\hat{r}^2}, \quad \gamma>\dfrac{\hat{T}}{2}. \end{cases} \qquad (3.21)$$

де α_0 – початковий кут повороту штампа; $\hat{r}=r\cdot\delta$, $0<\delta\le 1$; $a=\left(R-r\right)\cos\alpha_0$, $\hat{a}=\left(R-\hat{r}\right)\cos\alpha_0$, $b=\operatorname{sgn}\alpha_0\sqrt{\left(R-r\right)^2-a^2}$, $\hat{b}=\operatorname{sgn}\alpha_0\sqrt{\left(R-\hat{r}\right)^2-\hat{a}^2}$; $T=2\arcsin\left(\dfrac{r}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $\hat{T}=2\times$ $\times\arcsin\left(\dfrac{\hat{r}}{\sqrt{\hat{a}^2+\hat{b}^2}}\right)$; $\varphi_0=\left[\dfrac{\alpha-\alpha_0+T/2}{T}\right]T$ ($\left[x\right]$ – ціла частина від x); $\gamma=\left|\alpha-\alpha_0-\varphi_0\right|$; $r=\dfrac{R}{1/\sin\left(\pi/\Lambda\right)+1}$; Λ – ціле число.

Інтегральне рівняння матиме досить громіздкий вигляд, тому його не наводимо.

На рис. 3.13а схематично зображені форма штампа та отвору до контактної взаємодії. Одержані при значеннях коефіцієнта тертя $\rho=0$ (криві 1-4) і $\rho=0.2$ (криві 1'-4') розподіли відносних контактних напружень наведено на рис. 3.13б і 3.13в. Тут кривим 1 і

1’ відповідає відносний вектор сили $Q_1 = 0.0045$, кривим 2 і 2’ − $Q_2 = 0.008$, кривим 3 і 3’ − $Q_3 = 0.01$, кривим 4 і 4’ − $Q_4 = 0.012$.

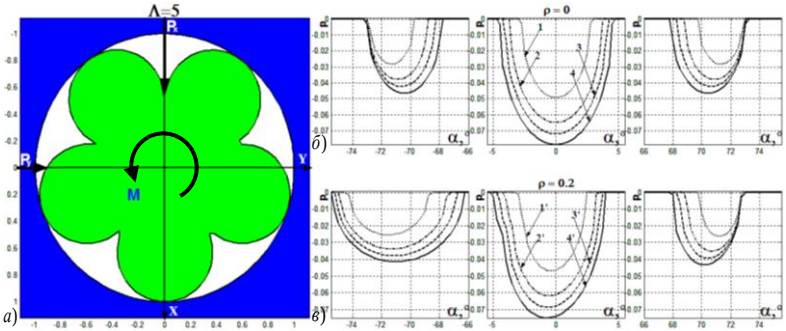


Рис. 3.13. Контактні напруження під штампом складної форми на межі кругового отвору

В усіх розглянутих випадках мали місце три ділянки контакту, максимальні контактні напруження досягались на центральній ділянці.

3.3. Контактна задача для нескінченної пластинки з еліптичним отвором

3.3.1. Умови контакту

Розглянемо пластинку із еліптичним отвором із півосями R_x та R_y, рівняння межі якого запишемо у вигляді

$$g(x, y) = x^2 + My^2 - R_x^2, \tag{3.22}$$

де $M = R_x^2 / R_y^2$.

Рівняння цього ж отвору у параметричному вигляді буде $g_1(\alpha) = R_x \cos\alpha$, $g_2(\alpha) = R_y \sin\alpha$.

Нехай на межу отвору діє еліптичний штамп, який задається рівнянням (3.17). Якщо еліптичний штамп вироджується в круговий ($m = 1$) із радіусом r, то величина ε (див. п. 3.2) визначається зі співвідношення

$$\varepsilon = R_x \sqrt{\left(1-\left(r/R_y\right)^2\right)\left(1-\left(R_y/R_x\right)^2\right)}.$$

У випадку, коли $m \neq 1$, величина ε знаходиться із системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} r_x \cos\alpha_0 + \varepsilon = R_x \cos\beta_0, \\ r_y \sin\alpha_0 = R_y \sin\beta_0, \\ \varepsilon = -r_x \cos\alpha_0 + \sqrt{R_x^2 \cos^2\beta_0 + R_y^2 \sin^2\beta_0 - r_y^2 \sin^2\alpha_0}; \end{cases}$$

де α_0 і β_0 − значення кутових параметрів, при яких відбувається дотик еліптичних штампа та отвору.

Поклавши у співвідношенні (1.20) $R = \dfrac{R_x + R_y}{2}$, аналогічно як і у випадку кругового отвору, одержимо умову контакту (3.1) у вигляді

$$\tilde{u}^*(1+\gamma)\cos\alpha + \tilde{v}^* m(1-\gamma)\sin\alpha - \varepsilon^*\tilde{u}^* = -D_x^*\left((1+\gamma)\cos\alpha - \varepsilon^*\right) +$$

$$+\theta\left(\frac{m-1}{2}\left(1-\gamma^2\right)\sin 2\alpha + \varepsilon^*(1-\gamma)\sin\alpha\right) - \frac{m(1-\gamma)^2 - (1+\gamma)^2}{2} \times$$

$$\times \sin^2\alpha - \left(\frac{(1+\gamma)^2 + \varepsilon^{*2} - r_x^{*2}}{2} - (1+\gamma)\varepsilon^*\cos\alpha\right), \quad (3.23)$$

де $r_x^* = \dfrac{r_x}{R}$.

Після відповідних підстановок та перетворень умова (3.24) буде

$$\frac{1}{\pi}\int_\Omega \sigma(\xi) G^1(\alpha,\xi)\, d\xi - \frac{\varepsilon^*}{\pi}\int_\Omega \sigma(\xi) G^2(\alpha,\xi)\, d\xi =$$

$$= -D_x^*\left((1+\gamma)\cos\alpha - \varepsilon^*\right) + \theta\left(\frac{m-1}{2}\left(1-\gamma^2\right)\sin 2\alpha + \varepsilon^*(1-\gamma)\sin\alpha\right) -$$

$$-\frac{m(1-\gamma)^2-(1+\gamma)^2}{2}\sin^2\alpha-\left(\frac{(1+\gamma)^2+\varepsilon^{*2}-r_x^{*2}}{2}-\right.$$

$$\left.-(1+\gamma)\varepsilon^*\cos\alpha\right), \qquad (3.24)$$

де $G^1(\alpha,\xi)=\frac{\pi}{R}\Big(\big(K_1(\alpha,\xi)-\rho K_2(\alpha,\xi)\big)(1+\gamma)\cos\alpha+\big(K_2(\alpha,\xi)+$

$+\rho K_1(\alpha,\xi)\big)m(1-\gamma)\sin\alpha\Big)$, $G^2(\alpha,\xi)=\frac{\pi}{R}\big(K_1(\alpha,\xi)-\rho K_2(\alpha,\xi)\big)$;

функції K_1 та K_2 − визначаються співвідношеннями (3.3).

