

Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет

В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко

**ЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ,
МІЦНІСТЬ І СТІЙКІСТЬ
КОМПОЗИТНИХ ОБОЛОНОК
СЕРЕДНЬОЇ ТОВЩИНИ**

МОНОГРАФІЯ

ЛУЦЬК - 2015

УДК 620.17(075.8)

ББК 30.121Я73

Ш 33

*Рекомендовано до друку вченою радою
Луцького національного технічного університету
(протокол № 6 від 27 січня 2015 р).*

Рецензенти:

Николишин М.М. – доктор фіз.-мат. наук, професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;

Пискунов С.О. – доктор технічних наук, професор, Київський національний університет будівництва та архітектури;

Марчук О.В. – доктор технічних наук, професор, Національний транспортний університет.

В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко

Ш 33 Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини: монографія / В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко. – Луцьк: РВВ Луцького НТУ, 2015. – 264 с.

ISBN 978-966-1532-84-6

Монографія розглядає один із розділів механіки деформівного твердого тіла – визначення напружено-деформованого стану та розрахунок композитних оболонок середньої товщини. Описані методи побудови сучасних лінійних теорій оболонок і криволінійних стрижнів середньої товщини, що враховують поперечні деформації зсуву та обтіснення, а також їх застосування у розрахунках за дії високоградієнтних навантажень і контактних взаємодій. Наведені методи розрахунку циліндричних оболонок і композитних кілець, пошкоджених поверхневими тріщинами. Досліджено стійкість ортотропних циліндричних оболонок за їх осьового та зовнішнього стиску.

УДК 620.17(075.8)

ББК 30.121Я73

ISBN 978-966-1532-84-6

© В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко, 2015

*Світлій Пам'яті Полеглим
за Волю України
присвячується*

ПЕРЕДМОВА

Сучасний розвиток техніки, машинобудування, будівельної індустрії потребує значного підвищення надійності та міцності інженерних споруд і машин для їх безпечної та економічної експлуатації на виробництві й транспорті. У свою чергу це вимагає використання досконаліших фізичних і математичних моделей, здійснення щораз точніших розрахунків із реалістичним урахуванням складних фізичних і механічних властивостей матеріалів, особливостей структури проєктованих елементів конструкцій. Пластини, оболонки та стрижні є найрозповсюдженішими елементами інженерних конструкцій машинобудівного, приладобудівного, будівельного та транспортного спрямування. У більшості випадків використаний для їх виготовлення матеріал є анізотропним.

Розраховувати анізотропні композитні *гетерогенні* матеріали, до яких можна віднести скло-, метало- та органопластики, багатошарові утворення і залізобетони, з погляду макромеханіки дуже складно. Тому для спрощення розрахунків доцільніше вважати ці матеріали *гомогенними ортотропними лінійно-пружними* з певними усередненими значеннями механічних і фізичних характеристик, умовно їх

називають *композитними*. Як показала практика, прийняті допущення значно спрощують розрахунки без утрати необхідної точності. Застосування композитних матеріалів для виготовлення стрижневих, оболонкових і пластинчастих елементів конструкцій виявляє їх механічну ортотропність чи трансверсальну ізотропність поряд зі зменшеним опором поперечному зсувові та обтисненню. Останнє є основною причиною неможливості використання у розрахунках таких елементів конструкцій класичних теорій оболонок і пластин Кірхгофа-Лява.

Тому, поряд із розрахунком пружних систем за допомогою тривимірних підходів просторової задачі теорії пружності, широке застосування отримали неklasичні двовимірні моделі оболонок і пластин. Аналіз існуючих неklasичних теорій свідчить, що більшість із них різними способами враховує лише один із основних уточнювальних факторів – деформацію поперечного зсуву. Таке уточнення є достатнім для малоградієнтних навантажень, що деформують досить тонкі пластини та оболонки. Але у випадках, коли конструкційні елементи не є тонкими, є композитними та (або) перебувають під дією високоградієнтних локальних навантажень чи контактних впливів, згадані неklasичні теорії все ж допускають значні похибки не лише кількісного, але й якісного характеру.

