УДК 332.14
Кондіус І.С., к.е.н., доцент
Луцький національний технічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ АПАРАТУ НАПІВМАРКОВСЬКИХ МОДЕЛЕЙ В РЕАЛЬНИХ УМОВА ФУНКЦІОНУВАННЯ РЕГІОНІВ УКРАЇНИ

У публікації підлягають розгляду можливості застосування апарату напівмарковських процесів з дискретно-неперервним фазовим простором станів до побудови моделей функціонування систем обслуговування у випадку рекурентних вхідних потоків вимог і розподілів часів обслуговування вимог загального вигляду, а також знаходження на основі побудованих моделей стаціонарних характеристик систем та їх можливого застосування в реальних умовах соціально-економічних перетворень в країні.
Ключові слова: напівмарківська модель, системи масового обслуговування, рекурентні вхідні потоки.

Kondius I.

APPLICATION OF THE SOFTWARE MODELS IN REAL CONDITIONS OF THE FUNCTIONING OF REGIONS OF UKRAINE

The publication deals with the possibility of using the apparatus of semi-Markov processes with the discrete-continuous phasic space of states to construct models of functioning of service systems in the case of recurrent input flows of requirements and distributions of service times of general requirements, as well as finding on the basis of built-in models of stationary characteristics of systems and their possible application in real conditions of social and economic transformations in the country.
Keywords: semi-Markov model, mass maintenance systems, recurrent incoming flows.

Кондиус И.С.

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА ПОЛУМАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ В РЕАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ РЕГИОНОВ УКРАИНЫ

В публикации подлежат рассмотрению возможности применения аппарата полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний к построению моделей функционирования систем обслуживания в случае рекуррентных входящих потоков требований и распределений времен обслуживания требований общего вида, а также нахождение на основе построенных моделей стационарных характеристик систем и их возможного применения в реальных условиях социально-экономических преобразований в стране.
Ключевые слова: полумарковских модель, системы массового обслуживания, рекуррентные входные потоки.

Постановка проблеми у загальному вигляді і її зв'язок з важливими науковими та практичними завданнями.

Проблемам моделювання систем обслуговування присвячено велику кількість наукових статей і монографій. Всі автори, що займаються моделюванням систем обслуговування, відзначають складність дослідження систем у разі, коли часи між моментами надходження вимог в систему і часи їх обслуговування мають не показові розподілу, а розподілу загального вигляду. У цій ситуації апарат марковських процесів вже не є достатньо ефективним. Для аналізу таких систем доводиться залучати більш складний математичний апарат, зокрема, напівмарковські процеси із загальним фазовим простором станів, які незалежно ввели П. Леві, В. Сміт, Л. Такач, О.І. Песчанський і Е. Цінлер. Подальший розвиток теорія цих процесів отримала, зокрема, в працях В.С. Королюка і А.Ф. Турбіна. В даному досліджені реалізується підхід, заснований на ідеях, сформульованих в роботах цих авторів.

Цілі статті. Встановлення можливості застосування апарату напівмарковських процесів з дискретно-неперервним фазовим простором станів до побудови моделей функціонування систем обслуговування у випадку рекурентних вхідних потоків вимог і розподілів часів обслуговування вимог загального вигляду, а також знаходження на основі побудованих моделей стаціонарних характеристик систем в реальних умова функціонування регіонів України.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.

У однолінійну систему обслуговування надходить рекурентний потік вимог. Час між надходженнями вимог β – випадкова величина з абсолютно неперервною функцією розподілу $G(t)=P\{\beta\le t\}$ і щільністю $g(t)$. Тривалість обслуговування вимоги α – випадкова величина з абсолютно неперервною функцією розподілу $F(t)=P\{\alpha\le t\}$ і щільністю $f(t)$. Якщо прилад зайнятий обслуговуванням, то які у систему вимоги губляться. Передбачається, що випадкові величини $\alpha,\ \beta$ незалежні, мають кінцеві математичні очікування і дисперсії. У загальноприйнятої класифікації Д. Кендалла розглянута система обслуговування кодується як $GI/G/1/0$.