Додаткові умови для знаходження невідомих D_x^* і θ будуть

$$\begin{cases}\int\limits_{\Omega}\sigma(\xi)\big((1-\gamma)\cos\xi-\rho(1+\gamma)\sin\xi\big)d\xi=-P_x^*,\\ \int\limits_{\Omega}\sigma(\xi)\big((1+\gamma)\sin\xi+\rho(1-\gamma)\cos\xi\big)d\xi=-P_y^*.\end{cases} \qquad (3.25)$$

3.3.2. Побудова числового алгоритму

Далі побудуємо відповідну альтернативну систему інтегральних рівнянь та нерівностей (2.8) для одного штампа. Вона матиме вигляд

$$\begin{cases}\int\limits_{D}\sigma(\xi)J(\alpha,\xi)d\xi+D_x^*f_1^*(\alpha)-\theta f_3^*(\alpha)=F(\alpha),\ \sigma(\alpha)<0,\\ \int\limits_{D}\sigma(\xi)J(\alpha,\xi)d\xi+D_x^*f_1^*(\alpha)-\theta f_3^*(\alpha)\le F(\alpha),\ \sigma(\alpha)=0,\\ \int\limits_{D}\sigma(\xi)\big((1-\gamma)\cos\xi-\rho(1+\gamma)\sin\xi\big)d\xi=-P_x^*,\\ \int\limits_{D}\sigma(\xi)\big((1+\gamma)\sin\xi+\rho(1-\gamma)\cos\xi\big)d\xi=-P_y^*;\end{cases} \qquad (3.26)$$

де $J(\alpha,\xi)=\frac{1}{\pi}G^1(\alpha,\xi)-\frac{\varepsilon^*}{\pi}G^2(\alpha,\xi)$, $F(\alpha)=-\tilde{f}^*(\alpha)$.

За допомогою квадратурних формул (2.19) зведемо цю систему до її дискретного аналогу (3.10), в якому

$$A_{\nu,n} = \frac{1}{\pi} \cdot A^1_{\nu,n} - \frac{\varepsilon^*}{\pi} \cdot A^2_{\nu,n}, \ \nu, n = \overline{0, N};$$

$$\lambda^1_n = h\left(\left(1-\gamma\right)\cos\left(\alpha_n\right) - \rho\left(1+\gamma\right)\sin\left(\alpha_n\right)\right),$$

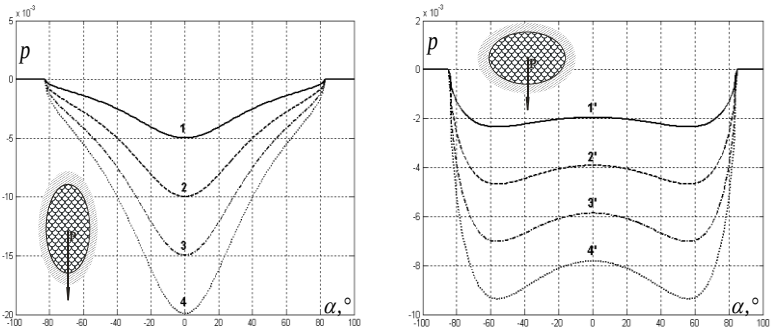
$$\lambda^2_n = h\left(\left(1-\gamma\right)\sin\left(\alpha_n\right) + \rho\left(1-\gamma\right)\cos\left(\alpha_n\right)\right).$$

Одержану систему лінійних рівнянь та нерівностей зведемо до відповідної ЗКП.

3.3.3. Розміри штампа та отвору однакові

Дослідимо контактні напруження при $\rho = 0$ та $Q_y = 0$ для випадку, коли розміри штампа співпадають із розмірами еліптичного отвору.

Результати розрахунків контактних напружень при $\chi = 2.2$, $N = 601$ і $D = \left[-100°, 100°\right]$ наведено на рис. 3.14. Кривим (1-4) відповідає сила, що діє в напрямку великої півосі, а кривим (1'-4') – в напрямку малої півосі. Тут кривим (1 і 1') відповідає відносний головний вектор сили $Q^1_x = 0.00625$, кривим (2 і 2') – $Q^2_x = 0.0125$, кривим (3 і 3') – $Q^3_x = 0.01875$, кривим (4 і 4') – $Q^4_x = 0.025$.



а) *Сила діє в напрямку великої півосі* *б*) *Сила діє в напрямку малої півосі*

Рис. 3.14. Контактні напруження під штампом еліптичної форми

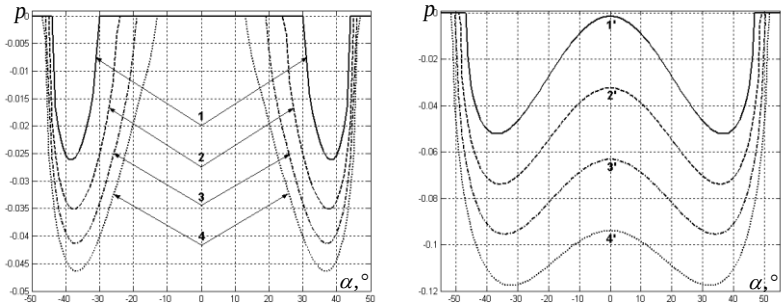
Як видно з рисунків, у випадку дії сили в напрямку великої півосі максимальні напруження досягаються в центрі області кон-

такту. При дії зусиль у напрямку малої півосі (рис. 3.14б) максимум у розподілі контактних напружень досягається в точках $\alpha = \pm 55°$, при цьому він при відповідних значеннях сили є більш ніж у *2* рази меншим, ніж на рис. 3.14а. Крім цього, у двох випадках спостерігається практично лінійна залежність між максимальними напруженнями і значеннями головного вектора сили. Область контакту у всіх розглянутих випадках співпадає і становить $\approx [-84°; 84°]$.