За літературними даними основним чинником, який повинен враховуватися для адекватного опису контактної взаємодії, є поперечне обтиснення. Моделі, що його не враховують, спроможні тільки на інтегральний опис явища контакту та не можуть претендувати на досить точне відтворення розподілу напружень і переміщень у зоні контакту жорстких тіл із оболонками та пластинами.

У той же час моделі, що враховують деформації поперечного зсуву та обтиснення, здатні отримувати фізично та математично обґрунтовані розв'язки згаданих вище задач, а також дозволяють здійснювати розрахунок оболонок і пластин *середньої* товщини, для яких відношення товщини елемента до його мінімального радіуса кривини (розміра) знаходяться у межах: $1/20 \leq h/R_{\min} \leq 1/4$. Класична теорія Кірхгофа-Лява у цих межах може задовільно працювати тільки у випадках гладких статичних навантажень. Тому розробка моделей і методів, максимально наближених до реалій пружного деформування конструкцій, є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла.

У даній монографії узагальнено результати досліджень, отримані авторами в області побудови нових некласичних двовимірних моделей оболонок і стрижнів середньої товщини, виготовлених із композитних матеріалів. Отримано розрахункові рівняння, що враховують деформації поперечного

зсуву та обтиснення. Наведено розв'язки низки задач для циліндричних оболонок і кругових кілець, що якісно відрізняються від одержаних раніше на основі моделей, котрі не враховували поперечного обтиснення. Зокрема, розроблено метод визначення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) у циліндричній оболонці та круговому кільці, що пошкоджені поверхневими тріщинами, які знаходяться під дією внутрішнього або зовнішнього тиску, а також отримано розв'язки задач про контактну взаємодію циліндричної оболонки з жорсткими бандажами із параболічними та прямолінійними основами. Здійснено розрахунки на стійкість ортотропних оболонок і композитних кілець.

Одержані результати підтверджують можливість розширення областей застосування нових неklasичних моделей оболонок і пластин для розв'язування тих класів задач, де класичні теорії оболонок і пластин Кірхгофа-Лява та неklasичні моделі типу Тимошенка не дають достовірних результатів.

Автори

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД СУЧАСНИХ МОДЕЛЕЙ ТА МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН

1.1. Методи побудови сучасних теорій оболонки і пластин та їх порівняльний аналіз

У сучасній інженерній практиці оболонки, плити та стрижні є найпоширенішими конструктивними елементами машин і споруд. Їх розрахунок є складною проблемою механіки деформівного твердого тіла та будівельної механіки. Ця проблема є особливо важливою в даний час, коли для виробництва тонкостінних конструкцій почали використовувати композитні матеріали. Такі матеріали за своєю природою мають анізотропні властивості, тому їх розрахунок вимагає точніших моделей і розрахункових рівнянь, а також застосування досконаліших математичних методів.

Композитні тонкостінні конструкції отримали широке застосування у різних галузях машинобудування та будівництва як системи, що дозволяють поєднувати високу міцність і жорсткість із малою масою та низькою матеріаломісткістю. Такі матеріали в окремих випадках повністю або частково замінюють метали в якості несучих конструктивних елементів. Особливість створення сучасних конструкцій із композитних матеріалів полягає у проектуванні властивостей цих матеріалів, що вимагає

розробки нових теорій і методів розрахунку, які б дозволили оцінювати напружено-деформований стан конструкції заданої геометричної форми та неоднорідної структури.

Тонкостінні оболонкові чи пластинчасті конструкції під час експлуатації знаходяться під дією складної системи навантажень. Такі навантаження можуть бути розподілені на більшій частині поверхні або бути зосередженими на малих ділянках, співрозмірних із їх товщиною. Визначення напружено-деформованого стану (НДС) у тонкостінних конструкціях при дії розподілених поверхневих навантажень за допомогою класичних моделей оболонок і пластин не є проблемою і успішно знаходиться з певною точністю відомими методами. Разом з тим, знаходження НДС в околі точок прикладання високоградієнтних навантажень викликає значні труднощі та виключає використання класичних моделей для згаданих цілей. У зв'язку з цим і виникла необхідність побудови точніших моделей.