Побудуємо напівмарковську модель описаної системи обслуговування і на її основі знайдемо характеристики системи:

– фінальні ймовірності того, що прилад знаходиться в стані очікування або обслуговування вимоги;

– середні стаціонарні часи перебування в цих станах;

– функції розподілу тривалості періоду часу між сусідніми моментами надходження вимог у вільну систему;

– функції розподілу тривалості періоду часу між сусідніми моментами надходження вимог у вільну систему;

– середні значення цього періоду та його дисперсію.

Основні результати. Фінальні ймовірності p_0^*, p_1^* і середнє стаціонарне час $T(E_0)$ перебування системи у вільному стані і середнє стаціонарне час $T(E_1)$ перебування системи в зайнятому стані визначаються відповідно співвідношеннями:

$$p_0^*=\frac{E\beta(1+\overline{N}_{loss})-E\alpha}{E\beta(1+\overline{N}_{loss})},\qquad p_1^*=\frac{E\alpha}{E\beta(1+\overline{N}_{loss})},$$

$$T(E_0)=E\beta(1+\overline{N}_{loss})-E\alpha,\qquad T(E_1)=E\alpha.$$

Де
$$\overline{N}_{loss}=\int_0^\infty f(t)H_g(t)dt$$

– середнє число втрачених вимог за період між двома сусідніми моментами надходження вимог у вільну систему.

Функція розподілу тривалості періоду, між двома сусідніми моментами влучень вимог у вільну систему, визначається виразом:

$$\Phi_1(t)=\int_0^t f(y)\,V_g(y,t-y)dy,$$

де $V(t,x)$ – функція розподілу прямого залишкового часу процесу відновлення, породженого входять потоком вимог.

Середня тривалість цього періоду і дисперсія визначаються виразами

$$E\tau_1=E\beta(1+\overline{N}_{loss}),$$

$$D\tau_1 = \left(D\beta + (E\beta)^2\right)(1 + \overline{N}_{loss}) + 2E\beta\int_0^\infty t\overline{F}(t)h_g(t)dt -$$
$$-\left[E\beta(1 + \overline{N}_{loss})\right]^2,$$
де $h_g(t)$ – щільність функції відновлення $H_g(t)$ вхідного потоку вимог.

Для побудови процесу марковского відновлення, що описує функціонування системи, введемо фазовий простір, що складається з однієї точки і двох променів:

$$E = \{1, 1x, 0x\}.$$

Розшифруємо коди станів:

1 – прилад, який перебував в очікуванні, почав обслуговувати надійшло в систему вимога;

$1x$ – надійшла в систему вимога втрачено; прилад зайнятий обслуговуванням, до кінця якого залишилося час x;

$0x$ – закінчилося обслуговування вимоги; до моменту надходження в систему наступного вимоги залишився час x.

Граф переходів і часова діаграма функціонування системи зображені на рис. 1. і рис. 2.

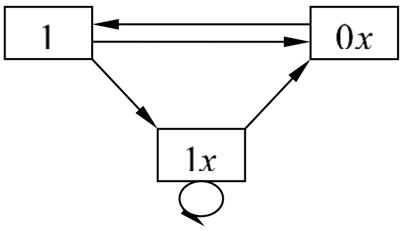

Рисунок 1 – Граф переходів системи

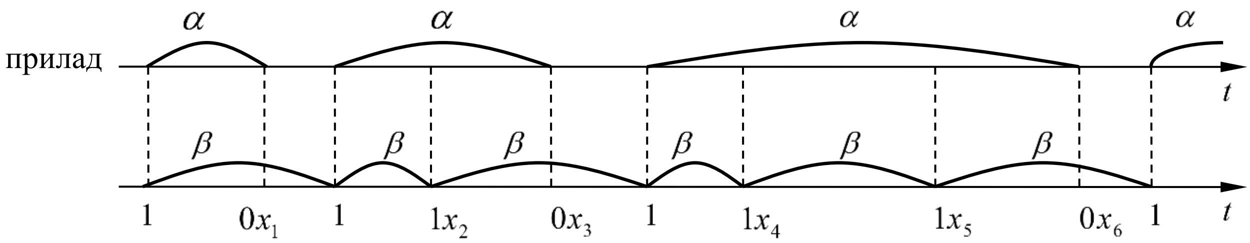

Рисунок 2 – Часова діаграма функціонування системи

Часи перебування системи в станах визначаються наступним чином. Час θ_{1x} перебування в стані $1x$ є мінімум часу β до моменту надходження наступної вимоги до системи і часу x до закінчення обслуговування вимоги: $\theta_{1x} = \beta \Lambda x$. Аналогічно визначається час θ_1 перебування в стані 1. Очевидно, що в стані θ_{0x} система перебуває час x. Таким чином, отримуємо формули:

$$\theta_{1x} = \beta \Lambda x, \quad \theta_1 = \alpha \Lambda \beta, \quad \theta_{0x} = x. \tag{1}$$

Для визначення ймовірності переходу вкладеного ланцюга Маркова слід врахувати, що перехід зі стану $1x$ в стан $1dy$ (рис. 3) відбувається, коли $x > \beta \in x - dy$; при цьому $y < x$.

Перехід з $1x$ в $0dy$ (рис. 4) відбувається, коли $x < \beta \in x + dy$. Зауважимо, що запис $\beta \in x \pm dy$ позначає $x \pm y < \beta \le x \pm y + dy$.

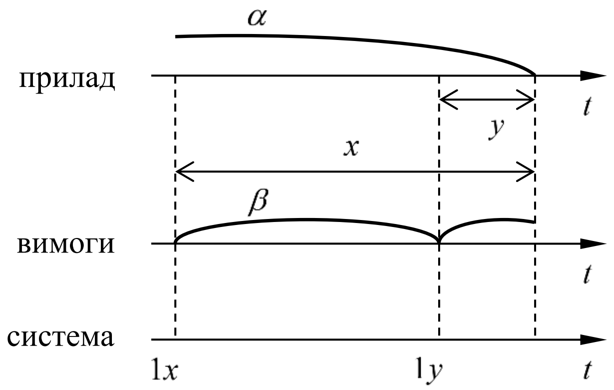

Рисунок 3 – Подія переходу $\{1x \to 1dy\}$

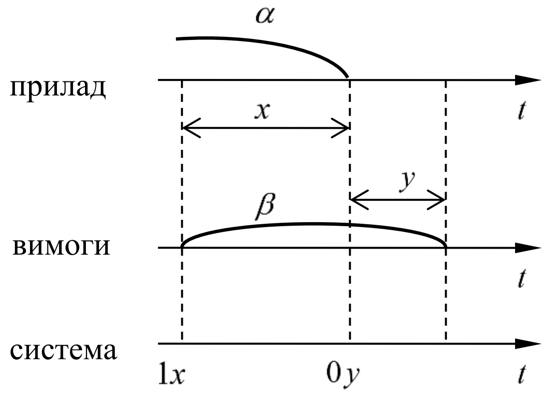

Рисунок 4 – Подія переходу $\{1x \to 0dy\}$

Таким чином, для ймовірностей переходу з стану $1x$ маємо:

$$p_{1x}^{1dy} = P\{\beta \in x - dy\} = g(x - y)dy, \quad y < x; \tag{2}$$

$$p_{1x}^{0dy} = P\{\beta \in x + dy\} = g(x + y)dy, \quad y > 0; \tag{3}$$

Аналогично обчислюються щільності ймовірностей переходу із решти станів:

$$p_1^{1dx} = P\{\alpha - \beta \in dx\} = \int_0^\infty g(t)\, f(x+t)dt\, dx; \tag{4}$$

$$p_1^{0dx} = P\{\beta - \alpha \in dx\} = \int_0^\infty f(t)g(x+t)dt\, dx;\ P_{0x}^1 = 1. \tag{5}$$

Якщо час між моментами надходження заяв и час їх обслуговування задовольняє умові

$$0 < P\{\alpha < \beta\} < 1, \tag{6}$$

то ймовірності переходів з стану 1 будуть ненульовими.