3.3.4. Круговий штамп

Дослідимо характер поведінки контактних напружень на поверхні еліптичного отвору під круговим штампом при $\rho = 0$ та $Q_y = 0$.

Результати розрахунків контактних напружень при $\chi = 2.2$, $N = 201$ і $D = [-55°, 55°]$ наведено на рис. 3.15. На рис 3.15а кривим (1-4) відповідають значення відносних головних векторів сили – $Q_x^j = 0.0075 \cdot j$, де $j = \overline{1,4}$, а кривим (1'-4') на рис 3.15б відповідають – $Q_x^j = 0.0375 \cdot j$, де $j = \overline{1,4}$.



а) *б*)

Рис. 3.15. Контактні напруження під штампом кругової форми

З наведених рисунків видно, що при невеликих навантаженнях мають місце дві області контакту. При більших навантаже-

ннях область контакту стає суцільною, при цьому максимальні напруження досягаються в симетрично розташованих точках відносно центру області контакту.

3.4. Контактна задача для нескінченної пластинки з отвором складної форми

3.4.1. Постановка задачі

Нехай нескінченна пружна пластинка послаблена криволінійним контуром довільної форми. Рівняння цього контуру задається функцією $g(x,y)=0$. Приймемо, що межа отвору знаходиться у контактній взаємодії зі штампом, форма якого описується рівнянням $f(x,y)=0$. Вважатимемо, що відомі прикладені до штампа сили, головні вектори та момент яких відповідно дорівнюють (P_x, P_y) і M (схематично нескінченне тіло з отвором і штамп до контактної взаємодії і після неї зображено відповідно на рис. 3.16а та 3.16б).

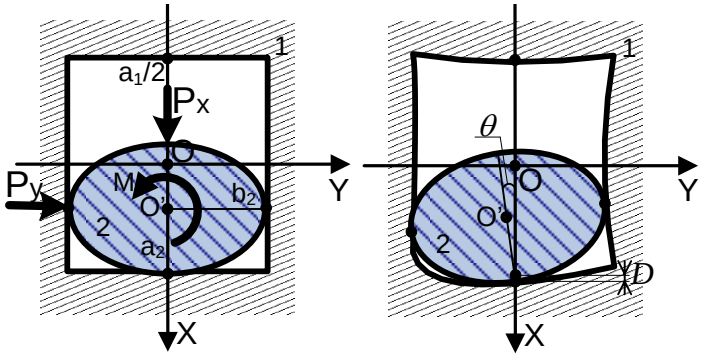


Рис. 3.16. Постановка задачі про штамп, що втискається в межу отвору довільної форми в нескінченній пружній пластинці

Для розв’язування задачі використаємо числово-аналітичний алгоритм, який ґрунтується на методах інтегральних рівнянь, механічних квадратур, конформного відображення та квадратичного програмування.

3.4.2. Умови контакту

Умови контакту (2.3) для заданої постановки перепишемо у вигляді

$$f_1(\alpha)\tilde{u}(\alpha)+f_2(\alpha)\tilde{v}(\alpha)=-\tilde{f}(\alpha)+D_x f_1(\alpha)+\delta(\alpha), \qquad (3.27)$$

де $\tilde{f}(\alpha)=f(g_1(\alpha),g_2(\alpha))$, $f_1(\alpha)=f'_x(g_1(\alpha),g_2(\alpha))$, $f_2(\alpha)=$ $=f'_y(g_1(\alpha),g_2(\alpha))$; $\tilde{u}(\alpha)=u(g_1(\alpha),g_2(\alpha))$, $\tilde{v}(\alpha)=v(g_1(\alpha),g_2(\alpha))$; $\delta(\alpha)=o(\tilde{u},\tilde{v})$ – додаткові члени, які мають другий порядок малості відносно переміщень. Тут рівняння межі отвору записано в параметричному вигляді $x=g_1(\alpha)$, $y=g_2(\alpha)$, $-\pi\le\alpha<\pi$.

3.4.3. Побудова інтегральних рівнянь

Для запису інтегральних рівнянь побудуємо розв’язок допоміжної задачі теорії пружності для даної пластинки, яка знаходиться під дією зосередженої сили (X,Y), прикладеної до межі отвору в точці t.

Позначимо потенціали Колосова-Мусхелішвілі для цієї задачі через $\varphi_1(z)$ і $\psi_1(z)$. Нехай площина з вирізаним кругом одиничного радіуса в площині ζ відображається на область, яку займає пластинка, функцією $z=\omega(\zeta)$, де $\omega(\zeta)=a\left(\zeta+{c_1}/{\zeta}+\right.$ $\left.+\ldots+{c_m}/{\zeta^m}\right)$. Тут $a, c_1, \ldots, c_m$ – задані комплексні коефіцієнти, $|\zeta|\ge 1$. В результаті відображення точці t в площині z буде відповідати точка γ в площині ζ, тобто $t=\omega(\gamma)$.

Використовуючи результати роботи [56], маємо

$$\varphi(\zeta)=U_0(\zeta)-S\left({1}/{\zeta}\right),$$

$$\psi(\zeta)=V_0(\zeta)+\overline{S}(\zeta)-\overline{\omega}\left({1}/{\zeta}\right)\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \qquad (3.28)$$

де $U_0(\zeta)=-\mathrm{Z}\left[(\chi+1)\ln(\zeta-\gamma)-\chi\ln\zeta\right]$, $V_0(\zeta)=\overline{\mathrm{Z}}\left[(\chi+1)\times\right.$ $\left.\times\ln(\zeta-\gamma)-\ln\zeta\right]$, $\mathrm{Z}=\dfrac{X+iY}{2\pi(1+\chi)}$; $S(\zeta)=S_1\zeta+S_2\zeta^2+...+S_{m-1}\zeta^{m-1}$, $S_1, S_2, ..., S_{m-1}$ – невідомі комплексні сталі, $\varphi(\zeta)=\varphi_1(\omega(\zeta))$, $\psi(\zeta)=\psi_1(\omega(\zeta))$, $\varphi'(\zeta)=d\varphi/d\zeta$.

Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що комплексні потенціали (3.28) мають задані особливості в точці γ (які відповідають зосередженій силі на межі отвору), враховують логарифмічні особливості для потенціалів при $\zeta\to\infty$ ($\varphi(\zeta)\sim$ $\sim-\mathrm{Z}\ln\zeta, \psi(\zeta)\sim\chi\overline{\mathrm{Z}}\ln\zeta$) та задовольняють умові відсутності напружень на межі отвору, тобто $\varphi(\sigma)+\dfrac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}=const$ при $|\sigma|=1$.