Можливо, вперше найбільш систематизовані дослідження у цьому напрямку були розпочаті С.П.Тимошенком у його другій частині “Курса теории упругости”, виданого 1916 року. У цій роботі було досліджено вплив дотичних напружень на період вільних поперечних коливань стрижня. Визначення додаткового прогину балки, що згиналась зосередженою силою, за рахунок деформації поперечного зсуву наведено у першому

томі його підручника “Strength of materials”, виданого у 1930 році. У визначенні переміщень круглих пластин методика С.П. Тимошенка була використана С. Войновським-Крігером при їх згині зосередженою силою. Спроба уточнення теорії оболонок і пластин була зроблена М.О. Кільчевським [64, 65] на початку сорокових років, який використав підхід Коші та Пуассона про можливість розкладу функцій деформацій у степеневі ряди за поперечною координатою. Замість звичайних степеневих рядів ним були застосовані тензорні розклади, які справедливі для довільної криволінійної системи координат.

Закінчений варіант теорії пластин, що враховував поперечні зсуви та поперечні нормальні напруження, був запропонований Е. Рейсснером [185] у 1944 році. Пізніше цю теорію П. Нагді [181] поширив на теорію оболонок, де нормальні переміщення задавалось квадратною параболою. Згадану роботу можна вважати також першою спробою урахування поперечного обтіснення у неklasичних моделях оболонок і пластин.

Необхідно відзначити одну важливу особливість деформування композитних пластин і оболонок – істотний вплив деформацій поперечного зсуву та обтіснення. Тому розрахунок таких конструкцій, що базується на гіпотезах Кірхгофа-Лява (без урахування названих ефектів), у багатьох випадках є обмеженим. У зв’язку з цим, для розрахунку

конструкцій із композитних матеріалів використовують уточнені або неklasичні теорії оболонок і пластин, що враховують деформації поперечного зсуву. Разом з тим, існує багато теорій та моделей, що враховують і деформації поперечного обтиснення. Практичне використання тих чи інших теорій в основному залежить від складності та можливості побудови наближених розв'язків розрахункових рівнянь для оболонок і пластин. Найпростішими *неklasичними* моделями оболонок вважають моделі оболонок типу Тимошенка, для яких приймають такі припущення:

1. Прямолінійні волокна оболонки, які до деформації були нормальними до серединної поверхні, зберігають після деформації свою довжину та прямолінійність, але не залишаються перпендикулярними до деформованої серединної поверхні, а повертаються на певний кут (гіпотеза прямих нормалей).

2. Нормальними напруженнями на площинках, паралельних до серединної поверхні, можна знехтувати у порівнянні з іншими напруженнями (плоский напружений стан).

Цим гіпотезам відповідає кінематична модель зміни компонент вектора переміщень і тензора напружень за товщиною [30,31,45,46, 62,98,147,181]:

$$U = u + \gamma_{\alpha} z; \quad V = v + \gamma_{\beta} z; \quad W = w(\alpha, \beta). \quad (1.1)$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{2h} + \frac{3M_{\alpha} \cdot z}{2h^3}, \quad \tau_{\alpha\gamma} = \frac{Q_{\alpha}}{2hk'}, \quad (\alpha \leftrightarrow \beta). \quad (1.2)$$

Тут величини u , v , w характеризують переміщення точок серединної поверхні оболонки чи пластини; $\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}$ – кути повороту нормального волокна в площинах (α, z) і (β, z) ; $N_{\alpha}, Q_{\alpha}, M_{\alpha}$ – зусилля та моменти в перерізах оболонки; W – радіальне переміщення оболонки, що не залежить від поперечної координати z ; k' – коефіцієнт зсуву. Введення коефіцієнта зсуву k' пояснюється необхідністю узгодження закону розподілу дотичних напружень у поперечному напрямку з лінійним тангенціальним переміщенням. У науковій літературі коефіцієнт зсуву, як правило, приймається рівним $k' = 5/6$.