Враховуючи ймовірності переходів вкладеного ланцюга Маркова складемо систему для визначення стаціонарних щільностей $\rho(1x), \rho(0x)$ й стаціонарної ймовірності ρ_1 станів $1x$, $0x$ і 1відповідно:

$$\begin{cases} \rho(1x) = \int\limits_x^\infty g(y-x)\rho(1y)\,dy + \rho_1 \int\limits_x^\infty g(y-x) f(y)\,dy, \\ \rho(0x) = \int\limits_0^\infty g(x+y)\rho(1y)\,dy + \rho_1 \int\limits_0^\infty g(x+y) f(y)\,dy, \\ \rho_1 = \int\limits_0^\infty \rho(0x)\,dx, \\ \rho_1 + \int\limits_0^\infty \rho(0x)\,dx + \int\limits_0^\infty \rho(1x)\,dx = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Імовірність переходу зі стану 1 в стан $1x$ відмінна від нуля. Тоді з першого рівняння системи висловимо стаціонарну щільність $\rho(1x)$ через ймовірність ρ_1:

$$\rho(1x) = \rho_1 \int\limits_0^\infty f(x+y) h_g(y)\,dy \cdot \tag{8}$$

Підставляючи знайдений вираз в праву частину другого рівняння системи, отримуємо: $\rho(0x) = \rho_1 \int\limits_0^\infty g(x+y) f(y)\,dy + \rho_1 \int\limits_0^\infty g(x+y)\,dy \int\limits_0^\infty f(y+s) h_g(s)\,ds \cdot$

За допомогою щільності $v_g(t,x)$ прямого залишкового часу відновлення рекурентного вхідного потоку стаціонарну щільність $\rho(0x)$ запишемо у вигляді

$$\rho(0x) = \rho_1 \int\limits_0^\infty f(t) v_g(t,x)\,dt \cdot \tag{9}$$

Вкажемо імовірнісний зміст інтеграла в правій частині формули. Функція:

$$l(x) = \int\limits_0^\infty f(t) v_g(t,x)\,dt$$

– щільність випадкової величини χ, що дорівнює величині першого перескоку часу α обслуговування вимоги послідовністю випадкових величин β_n, кожна з яких має такий же розподіл, як і величина β (рис. 5).

Іншими словами, $l(x)$ – щільність тривалості часу перебування системи у вільному стані після закінчення обслуговування вимоги.

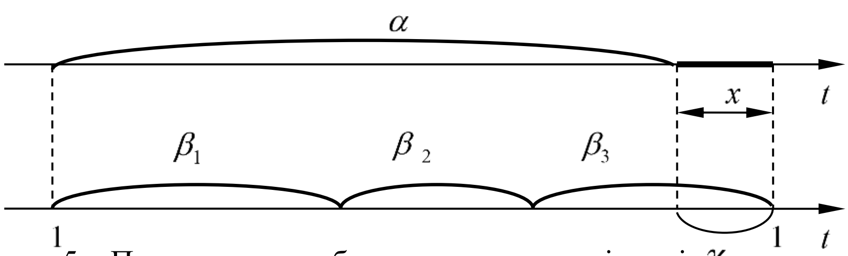

Рисунок 5 – Перескок часу обслуговування послідовністю вимог

З умови нормування знайдемо стаціонарну ймовірність ρ_1:

$$\rho_1 = \left[2 + \overline{N}_{loss}\right]^{-1},$$

Де

$$\overline{N}_{loss} = \int\limits_0^\infty f(t) H_g(t)\,dt$$

– середнє число втрачених вимог за період між двома сусідніми моментами надходження вимог у вільну систему.

Вид стаціонарного розподілу вкладеного ланцюга Маркова знайдений в припущенні, що виконується нерівність (6). Розглянемо крайні випадки, коли $P\{\alpha<\beta\}=1$ або $P\{\alpha<\beta\}=0$.