Для кругового отвору отримані формули (3.28) збігаються із наведеними в [56] потенціалами.

Виділимо у функції $\psi(\zeta)$ складові, які зростають на нескінченності. Для цього використаємо розклад в ряд Лорана [56]

$$\frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}=b_0+b_1\zeta+...+b_m\zeta^m+\frac{b_{-1}}{\zeta}+\frac{b_{-1}}{\zeta}... .$$

Звідси маємо

$$\frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}=w(\zeta)+B(\zeta), \tag{3.29}$$

де $B(\zeta)=b_0+b_1\zeta+...+b_m\zeta^m$, а $w(\zeta)\to 0$ при $\zeta\to\infty$.

Тоді, враховуючи співвідношення (3.29), з (3.28) випливає, що функцію $\psi(\zeta)$ можна подати у вигляді

$$\psi(\zeta)=\psi_A(\zeta)+\psi_B(\zeta),$$

де $\psi_A(\zeta)=V_0(\zeta)-w(\zeta)\varphi'(\zeta)+P(1+\chi)\dfrac{B(\gamma)}{\zeta-\gamma}$, $\psi_B(\zeta)=A(\zeta)+$

$+\overline{S}(\zeta)+B(\zeta)\left(S\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)\right)'$, $A(\zeta)=P\left[(1+\chi)\dfrac{B(\zeta)-B(\gamma)}{\zeta-\gamma}-\chi\dfrac{B(\zeta)}{\zeta}\right]$.

Тут $\psi_A(\zeta)$ – функція, яка не має додаткових особливостей на нескінченності, а функція $\psi_B(\zeta)$ містить поліноміально зростаючу функцію $A(\zeta)$.

Розкладемо функцію ψ_B в ряд Лорана. Вимагаючи, щоби коефіцієнти в цьому розкладі при додатних ступенях ζ були нульовими, отримуємо систему рівнянь для визначення сталих $S_1, S_2, ..., S_{m-1}$ [56]

$$-\overline{S_j}+b_{j+2}S_1^*+...+b_mS_{m-j-1}^*=PA_j,\ j=1, ..., m-1,$$

де A_j – коефіцієнти поліному $A(\zeta)=\sum_{j=0}^{m-1}A_j\zeta^j$. При цьому коефіцієнти A_j можна зобразити у вигляді

$$A_j=a_j-\chi b_{j+1},\ j\geq 1.$$

Тут a_j визначаються за рекурентними формулами $a_0=\dfrac{B(\gamma)-b_0}{\gamma}$,

$a_j=\dfrac{a_{j-1}-b_j}{\gamma}$, $j=1,...,m-2$; $a_{m-1}=b_m$.

Позначимо вектор контактних напружень через (X_n, Y_n). Тоді функція Мусхелішвілі φ_P для пластинки, що перебуває під дією штампа на основі (3.28), набуде вигляду

$$\varphi_P(\zeta)=-\frac{1}{2\pi}\left(\int_{M_n}(X_n+iY_n)\left[\ln(\gamma-\zeta)-\frac{\chi}{\chi+1}\ln\zeta\right]ds\right)+$$
$$+\int_{M_n}\varphi_\Delta(\zeta,\gamma,X_n,Y_n)\,ds, \qquad (3.30)$$

де $\varphi_\Delta = -C\left(1/\zeta\right)$; M_n – область контакту, ds – дугова координата.

Зазначимо, що φ_Δ лінійна функція відносно змінних X_n, Y_n. Враховуючи, що $\ln\left(\gamma-\zeta\right) = \ln 2\sin\frac{|\xi-\alpha|}{2} + i\frac{\alpha+\xi}{2} + \begin{cases}\pi i, & \xi<\alpha,\\ 0, & \xi\ge\alpha;\end{cases}$ формула (3.30) перепишеться

$$\varphi_P\left(\zeta\right) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{M_n}\left(X_n+iY_n\right)\ln\left(2\sin\frac{|\xi-\alpha|}{2}\right)ds + \frac{i\left(\chi-1\right)P\alpha}{4\pi\left(\chi+1\right)} -$$

$$-\frac{i}{2}\int\limits_0^s\left(X_n+iY_n\right)ds + \int\limits_{M_n}\varphi_\Delta\left(\zeta,\gamma,X_n,Y_n\right)ds,$$

де $e^{i\xi}=\gamma$, $e^{i\alpha}=\zeta$.

Для визначення переміщень граничних точок отвору у нескінченній пластинці використаємо формулу [56]

$$2G\left(u+iv\right) = \left(\chi+1\right)\varphi_P\left(\zeta\right) + i\int\limits_0^s\left(X_n+iY_n\right)ds.$$

Звідси отримаємо

$$2G\left(u+iv\right) = -\frac{\chi+1}{2\pi}\int\limits_{M_n}\left(X_n+iY_n\right)\ln\left(2\sin\frac{|\xi-\alpha|}{2}\right)ds +$$

$$+\frac{i\left(\chi-1\right)P\alpha}{4\pi} - i\frac{\chi-1}{2}\int\limits_0^s\left(X_n+iY_n\right)ds +$$

$$+\left(\chi+1\right)\int\limits_{M_n}\varphi_\Delta\left(\zeta,\gamma,X_n,Y_n\right)ds. \qquad (3.31)$$

Позначимо нормальні напруження під штампом через σ. Враховуючи, що $\left(X_n+iY_n\right)ds = i\sigma dt$ з (3.31), отримаємо співвідношення (1.21). Підставивши співвідношення (1.21) в умову (3.27), отримаємо інтегральне рівняння для знаходження $\sigma\left(\xi\right)$ у вигляді

$$\int\limits_\Omega\sigma\left(\xi\right)J\left(\alpha,\xi\right)d\xi + D_x f_1\left(\alpha\right) = -\tilde{f}\left(\alpha\right), \qquad (3.32)$$

де $J(\alpha,\xi)$, $f_1(\alpha)$ і $\tilde{f}(\alpha)$ – відомі функції (тут рівняння отвору задається параметрично у вигляді: $g_1(\alpha)=\mathrm{Re}(\omega(\zeta))$, $g_2(\alpha)=$ $=\mathrm{Im}(\omega(\zeta))$). Для знаходження невідомої D_x, що входить у рівняння (3.32), додатково використовуємо умову рівноваги штампа, яка запишеться у вигляді

$$\mathrm{Re}\left(-\int_{\Omega}\sigma(\xi)\gamma\omega'(\gamma)\,d\xi\right)=-P_x. \qquad (3.33)$$

3.4.4. Побудова числового алгоритму

Введемо в розгляд деяку область D, яка вміщує в собі область контакту Ω, і вважатимемо в цій області, що для всіх $\xi\notin\Omega$ $\sigma(\xi)=0$.