Основні рівняння тонких пологих оболонок типу Тимошенка, детально розроблені та сформульовані в обширних монографіях С.О. Амбарцумяна [5], Я.М. Григоренка [45-47], Б.Л. Пелеха [98-100] та ін., зводяться до такої системи рівнянь:

$$D\Delta^2 w + (1 - \varepsilon\Delta)\Delta_k F = q - \varepsilon\Delta q; \quad (1.3)$$

$$\Delta^2 F - 2Eh\Delta_k w = 0; \quad \Delta\Omega - k^2\Omega = 0, \quad (1.4)$$

$$\text{де } \Delta = \frac{1}{A_{\alpha}^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{A_{\beta}^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \quad \Delta_k = \frac{k_{\beta}}{A_{\alpha}^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{k_{\alpha}}{A_{\beta}^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2};$$

$$k^2 = \frac{2}{\varepsilon(1-\nu)}, \quad D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2}; \quad w - \text{функція прогину оболонки};$$

$F(\alpha, \beta)$ – функція зусиль В.З. Власова [37], $\Omega(\alpha, \beta)$ – функція

кручення; $k_\alpha, k_\beta, A_\alpha, A_\beta$ – кривини та коефіцієнти Ляме координатних ліній серединної поверхні оболонки; $\varepsilon = D/(2k'Gh)$ – параметр, за допомогою якого враховується поправка від впливу деформації поперечного зсуву.

Теорії оболонок типу Тимошенка, крім урахування деформацій поперечного зсуву, усувають ще й деякі математичні протиріччя, які має класична теорія оболонок. Основним із них є невідповідність порядку розрахункових диференціальних рівнянь кількості граничних умов. Теорія типу Тимошенка має вищий – десятий – порядок розрахункових диференціальних рівнянь (1.3), (1.4) у порівнянні з класичною, яка має восьмий (відсутнє рівняння Гельмгольца (1.4)). Тому відповідно до цієї теорії на краях оболонки можна задовольнити п'яти “природним” граничним умовам.

Оцінка напружено-деформованого стану в таких оболонках здійснюється на основі спрощених формул (1.2), де нормальні та тангенціальні напруження виражаються через згинальні моменти та поперечні сили відповідно до гіпотез, що закладені у згаданих моделях. Поклавши у рівнянні (1.3) параметр $\varepsilon = 0$ та відкинувши однорідне рівняння Гельмгольца (1.4), що описує так званий вихровий крайовий ефект Рейсснера, отримаємо рівняння класичної теорії пологих оболонок Кірхгофа-Лява, що будується на гіпотезі недеформівних нормалей і нехтуванні нормальними напруженнями σ_z .

Застосування гіпотези недеформівних нормалей вносить похибки, що не усуваються. Порядок цих похибок досліджено у відомих роботах І.М. Векуа [34], , А.Л. Гольденвейзера [42,43], Е.І. Григолоюка [44], Х.М. Муштарі [84], Я.М. Григоренка [45-47], Л.Г. Доннела [58], В.В. Пікуля [103], І.Ю. Хоми [155] та ін.

Деяке узагальнення теорії типу Тимошенка було виконане П. Нагді [181], який додатково для вертикального (радіального) переміщення W у співвідношеннях (1.1) ввів квадратичний закон розподілу відносно координати z із подальшим використанням варіаційного принципу Рейсснера. Крім того, шляхом використання диференціальних рівнянь рівноваги тривимірної теорії пружності, з урахуванням граничних умов на зовнішніх поверхнях, було записано вирази для поперечних дотичних і нормальних напружень σ_z , розподілених за товщиною оболонки відповідно за квадратичним і кубічним законами. Разом з тим, таке уточнення не стало визначальним для основних нормальних напружень у тангенціальних напрямках, які й надалі змінювались по товщині за лінійним законом.