Нехай час обслуговування вимоги завжди менше часу між моментами надходження вимог, тобто $P\{\alpha<\beta\}=1$. Тоді система не потрапляє в стан $1x$. Граф переходів системи зображений на рис. 6, а стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова визначається формулами:

$$\rho(0x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)g(x+t)dt\,,\ \ \rho_1=\frac{1}{2}.$$

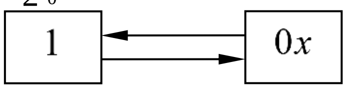

Рисунок 6 – Граф переходів системи у випадку $P\{\alpha<\beta\}=1$

У випадку $P\{\alpha<\beta\}=0$ стає неможливим перехід зі стану 1 в стан $1x$. Щільність стаціонарного розподілу перебування в стані $1x$ знаходиться за формулою (8), а в стані має вигляд $\rho(0x)=\rho_1\int_0^\infty g(x+y)\,dy\int_0^\infty f(y+s)h_g(s)\,ds\cdot$

Розглянемо наступні підмножини станів системи, що не перетинаються:

$$E_0=\{0x\},\quad E_1=\{1,1x\}.$$

Перебування в станах підмножини E_0 означає, що прилад вільний і система знаходиться в очікуванні вимоги. Перебування системи в станах підмножини E_1 означає, що прилад зайнятий обслуговуванням вимоги.

Фінальні ймовірності перебування системи в станах. Введемо перехідну ймовірність полумарковского процесса $S(t)$:

$$\Phi(t,x,E_i)=P\{S(t)\in E_i\ /S(0)=x\},\ x\in E,\ i=0{,}1.$$

Фінальні ймовірності перебування системи в станах E_0 та E_1 знайдемо задопомогою формули, де необхідні для цього середні значення часів (1) перебування системи в станах визначаються виразами:

$$E\theta_{0x}=x,\quad E\theta_1=\int_0^\infty \overline{F}(t)\overline{G}(t)dt,\quad E\theta_{1x}=\int_0^x \overline{G}(t)dt\cdot \tag{10}$$

Враховуючи (8) – (10), тотожність та середнє значення прямого залишкового часу відновлення β_t, інтеграли, що входять у формулу, перетворимо до виду:

$$\int_{E_1} m(x)\rho(dx)=\rho_1\int_0^\infty \overline{F}(t)\overline{G}(t)dt+\rho_1\int_0^\infty dx\int_0^x \overline{G}(s)ds\int_0^\infty h_g(t)\,f(x+t)dt=$$

$$=\rho_1\left(\int_0^\infty \overline{F}(t)\overline{G}(t)dt+\int_0^\infty \overline{F}(y)dy\int_0^y h_g(y-s)\overline{G}(s)ds\right)=$$

$$=\rho_1\left(\int_0^\infty \overline{F}(t)\overline{G}(t)dt+\int_0^\infty \overline{F}(y)G(y)dy\right)=\rho_1E\alpha\,;$$

$$\int_{E_0} m(x)\rho(dx)=\rho_1\int_0^\infty f(t)dt\int_0^\infty xv_g(t,x)dx=\rho_1\,E\beta(1+\overline{N}_{loss})-\rho_1E\alpha\,;$$

$$\int_E m(x)\rho(dx) = \rho_1 E\beta(1+\overline{N}_{loss}) \cdot$$

Отже, фінальна ймовірність p_0^* того, що прилад вільний, визначається формулою:

$$p_0^* = \lim_{t\to\infty}\Phi(t,x,E_0) = \frac{E\beta(1+\overline{N}_{loss}) - E\alpha}{E\beta(1+\overline{N}_{loss})}, \qquad (11)$$

а фінальна ймовірність p_1^* того, що прилад зайнятий обслуговуванням вимоги –

$$p_1^* = \lim_{t\to\infty}\Phi(t,x,E_1) = \frac{E\alpha}{E\beta(1+\overline{N}_{loss})}. \qquad (12)$$

Середні стаціонарні часи перебування системи в станах.

З урахуванням стаціонарного розподілу (8), (9) та виразів (2) – (5) для ймовірностей переходів вкладеного ланцюга Маркова, отримуємо:

$$\int_{E\setminus E_0}\rho(dx)P(x,E_0) = \rho_1\int_0^\infty f(t)\overline{G}(t)dt + \int_0^\infty \rho(1x)\overline{G}(x)dx =$$

$$= \rho_1\int_0^\infty f(t)\overline{G}(t)dt + \rho_1\int_0^\infty \overline{G}(x)dx\int_0^\infty h_g(t)f(x+t)dt = \rho_1;$$

$$\int_{E\setminus E_1}\rho(dx)P(x,E_1) = \int_0^\infty \rho(0x)dx = \rho_1 \cdot$$