Альтернативна система інтегральних рівнянь та нерівностей (2.8) буде

$$\begin{cases}\int_D\sigma(\xi)J(\alpha,\xi)\,d\xi+D_x f_1(\alpha)=F(\alpha),\ \sigma(\alpha)<0,\\ \int_D\sigma(\xi)J(\alpha,\xi)\,d\xi+D_x f_1(\alpha)\le F(\alpha),\ \sigma(\alpha)=0,\\ \mathrm{Re}\left(-\int_D\sigma(\xi)\gamma\omega'(\gamma)\,d\xi\right)=-P_x.\end{cases} \qquad (3.34)$$

Використовуючи квадратурні формули (2.19), перепишемо альтернативну систему (3.34) у вигляді її дискретного аналогу

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{N+1}A_{\nu,n}\sigma_n=F_\nu,\ \sigma_\nu<0,\\ \sum_{n=1}^{N+1}A_{\nu,n}\sigma_n\le F_\nu,\ \sigma_\nu=0,\ \nu=\overline{0,N};\end{cases} \qquad (3.35)$$

де $A_{\nu,N+1}=f_1(\alpha_\nu)$; $F_\nu=-\tilde{f}(\alpha_\nu)$. Тут позначено $\sigma_{N+1}=D_x$.

Система (3.35) зводиться до ЗКП [34].

Область контакту за допомогою вищенаведеного алгоритму знаходиться безпосередньо – шляхом об'єднання ділянок, на яких знайдені напруження $\sigma_n < 0$.

3.4.5. Розрахунок контактних напружень для штампа еліптичної форми в квадратному отворі

Розглянемо пружну нескінченну пластинку з квадратним отвором із півстороною a, з центром в початку координат і сторонами, паралельними координатним осям. Знайдемо розподіли контактних напружень для випадку, коли штамп має еліптичну форму, тобто задається рівнянням (3.17).

Результати розрахунків контактних напружень на межі отвору в пластинці наведено на рис. 3.17. При розрахунках покладалося, що відображаюча функція $z = \omega(\zeta)$ містить *19* членів; $\chi = 2$, $N = 321$ і $Q_x = P_x / 2Ga = 0.001$. Розрахунки проведено при $N = 321$, $\rho = 0$, $Q_x = 0.001$, $Q_y = 0$. На рис. 3.17а j-м кривим відповідають значення $m^j = \left(j/19 \right)^2$ і $r_x^{*j} = r_x^j / a = 0.05j$.

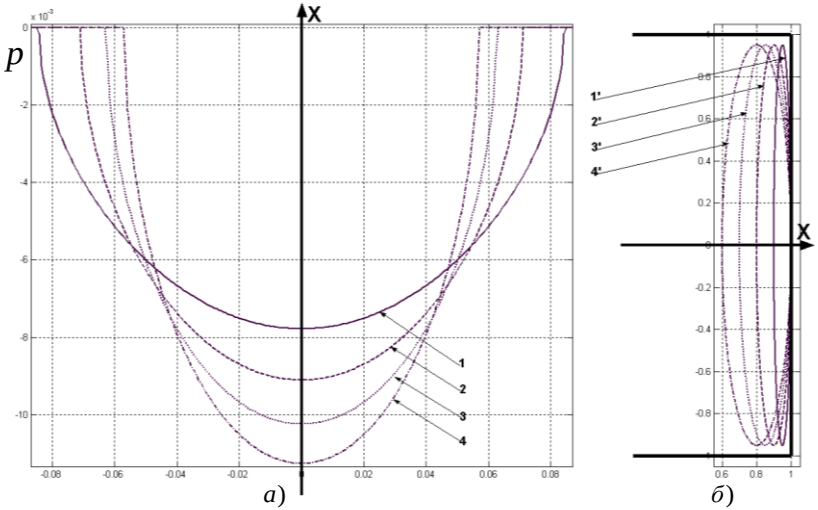


Рис. 3.17. Контактні напруження під еліптичним штампом на межі квадратного отвору

Як видно з цього рисунку, при однакових зусиллях максимальні контактні напруження практично лінійно залежать від довжини півосі r_x^*, а величина області контакту при цьому змінюється нелінійно.

3.4.6. Розрахунок контактних напружень для круглого штампа в квадратному отворі

Нехай в (3.17) $r_x = r_y = a$, $\varepsilon = 0$, тобто в квадратний отвір втискається штамп кругової форми, діаметр якого рівний стороні квадрату. Кількість членів відображаючої функції, пружні характеристики та кількість вузлових точок беруться такими ж, як і в попередньому прикладі.

Результати розрахунків контактних напружень на межі отвору в пластинці наведено на рис. 3.18. Кривим (1-4) на рис. 3.18а та кривим (1’-4’) на рис. 3.18б відповідають значення головного вектора сил $Q_x^j = 0.0005j$. Тут кривими (1-4) зображено контактні напруження на стороні $x = a$, а кривими (1’-4’) зображено кон-

тактні напруження на бічній стороні $y = a$ (на іншій бічній стороні розподіл контактних напружень симетричний).