Широке застосування для побудови двовимірних моделей оболонок і пластин знайшов ітераційний метод гіпотез С.О. Амбарцумяна [5]. На відміну від теорій типу С.П.Тимошенка, Е. Рейсснера та П. Нагді, модель С.О. Амбар-цумяна передбачає зміну за товщиною оболонки основних нормальних напружень

у тангенціальних напрямках за законом кубічної параболи, а уточнена модель частково враховує ще й поперечне обтиснення. Диференціальні рівняння рівноваги (шістнадцятого порядку), статичні та геометричні граничні умови знайдені на основі змішаного варіаційного принципу Е. Рейсснера [1, 125]. Нехтуючи функцією, що враховує поперечне обтиснення, автор отримує варіант теорії оболонок С.О. Амбарцумяна. Майже одночасно подібного типу неklasичні моделі пластин середньої товщини були побудовані С.Г. Лехніцьким [71], Х.М. Муштарі [84], М.П. Шереметьєвим і Б.Л. Пелехом [98], І.О. Прусовим [120], Е.І. Григолюком [44], О.Ф. Рябовим і О.О. Рассказовим [29,132], І.Ю. Хомою [155] та ін. Детальний аналіз цих робіт дається в оглядовій статті Я.М. Григоренком і А.Т. Василенком [45], а також В.В. Васильєвим і С.А. Лур'є [31,32]. Узагальнення кінематичної та статичної гіпотез Тимошенка для анізотропних оболонок розвивається та досліджується у монографії Я.М. Григоренка, А.Т. Василенка, Г.П. Голуб [46].

Дослідження С.Г.Лехніцького [71], Х.М. Муштарі [84], О.Ф. Рябова [29] та І.О. Прусова [120], де майже одночасно (у 1960-1970р.р.) почали частково враховувати деформацію поперечного обтиснення, разом зі зміною нормальних напружень у тангенціальних напрямках за законом кубічної параболи, можна назвати наступним

етапом розвитку моделей оболонок, пластин і коротких балок, побудованих методом гіпотез.

Дещо пізніше (1974р.), у роботі [161] компоненти вектора переміщень (1.1) довільної точки пластини розгорнені у вигляді притятих рядів за поперечною координатою z

$$u_i = \sum_{k=0}^3 u_{ik}(\alpha, \beta) z^k, (i=1,2); \quad W = \sum_{k=0}^4 w_k(\alpha, \beta) \cdot z^k, \quad (1.5)$$

де 13 невідомих функцій $u_{ik}(\alpha, \beta)$, $w_k(\alpha, \beta)$ шукаються із, одержаної з варіаційного принципу Лагранжа [1] для повної енергії пружного середовища, системи рівнянь рівноваги чотирнадцятого порядку із задовільненням рівнянь узагальненого закону Гука та граничних умов для нормальних і дотичних напружень на лицевих поверхнях пластини.

Комплексне подання уточнених рівнянь згину, що враховують деформації поперечного зсуву та обтиснення, для ортотропних пластин, пошкоджених тріщинами, наведені у роботі [164]. Метод побудови неklasичних моделей балок і пластин, використаний для побудови узагальненої теорії непологих ортотропних оболонок, розроблений у роботі [163]. Методика розв'язування такої системи рівнянь уже достатньо відпрацьована та уніфікована для оболонок теорії типу Тимошенка, тому інтегрування рівнянь запропонованої моделі не викликає значних ускладнень. При її розв'язуванні

для конкретних крайових задач необхідно приєднати ще сім граничних умов на краях оболонки, які легко отримати з варіаційного функціоналу Лагранжа.

Подальший розвиток теорій згину оболонок і пластин здійснений О.О. Рассказовим [123,124,132], В.Г. Піскуновим, О.В. Марчуком і Б.В. Гриневецьким [78,79, 106-108], В.А. Родіоною [127], О.М. Ульяшиною [150], В.А. Карнауховим, В.І. Козловим [62], К. Ло і Р. Крістенсенем [68] та іншими авторами.