Отже, середні часи перебування системи у виділених підмножинах станів E_i визначаються формулами:

$$T(E_0) = E\beta(1+\overline{N}_{loss}) - E\alpha, \quad T(E_1) = E\alpha. \qquad (13)$$

Тривалість періоду між двома сусідніми моментами попадання вимог у вільну систему. Знайдемо розподіл інтервалу часу між сусідніми моментами попадань вимог у вільну систему. Для цього розглянемо розширений фазовий простір станів системи $\hat{E}$, яке виходить з простору E за рахунок введення додаткового миттєвого стану 0:

$$\hat{E} = E \cup \{0\}.$$

Стан 0 має наступний змістовний сенс: у вільну систему поступила вимога. З цього стану з ймовірністю одиниця система миттєво переходить до стану 1, тобто

$$P_0^1 = 1, \ \theta_0 = 0.$$

Враховуючи ймовірність переходу вкладеного ланцюга Маркова (2) – (5) запишемо напівмарківське ядро $Q(t,x,dy)$ в дифференціальній формі:

$$Q(t,1,1dy) = \int_0^t g(s)f(y+s)ds\,dy,$$

$$Q(t,1,0dy) = \int_0^t f(s)g(y+s)ds\,dy,$$

$$Q(t,1x,1dy) = g(x-y)1_{x-y}(t)dy, \quad y < x,$$

$$Q(t,1x,0dy) = g(x+y)1_x(t)dy, \quad y > 0,$$

$$Q(t,0x,0) = 1_x(t), \quad Q(t,0,1) = 1(t).$$

Де
$$1_x(t) = \begin{cases} 0, & t < x, \\ 1, & t \ge x. \end{cases}$$

Розіб'ємо фазовий простір станів на дві підмножини, що не перетинаються:

$$\hat{E}_{+} = \{1, 1x, 0x\} \text{ и } \hat{E}_{-} = \{0\}.$$

Перебуванню системи в підмножині $\hat{E}_{+}$ відповідає обслуговування вимоги, що поступила, і очікування після цього наступної вимоги. Нехай τ_1, τ_{1x}, τ_{0x} – часи перебування системи в підмножині $\hat{E}_{+}$ за умови, що в початковий момент часу система знаходилася відповідно в станах $1, 1x, 0x$. Позначимо $\Phi_1(t)$, $\Phi_1(x, t)$, $\Phi_0(x, t)$ функції розподілу цих часів.

З урахуванням виду напівмарківського ядра $Q(t, x, dy)$ система рівнянь марківського відновлення для функцій

$$\overline{\Phi}_1(t) = 1 - \Phi_1(t),\ \overline{\Phi}_1(x, t) = 1 - \Phi_1(x, t),\ \overline{\Phi}_0(x, t) = 1 - \Phi_0(x, t)$$

записується таким чином:

$$\begin{cases} \overline{\Phi}_1(x, t) = \overline{1}_x(t)\overline{G}(t) + \int\limits_0^x g(x-y)dy\int\limits_0^t \overline{\Phi}_1(y, t-s)1_{x-y}(ds) + \\ \qquad + \int\limits_0^\infty g(x+y)dy\int\limits_0^t \overline{\Phi}_0(y, t-s)1_x(ds), \\ \overline{\Phi}_1(t) = \overline{F}(t)\overline{G}(t) + \int\limits_0^t g(s)ds\int\limits_0^\infty f(y+s)\overline{\Phi}_1(y, t-s)\,dy + \\ \qquad + \int\limits_0^t f(s)ds\int\limits_0^\infty g(y+s)\overline{\Phi}_0(y, t-s)\,dy, \\ \overline{\Phi}_0(x, t) = \overline{1}_x(t). \end{cases}$$

З урахуванням того, що $\overline{\Phi}_1(x, t) = 1$ при $t < x$, система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} \overline{\Phi}_1(x, t) = \overline{G}(t) + \int\limits_0^x g(x-y)\overline{\Phi}_1(y, t-x+y)dy, \quad t \ge x, \\ \overline{\Phi}_1(t) = \overline{F}(t) + G(t)\overline{F}(t) + \int\limits_0^t f(x)dx\int\limits_0^x g(s)\overline{\Phi}_1(x-s, t-s)\,ds. \end{cases} \tag{14}$$