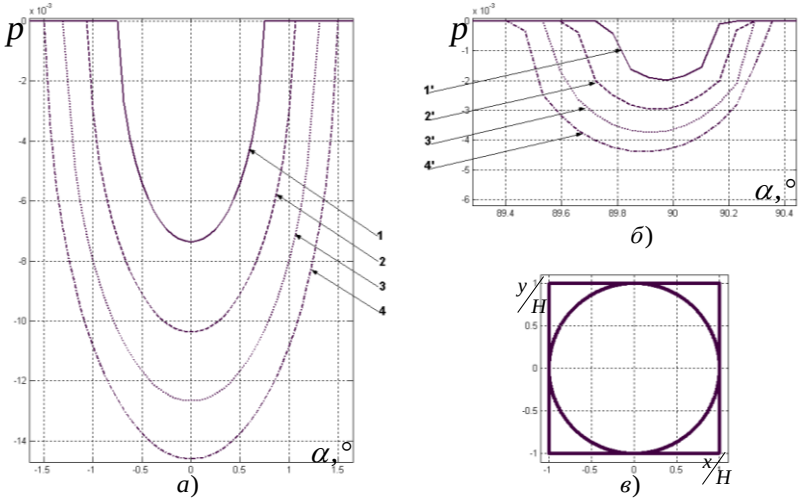


Рис. 3.18. Контактні напруження під круговим штампом на межі квадратного отвору

Як видно з цього рисунку, область контакту складається з трьох ділянок: однієї центральної та двох бічних, причому максимальні значення напружень на них зміщуються в напрямку дії штампа. Зазначимо, що при розглянутих значеннях головного вектора сил Q_x відношення максимальних тисків у центральній області контакту та на бічних ділянках є практично сталою величиною, близькою до *3,5*.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров А. И. О единственности решения задачи контактного взаимодействия упругих тел при наличии кулонова трения // Вісник Дніпропетровського університету. Серія : Механіка. – Дніпропетровськ : В-во ДНУ, 2009. – Вип. 13, т. 2, № 5. – С. 3−11.
2. Александров В. М. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости / В. М. Александров, М. И. Чебаков. – М. : Физматлит, 2004. – 304 с.
3. Александров В. М. Введение в механику контактных взаимодействий / В. М. Александров, М. И. Чебаков. – Ростов-на-Дону : Изд-во ООО„ЦВВР”, 2007. – 114 с.
4. Александров В. М. Контактные задачи в машиностроении / В. М. Александров, Б. Л. Ромалис. – М. : Машиностроение, 1986. – 176 с.
5. Аргатов И. И. Основы теории упругого дискретного контакта / И. И. Аргатов, Н. Н. Дмитриев. – СПб. : Политехника, 2003. – 234 с.
6. Бобылев А. А. Об одном варианте численной реализации вариационного принципа Геррманна / А. А. Бобылев, А. В. Манзюк // Вісник Дніпропетровського університету. Серія : Механіка. – Дніпропетровськ : В-во ДНУ, 2007. –Вип. 11, т. 2, № 2/2. – С. 3−10.
7. Божидарнік В. В. Контактна взаємодія штампа довільної форми та пластинки з еліптичним отвором / В. В. Божидарнік, А. Ю. Коцюба, О. В. Максимович // Вісник Дніпропетровського університету. Серія : Механіка. – Дніпропетровськ : В-во ДНУ, 2007. – Вип. 11, т. 2, № 2/2. – С. 29−34.
8. Галанов Б. А. Об учёте в задаче Герца тангенциальных смещений на поверхности контакта / Б. А. Галанов, Ю. М. Кривонос // Вычислительная и прикладная математика. – 1984. – Вып. 53. – С. 87−94.
9. Галанов Б. А. Постановка и решение некоторых уточнённых задач упругого контакта двух тел // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 6. – С. 56−63.
10. Галанов Б. А. Численное определение зон нарушения совместности деформаций в некоторых контактных задачах теории упругости и решение этих задач в уточненной постановке // До-

клады АН Укр. ССР. Серия А : Физико-математические и технические науки. – 1982. – № 7. – С. 36–40.

11. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1980. – 303 с.

12. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1977. – 640 с.

13. Гембара В. М. Пружна рівновага смуги, навантаженої штампом і зосередженими силами / В. М. Гембара, Я. В. Максимович, В. І. Шваб'юк // Наукові записки Української академії друкарства : Зб. наук. праць. – 1999. – № 1. – С. 129–133.

14. Горячева И. Г. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании / И. Г. Горячева, Н. И. Маланчук, Р. М. Мартыняк // Прикладная математика и механика (Москва). – 2012. – Т. 76, № 5. – С. 695–709.

15. Горячева И. Г. Контактные задачи в трибологии / И. Г. Горячева, М. Н. Добычин. – М. : Машиностроение, 1988. – 253 с.

16. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М. : Наука, 2001. – 478 с.

17. Григолюк Э. И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев. – М. : Машиностроение, 1980. – 416 с.

18. Гриліцький Д. В. До задачі про тиск жорсткої шайби на коловий отвір в ортотропній пластинці // Прикладная механика. – 1973. – Т. 9, № 3. – С. 307–313.

19. Гриліцький Д. В. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов : [навч. посіб.] / Д. В. Гриліцький, Р. М. Луцишин. – Львів : Вища школа. В-во при ЛДУ, 1975. – 114 с.

20. Гриліцький Д. В. Плоскі контактні задачі термопружності : [навч. посіб.] / Д. В. Гриліцький, Б. І. Попович. – Львів : Вища школа. В-во при ЛДУ, 1973. – 115 с.

21. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 510 с.

22. Доборджгинидзе Л. Г. Плоская контактная задача для криволинейного отверстия // Научные труды Грузинского политехнического института : Сб. науч. трудов. – 1982. – № 2 (247). – С. 73–79.

23. Дробязко В. В. Периодическая контактная задача с трением на упругой полосе / В. В. Дробязко, В. Н. Никитенко, А. Ф. Улит-

ко // Известия АН Арм. ССР. Механика. – 1978. – Т. 31, № 1. – С. 30−39.

24. Дюво Ж. Неравенства в механике и физике / Ж. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М. : Наука, 1980. – 384 с.

25. Кагадий Т. С. Контактная задача для упругой ортотропной полуполосы / Т. С. Кагадий, А. В. Павленко // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 10. – С. 75−84.

26. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М. : Наука, 1973. – 304 с.

27. Кіт Г. Вплив сил тертя на параметри термічного і дифузійного контакту пружних тіл з регулярним рельєфом / Г. Кіт, А. Криштафович, І. Мачишин // Машинознавство. – Львів, 2000. – № 3 – С. 3−8.

28. Коблик С. Г. Контактная задача для ортотропной полосы при наличии в области контакта участков сцепления и скольжения / С. Г. Коблик, Л. И. Маневич // Гидродинамика и теория упругости. – Днепропетровск : Изд-во ДГУ, 1976. – Вып. 20. – С. 106−110.

29. Колтунов М. А. Прикладная механика деформируемого твердого тела : [учеб. пособ.] / М. А. Колтунов, А. С. Кравчук, В. П. Майборода. – М. : Высшая школа, 1983. – 394 с. : ил.

30. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А. С. Космодамианский. – К. : Вища школа, 1976. – 202 с.