Так, у працях [68, 127] компоненти вектора переміщень довільної точки оболонки розгорнені у вигляді притятих рядів за поперечною координатою z

$$u_i = \sum_{k=0}^3 u_{ik}(\alpha, \beta) z^k, (i=1,2); \quad W = \sum_{k=0}^2 w_k(\alpha, \beta) \cdot z^k, \quad (1.6)$$

де одинадцять невідомих функцій u_{ik}, w_k знаходилися із системи одинадцяти диференціальних рівнянь відносно «полімоментів» та «полісил», отриманих із варіаційного принципу Лагранжа для повної енергії пружної системи із задовільненням одинадцяти граничним умовам на краях оболонки. Тут, на відміну від формул системи (1.5), у виразі для W параметр $k=2$. У роботі В.А. Родіонової [127], за такого ж подання (1.5), але при $k=3$, переміщення трансформувалися у вирази через поліноми Лежандра, а далі вже застосовувалася методика С.О. Амбарцумяна [5] – використовувалися

рівняння рівноваги класичної теорії оболонок, а також наперед задані вирази для дотичних напружень $\tau_{\alpha z}, \tau_{\varphi z}$ та нормального напруження σ_z . Автор підкреслює, що оцінити точність цієї моделі можна хіба що методом зважених нев'язок, але для цього необхідно будувати наступне наближення.

До моделей, у яких установлена повна відповідність нелінійного закону розподілу тангенціальних переміщень по товщині оболонки (паketу шарів) системі внутрішніх зусиль і рівнянням їх визначення, належать моделі багат шарових ортотропних оболонок В.Г. Піскунова, О.О. Рассказова та їх учнів [105-107, 123,124]. Розрахункові рівняння, граничні умови та співвідношення пружності в моделі О.О. Рассказова отримуються із варіаційного принципу Рейсснера. Загальний порядок системи диференціальних рівнянь складає 16, а в частковому випадку пластини – 12. Система внутрішніх зусиль і рівнянь рівноваги узгоджується із геометричними співвідношеннями, які описують викривлення нормалі та її вкорочення від ефекту Пуассона. Ці особливості є принципово відмінними від розглядуваних раніше теорій і ведуть до отримання нової системи диференціальних рівнянь вищого порядку, а також підвищення точності результатів.

У роботах В.Г. Піскунова та його учнів [78,105-107] показано, що урахування зміни поперечного обтиснення тільки

за рахунок ефекту Пуассона є недостатнім, тому в кінематичних гіпотезах для переміщень необхідно враховувати безпосередній вплив навантаження, прикладеного до зовнішніх поверхонь оболонки. Така ітераційна модель була побудована ними на основі принципу Остроградського-Гамільтона. Була отримана система рівнянь руху, яка має загальний порядок, що дорівнює 20. Порядок рівнянь підвищився, у порівнянні з рівняннями статки, за рахунок врахування ефекту “динамічного обтиснення”. Числові результати для тестових задач за декількома ітераціями практично співпадали з відомими результатами експериментів і числовими результатами тривимірної теорії пружності, чим підтвердили правильність прийнятих гіпотез.

У працях Я.М. Григоренка та А.Т. Василенка [45-47] розроблена модель шаруватих оболонок змінної жорсткості з використанням гіпотези ламаної лінії та задоволення умов неперервності переміщень і дотичних напружень на поверхні контакту кожного шару. За такого підходу порядок системи розрахункових рівнянь не залежав від числа шарів, а самі рівняння для випадку однорідних пологих оболонок приймають вигляд (1.3), (1.4). Уточнені варіанти моделей оболонок цих авторів ще додатково враховують лінійний член у виразі для переміщення w .

Спорідненою до методу гіпотез є модель прикладної теорії оболонок обертання, запропонована В.В. Пікулем [102]. Основною суттю цієї моделі є задання закону розподілу деформації поперечного зсуву та обтиснення у вигляді, близькому до моделі В.Г. Піскунова. З іншого боку, напруження поперечного зсуву шукаються шляхом інтегрування відповідних рівнянь рівноваги тривимірної теорії пружності з подальшим визначенням відповідних деформацій. Далі, визначені двома способами, деформації поперечного зсуву порівнюються шляхом повного задоволення диференціальних рівнянь рівноваги, а також крайових умов на лицевих поверхнях і частково – граничних умов на торцевій поверхні. Використовуючи так званий “метод нев’язок”, автор пропонує оцінювати границі застосування розробленої ним прикладної теорії оболонок і пластин.