Перше рівняння системи вирішимо методом послідовних наближень, в результаті отримаємо:
$$\overline{\Phi}_1(x,\ t) = \overline{G}(t) + \int\limits_0^x \overline{G}(t-y)h_g(y)dy, \quad t \ge x.$$

Використовуючи функцію розподілу $V_g(t, x)$ прямого залишкового часу процесу відновлення, рішення представимо у виді:

$$\overline{\Phi}_1(x, t) = \overline{V}_g(x,\ t-x), \quad \overline{V}_g(x, t-x) = 1 - V_g(x, t-x), \quad t \ge x.$$

Підставимо знайдений вираз для функції $\overline{\Phi}_1(x, t)$ у друге рівняння системи (14):

$$\overline{\Phi}_1(t) = \overline{G}(t) + G(t)\overline{F}(t) + \int\limits_0^t f(x)dx\int\limits_0^x g(s)\overline{V}_g(x-s, t-x)\,ds.$$

Ураховуючи тотожність

$$\int\limits_0^x \overline{V}_g(x-s, t-x)g(s)ds = \int\limits_0^x \overline{G}(t-y)h_g(y)dy, \quad t \ge x,$$

після перетворень отримаємо

$$\overline{\Phi}_1(t) = \overline{F}(t) + \int\limits_0^t f(y)\overline{V}_g(y, t-y)dy. \tag{15}$$

Якщо використати для функції $\overline{V}_g(y, t-y)$, то (15) набуває вигляду:

$$\overline{\Phi}_1(t) = \overline{G}(t) + \int\limits_0^t \overline{G}(t-y)\overline{F}(y)h_g(y)dy.$$

Отож, функція розподілу тривалості періоду між двома сусідніми моментами попадання вимог у вільну систему визначається виразом

$$\Phi_1(t) = \int_0^t f(y)\, V_g(y, t-y) dy,$$

або

$$\Phi_1(t) = \int_0^t \overline{G}(t-y) F(y) h_g(y) dy \tag{16}$$

За допомогою виразу (15) для функції $\overline{\Phi}_1(t)$ та формули для математичного очікування прямого залишкового часу відновлення знайдемо середню тривалість $E\tau_1$ періоду між двома сусідніми моментами початку обслуговування:

$$E\tau_1 = \int_0^\infty \overline{\Phi}_1(t) dt = E\alpha + \int_0^\infty dt \int_0^t f(y) \overline{V}_g(y, t-y) dy =$$

$$= E\alpha + \int_0^\infty f(y) dy \int_0^\infty \overline{V}_g(y, x) dx = E\alpha + E\beta \int_0^\infty f(y) \hat{H}_g(y) dy - \int_0^\infty y\, f(y) dy \cdot$$

Таким чином, $$E\tau_1 = E\beta(1 + \overline{N}_{loss}). \tag{17}$$

Дисперсію тривалості періоду τ_1 обчислимо за допомогою формули

$$D\tau_1 = 2\int_0^\infty t \overline{\Phi}_1(t) dt - (E\tau_1)^2 \cdot$$

Враховуючи (15) та (17), остаточно приходимо до виразу:

$$D\tau_1 = \left(D\beta + (E\beta)^2\right)(1 + \overline{N}_{loss}) + 2E\beta \int_0^\infty t \overline{F}(t) h_g(t) dt - \left[E\beta(1 + \overline{N}_{loss})\right]^2. \tag{18}$$

Система $M/M/1/0$. Нехай потік вимог, що входить в систему, має інтенсивність λ, а час обслуговування вимог має показовий розподіл з параметром μ. В цьому випадку середнє число втрачених вимог за період між двома сусідніми моментами начал обслуговування вимог: $\overline{N}_{loss} = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Розрахунок характеристик системи за формулами (11) – (13), (16) – (18) призводить до наступних результатів:

$$p_0^* = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1^* = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad T(E_0) = \frac{1}{\lambda}, \quad T(E_1) = \frac{1}{\mu},$$