31. Коцюба А. Ю. Визначення напружень та областей контакту у смузі під штампом довільної форми // Наукові нотатки : Міжвузівський збірник (за напрямом “Інженерна механіка”). – Луцьк, 2006. – Вип. 18. – С. 216−223.

32. Коцюба А. Ю. Вплив сил тертя на контактні напруження при взаємодії штампа складної форми та нескінченної пластинки з отвором // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача : Тези доповідей. − Львів, 2009. − С. 84−85.

33. Коцюба А. Ю. Комп’ютерне моделювання контактної взаємодії жорсткого штампа складної форми півплощини з урахуванням сил тертя / А. Ю. Коцюба, С. В. Лавренчук // Наукові нотатки : Міжвузівський збірник (за галузями знань “Машинобудування та металообробка”, “Інженерна механіка”, “Металургія та матеріалознавство”). – Луцьк, 2010. – Вип. 27. – С. 151−159.

34. Коцюба А. Ю. Контактна взаємодія жорсткого штампа та пластинки з отвором довільної форми / А. Ю. Коцюба, О. В. Максимович // Вісник Дніпропетровського університету. Серія : Механіка. – Дніпропетровськ : В-во ДНУ, 2009 – Вип. 13, т. 2, № 5. – С. 74−82.

35. Коцюба А. Ю. Контактна взаємодія жорсткого штампа та пластинки з отвором довільної форми / А. Ю. Коцюба, О. В. Максимович // Матеріали конференції “Сучасні проблеми механіки та математики” : В 3-х т. – Львів, 2008. – Т. 2. – С. 51−53.

36. Коцюба А. Ю. Контактна взаємодія жорсткого штампа складної форми та пружної півплощини з урахуванням сил тертя / А. Ю. Коцюба, С. В. Лавренчук // Наукові нотатки : Міжвузівський збірник (за напрямом “Інженерна механіка”). – Луцьк, 2009. – Вип. 25, ч. І. – С. 191−195.

37. Коцюба А. Ю. Контактна задача теорії пружності з невідомими межами контакту // Матеріали міжнародної наукової конференції “Математичні проблеми технічної механіки – 2006”. – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2006. – С. 132−134.

38. Коцюба А. Ю. Плоскі контактні задачі теорії пружності для тіл складної форми за незаданих ділянок їхньої взаємодії // Прикладні проблеми механіки і математики : Зб. наук. праць. – Львів, 2010. – Вип. 8. – С. 7−13.

39. Коцюба А. Ю. Про обґрунтування чисельного алгоритму розв’язування змішаних задач теорії пружності / А. Ю. Коцюба, О. В. Максимович // Тези XXII-ої науково-технічної конференції професорсько-викладацького складу (технічний напрямок). − Луцьк, 2007. – С. 75−77.

40. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А. С. Кравчук. – М. : МГАПИ, 1997. – 340 с.

41. Криштафович А. А. Контактное взаимодействие анизотропной полуплоскости и жесткого тела с периодическим микрорельефом поверхности / А. А. Криштафович, Р. М. Мартыняк, Р. Н. Швец // Трение и износ. – Минск, 1994. – Т. 15, № 3. – С. 366−373.

42. Криштафович А. А. Фрикционный контакт двух упругих полуплоскостей с волнистыми поверхностями / А. А. Криштафович, Р. М. Мартыняк // Трение и износ. – Минск, 2000. – Т. 21, № 5. – С. 465−473.

43. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М. : Наука, 1977. – 416 с.

44. Линьков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А. М. Линьков. – СПб. : Наука, 1999. – 382 с. : ил.

45. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И. К. Лифанов. – М. : ТОО «Янус», 1995. – 520 с.

46. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 492 с.

47. Максимович В. М. Контактна задача про тиск жорсткого штампа довільного радіуса на границю кругового отвору / В. М. Максимович, А. Ю. Коцюба // Наукові нотатки : Міжвузівський збірник (за напрямом "Інженерна механіка"). – Луцьк, 2007. – Вип. 19. – С. 172−177.

48. Максимович В. М. Числовий алгоритм визначення контактних напружень під штампом складної форми для пластини з круговим отвором / В. М. Максимович, А. Ю. Коцюба // 8-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові (23-25 травня 2007р.) : Тези доповідей. – Секція 3. Моделювання механічних систем. – Львів : Національний університет "Львівська політехніка", 2007. – С. 66−67.

49. Максимович В. М. Числовий алгоритм визначення контактних напружень під штампом складної форми для пластини з круговим отвором / В. М. Максимович, А. Ю. Коцюба // Машинознавство. – Львів, 2007. – № 10 (124) – С. 10−15.

50. Мартыняк Р. М. Термоупругость контактной пары при наличии шероховатости на локальном участке сопряженных поверхностей / Р. М. Мартыняк, К. А. Чумак // Теоретическая и прикладная механика : Сб. науч. трудов. – 2009. – Вып. 45. – С. 32−38.

51. Мартынович Т. Л. Контактные задачи для анизотропных сред с эллиптическими границами / Т. Л. Мартынович, А. А. Сяський, С. П. Демчик. – Ровно, 1989. – 16 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 12.03.1990, № 463 – Ук90.

52. Механика в СССР за 50 лет. В четырех томах / Под ред. Л. И. Седова [и др.]. – М. : Физматлит, 1972. – Т. III – 480 с.

53. Механика контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – М. : Физматлит, 2001. – 670 с.

54. Морарь Г. А. К решению задачи о давлении жесткой шайбы на контур кругового отверстия в ортотропной пластине // Прикладная механика. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 56–62.

55. Моссаковский В. И. Контактные задачи математической теории упругости / В. И. Моссаковский, Н. Е. Качаловская, С. С. Голикова. – К. : Наукова думка, 1985. – 176 с.

56. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.

57. Мусхелишвили Н.И. Решение основной смешанной задачи теории упругости для полуплоскости / Н. И. Мусхелишвили. – Доклады АН СССР. – 1935. – Т. VIII, № 2. – С. 51–54.

58. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1968. – 512 с.

59. Панасюк В. В. Деякі контактні задачі теорії пружності / В. В. Панасюк, М. Й. Теплий. – К. : Наукова думка, 1975. – 195 с.

60. Панасюк В. В. Контактная задача для кругового отверстия / В. В. Панасюк // Вопросы машиноведения и прочности в машиностроении : Сб. науч. трудов. – К. : АН Укр. ССР, 1954. – Вып. 2, Т. III. – С. 59–79.