Необхідно зауважити, що одночасно з кінематичними моделями розкладу переміщень у вигляді притятих степеневих рядів за поперечною координатою, найбільш загальне обґрунтування яких наведено М.О. Кільчевським [64,65], існує ще один поширений метод розгорнення переміщень і напружень у ряди за ортогональними поліномами Лежандра. Вперше він був запропонований І.Н. Векуа [34] та використаний у роботах В.І. Гуляєва, В.А. Баженова і П.П. Лизунова [52,53], А.В. Плеханова і А.П. Прусакова [109,110], А.Г. Зеленського,

А.П. Прусакова, М.Г. Вовченка [59], В.А. Сала [135], О.С. Сахарова, В.І. Кислоокого, А.Я. Козака [136,137], М.А. Сухорольського [27], Хатчинс і Соляр [152], І.Ю. Хоми [155], В.К.Чибірякова [158] та інших. Таке представлення дозволяє формалізувати процес переходу від тривимірної задачі теорії пружності до двовимірної прикладної теорії оболонок і пластин, зручної для числової реалізації крайових задач теорії оболонок. В.К. Чибіряков [158] розвинув метод І.Н. Векуа для розрахунку плит, побудувавши ефективні числово-аналітичні процедури їх розрахунку. В оглядовій роботі Ю.М. Неміша та І.Ю.Хоми [86] виконані систематизація та аналіз існуючих у науковій літературі різних варіантів теорій оболонок і пластин, в основі яких лежить метод розкладу шуканих функцій в ряди за поліномами Лежандра по товщинній координаті z .

У монографії В.А. Сала [135] запропоновано теоретично обґрунтований і чисельно реалізований метод розв'язування крайових задач із визначення напружено-деформованого стану статично навантажених нетонких ортотропних оболонок. Згаданий метод базується на застосуванні загальних рівнянь математичної теорії пружності, змішаного варіаційного принципу Е.Рейсснера [1,125], методу І.М. Векуа [34], за допомогою яких записані розв'язки, що точно задовільняють довільним варіантам граничних умов розглядуваних крайових задач. Практично, за допомогою методу, розробленого

В.А. Салом, можна реалізувати всі можливі моделі оболонок і пластин, дослідити їх точність, порівнявши з відповідним результатом теорії пружності, який також одержується одночасно цим самим методом.

Останній метод, у більшості процедур, можна вже віднести не до методу гіпотез, а до аналітичного методу наближення тривимірної задачі теорії пружності шляхом послідовного зведення її до двовимірної. У таких випадках будь-які гіпотези чи спрощуючі припущення вже не вводяться.

Найпоширенішим аналітичним методом безпосереднього інтегрування рівнянь тривимірної задачі теорії пружності є асимптотичний. Він базується на розвиненні в асимптотичні ряди за малим параметром (відносною товщини оболонки) та виділенні рівнянь, які описують основний напружений стан, що повільно змінюється, і місцевий, швидко затухаючий, який виникає біля збурюючих факторів. Ці напружено-деформовані стани ще називають крайовими ефектами. У чистому вигляді такий метод отримав розвиток у роботах Л.А. Агаловяна [2], В.М. Александрова [3,4], А.П. Гольденвейзера [42,43] та ін. Основним недоліком цього методу вважають його обмеження тільки одним малим параметром за відсутності інших, які були б пов'язані з фізичними властивостями (характеристиками) оболонки чи характеристиками способу навантаження.

Символічний метод переходу до двовимірних рівнянь теорії оболонок і пластин розроблений у роботах А.І. Лур'є [73], С.Г. Лехніцького [71], В.К. Прокопова [117] та інших. Базовими функціями використано поліноми Лежандра. Побудована скінченна система розрахункових рівнянь, яка сформульована у відповідну наближену теорію оболонок N -го порядку.