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\mu}{\lambda - \mu} e^{-\lambda t} - \dfrac{\lambda}{\lambda - \mu} e^{-\mu t}, \ \lambda \neq \mu, \ t \geq 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t), \ \lambda = \mu, \ t \geq 0, \end{cases}$$

$$E\tau_1 = \frac{\mu + \lambda}{\lambda\mu}, \quad D\tau_1 = \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\lambda^2}.$$

Система $M/G/1/0$. Якщо потік вимог, що входить, – простий з інтенсивністю λ, а випадкова величина α має розподіл загального вигляду, те число втрачених вимог між двома сусідніми моментами попадання вимог у вільну систему рівне $\overline{N}_l = \lambda E\alpha$. Характеристики системи визначаються виразами

$$p_0^* = \frac{1}{1 + \lambda E\alpha}, \quad p_1^* = \frac{\lambda E\alpha}{1 + \lambda E\alpha}, \quad T(E_0) = \frac{1}{\lambda}, \quad T(E_1) = E\alpha,$$

$$\Phi_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda y}F(y)dy, \quad t \ge 0, \qquad E\tau_1 = \frac{1}{\lambda} + E\alpha, \quad D\tau_1 = \frac{1}{\lambda^2} + D\alpha \cdot$$

Система $GI/M/1/0$. Для цієї системи обслуговування потік вимог, що входить, породжується випадковою величиною β з щільністю $g(t)$ загального вигляду, а щільність розподілу часу обслуговування має вигляд $f(t) = \mu e^{-\mu t}, \ \ t \ge 0.$

Середнє число втрачених вимог за період обслуговування однієї вимоги виражається через перетворення Лапласа $\tilde{g}(\cdot)$ щільності $g(t)$:

$$\overline{N}_{loss} = \int_0^\infty \overline{F}(t)h_g(t)dt = \int_0^\infty e^{-\mu t}h_g(t)dt = \frac{\tilde{g}(\mu)}{1-\tilde{g}(\mu)},$$

де

$$\tilde{g}(z) = \int_0^\infty g(t)e^{-zt}dt \cdot$$

Стаціонарні характеристики системи визначаються таким чином:

$$p_0^* = 1 - \frac{1-\tilde{g}(\mu)}{\mu E\beta}, \quad p_1^* = \frac{1-\tilde{g}(\mu)}{\mu E\beta}, \quad T(E_0) = \frac{E\beta}{1-\tilde{g}(\mu)} - \frac{1}{\mu}, \quad T(E_1) = \frac{1}{\mu},$$

$$\Phi_1(t) = G(t) - \int_0^t \overline{G}(t-y)h_g(y)e^{-\mu y}dy, \quad E\tau_1 = \frac{E\beta}{1-\tilde{g}(\mu)},$$

$$D\tau_1 = \frac{D\beta + (E\beta)^2}{1-\tilde{g}(\mu)} - E\beta\frac{E\beta + 2(\tilde{g}(\mu))'}{(1-\tilde{g}(\mu))^2}.$$

Висновки. Таким чином, проведене дослідження показують, що теорія напівмарковських процесів з дискретно-неперервним фазовим простором станів може ефективно застосовуватися при моделюванні систем масового обслуговування в реальних умова функціонування регіонів України. Стаціонарні показники функціонування систем для деяких моделей знайдені вперше, а в разі найпростіших вхідних потоків вимог або експоненціально розподіленого часу обслуговування вимог збігаються з відомими результатами.

Список використаних джерел

1. Песчанский, А.И. Математика для экономистов [Текст] : основы теории, примеры и задачи : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по экономическим направлениям / А. И. Песчанский ; Севастопольский гос. ун-т. - Москва : Вузовский учебник : ИНФРА-М, 2016. - 519.

2. Королюк, В. С. О поведении второго момента решения линейного автономного стохастического уравнения в частных производных со случайными параметрами в правой части / В. С. Королюк, И. В. Юрченко, В. К. Ясинский // Кибернетика и системный анализ. - 2015. - Т. 51, № 1. - С. 65-72.

3. Турбин, А. Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. Киев: Наук. думка, 1992. -- 205 с.

4. Winchester S. The map that changed the World: William Smith and the birth of Modern Geology. New York: HarperCollins e-book, 2009.

5. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М.: Мир, 1971. - 179.