61. Панасюк В. В. Контактные давления в цилиндрических телах, контуры сечений которых близки к окружности / В. В. Панасюк, А. Е. Андрейкив, М. В. Чернец // Доклады АН Укр. ССР. Серия А : Физико-математические и технические науки. – 1981. – № 5. – С. 57–61.

62. Развитие контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. – М. : Наука, 1976. – 496 с.

63. Рвачев В. Л. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей / В. Л. Рвачев, В. С. Проценко. – К. : Наукова думка, 1977. – 236 с.

64. Решение вариационных неравенств в механике / И. Главачек [та ін.]; пер. со словацкого Ю. А. Кузнецова, А. В. Лапина; под ред. Н. С. Бахвалова. – М. : Мир, 1986. – 270 с. : ил.

65. Рибка В. М. Аналітичний аспект векторної задачі лінійного спряження (на прикладі контактної задачі) // Вісник Дніпропетровського університету. Серія : Механіка. – Дніпропетровськ : В-во ДНУ, 2007. –Вип. 11, т. 2, № 2/2. – С. 221–228.

66. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К. : Гостехиздат, 1951. – 282 с.

67. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К. : Наукова думка, 1968. – 888 с.

68. Саврук М. П. Побудова розв'язку типу Гріна задачі теорії пружності для смуги / М. П. Саврук, Я. В. Максимович // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 17−21.

69. Современные проблемы механики контактных взаимодействий / Под ред. В. М. Александрова [и др.]. – Днепропетровск, 1990. – 124 с.

70. Солдатенков И. А. Асимптотический анализ решения задачи теории упругости для полосы переменной толщины // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1994. – Т. 29, № 6. – С. 57−73.

71. Солдатенков И. А. Задача об изнашивании полуплоскости дисковым контртелом // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 6. – С. 107−110.

72. Сяський А. О. Контакт жорсткого диска з кутовими точками і трикутного отвору нескінченної ізотропної пластинки / А. О. Сяський, С. М. Комбель // Наукові нотатки : Міжвузівський збірник (за напрямом "Інженерна механіка"). – Луцьк, 2003. – Вип. 12. – С. 253−260.

73. Сяський А. О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на еліптичний отвір в ортотропній пластинці // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика : Зб. наук. праць. – Рівне : РВВ РДГУ, 1997. – № 4. – С. 153−156.

74. Теплый М. И. Контактные задачи для областей с круговыми границами / М. И. Теплый. – Львов : Вища школа, 1983. – 176 с.

75. Теплый М. И. Обобщенная контактная задача для пластин с круговым отверстием // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1986. – Т. 22, № 2. – С. 51−57.

76. Улитко А. Ф. Исследование контактных напряжений в тонкой упругой полосе при изгибе / А. Ф. Улитко, М. А. Моргунов // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т. 49, № 1. – С. 31−37.

77. Хусу А. П. Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход) / А. П. Хусу, Ю. Р. Виттенберг, В. А. Пальмов. – М. : Наука, 1975. – 344 с. : ил.

78. Чернець М. В. Про особливості обертового контакту в циліндричному з'єднанні з малою еліптичністю контурів / М. В. Чернець, Н. М. Лєбєдєва // Машинознавство. – 2005. – № 3. – С. 33−36.

79. Швець Р. М. Неповний механічний контакт двох пружних півплощин із ортотропних матеріалів / Р. М. Швець, Р. М. Мартиняк, А. А. Криштафович // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1990. – Т. 26, № 3. – С. 65−69.

80. Штаерман И. Я. Контактна задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – М. : Гостехиздат, 1949. – 270 с.

81. Barber J. R. Elasticity (Second Edition) / J. R. Barber. – Solid mechanics and its applications. – Kluwer academic publishers. – New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2004. – Vol. 107. – 412 p.

82. Bathe K. J. A solution method for planar and axisymmetric contact problems / K. J. Bathe, A. B. Chaudhary // International Journal for Numerical Methods in Engineering. –1985. – Vol. 21. – P. 65−88.

83. Brown F. H. The diffusion of load from a stiffener into an infinite elastic sheet // Proceedings of the Royal Society. Series A. – 1957. – Vol. 239, № 1218. – P. 296−310.

84. Fabricant V. On the approximate solution of singular integral equations / V. Fabricant, S. V. Hoa, T. S. Sankar // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1981. – Vol. 29, № l. – P. 19−33.

85. Muki R. On the diffusion of load from a transverse tension bar into a semi-infinite elastic sheet // Transactions of the ASME. – 1968. – Vol. 35, № 4. – P. 737−746.

86. Murray W. Seqential quadratic programming methods for large scale problems // COAP –1997. – Vol. 7. – P. 127−142.

87. Paczelt J. Solution of elastic contact problems by the finite element displacement method // Acta Technica. Academiae Scientiarum Hungaricae. – 1976. – Vol. 82, № 3/4. – P. 353−375.

88. Pauk W Wybrane zagadnienia kontaktu ciał odkształcalnych / Włodzimierz Pauk. – Politechnika świętokrzyska. – Kielce, 2005. – 164 p.

89. Sankar T. S. Approximate solution of singular integro-differential equations in elastic contact problem / T. S. Sankar, S. V. Hoa,

V. I. Fabrikant // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1982. – Vol. 18, № 4. – P. 503−519.

90. Serbin H. Numerical quadrature of some imporer integrals / H. Serbin // Quarterly of Applied Mathematics. – 1954. – Vol. 12, № 2. – P. 188−194.

91. Shillor M. Models and Analysis of Quasistatic Contact / M. Shillor, M. Sofonea, J. J. Telega. – Lect. Notes Phys. 655. – Springer, Berlin Heidelberg, 2004. – 264 p.

92. Shvets R. M. Discontinuous Contact of an Anisotropic Half-plane and a Rigid Base with Disturbed Suface / R. M. Shvets, R. M. Martynyak, A. A. Kryshtafovych // International Journal of Engineering Science. – 1996. – Vol. 34, № 2. – P. 183−200.

93. Signorini A. Questioni di elasticitanon linearizzata o semilinerizzat e semilinerizzata // Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. – 1959. – Vol. 18, № 1−2. – P. 95−139.

94. Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica // Atti della Società Italiana per il Progresso della Scienza. – 1933. – P. 513−533.

95. Wriggers P. Computational contact mechanics / P. Wriggers. – John Wiley & sons, LTD. – Hannover, 2002. – 442 p.