А.П. Прусаковим [119] та А.В. Плехановим [109,110] запропонований енергоасимптотичний метод побудови двовимірних рівнянь оболонок і пластин. Як і у працях попередніх авторів, характеристики напружено-деформованого стану розкладаються в ряди за поліномами Лежандра, а для знаходження коефіцієнтів розкладу застосовується варіаційний принцип Рейсснера. Разом з тим, використовується асимптотичний метод розкладу напруженого стану на основний, вихровий та потенціальний. При цьому те чи інше наближення енергоасимптотичного методу відповідає тій чи іншій моделі пластин та оболонок. Перше наближення цього методу відповідає теорії пластин Е. Рейсснера. Задачі, розв'язані таким методом, демонструють його високу точність навіть за невеликого числа наближень.

Інші моделі та методи розвитку теорій шаруватих пластин і оболонок наводяться в обширних оглядових роботах В.А.Баженова, М.П. Семенюка та В.М. Трача [13], В.А. Баженова, В.І. Гуляєва та ін. [14,52,53].

1.2. Проблеми застосування неklasичних моделей оболонок і пластин за дії високоградієнтних навантажень і контактних взаємодій

Проблема визначення напружено-деформованого стану (НДС) у тонкостінних оболонкових конструкціях є хоча й досить складною, але вже досить вивченою за допомогою аналітичних і числових методів. Разом з тим, у таких випадках, як знаходження НДС в околі точок прикладання високоградієнтних навантажень або в околі тріщин, включень чи отворів, потрібне застосування точніших моделей оболонок, що враховують ефекти поперечного зсуву та обтиснення.

Наприклад, у випадку дії локальних навантажень на пологі оболонки В. Васильєвим [31], С. Лукасевичем [72] та ін. показано, що в околі точок прикладання навантажень класична теорія оболонок дає значні похибки при визначенні напружень і переміщень. Врахування ними в основних рівняннях теорії оболонок впливу деформацій поперечного зсуву дало результати, близькі до розв'язків задач тривимірної теорії пружності. Графіки, що були побудовані на основі уточненої моделі, добре узгоджуються з експериментальними результатами.

На відміну від класичної теорії Кірхгофа-Лява, в уточнених теоріях у формулах для визначення радіальних переміщень оболонок з'являється додатковий сингулярний

член, що відображає вплив деформації поперечного зсуву. Незважаючи на те, що він вносить особливість у точці прикладання зосередженої сили, значення переміщень в околі цієї точки дуже близькі до значень просторової задачі теорії пружності. Величина уточнення до класичної теорії Кірхгофа-Лява залежить від величини відношення $Eh^2/(GR^2)$ у порівнянні з одиницею. Тобто, це уточнення може бути значним навіть для малих відношень h/R , якщо відношення модулів пружності E/G є великими. До такого ж висновку прийшли також Я.М. Григоренко, Г.П. Голуб, А.Т. Василенко та Г.П. Урусова [30,46] при аналізі напруженого стану осесиметричних оболонок під дією локалізованого навантаження. Було показано, що врахування деформацій поперечного зсуву призводить до більшої зміни переміщень, ніж напружень, у порівнянні з класичною теорією недеформівних нормалей.

Згадані формули непридатні для визначення переміщень у тих точках оболонки, які близькі до точок прикладання зосередженого навантаження. Цю частину прогину необхідно визначати наближено, як для товстої пластини, що лежить на пружній основі. Згинальні моменти та поперечні сили в особливих точках також прямують до нескінченності, а в околі цих точок їх можна визначати за допомогою спрощених формул [72,165].

Отримані теоретичні результати для пологої сферичної оболонки, навантаженої у полюсі зосередженою силою, були підтвержені А.С. Тусом [190] експериментально. У цих експериментах також оцінено вплив граничних умов і розмірів оболонки на напруження та переміщення в околі точки навантаження. Виявилось, що експериментальні переміщення більше відрізняються від теоретичних, ніж напруження. У роботах В. Васильєва [31], Л. Доннела [58], С. Лукасевича [72], А. Лурье [73] та ін. було показано, що для оболонки, навантаженої зосередженими нормальними силами, у точках, віддалених від місця прикладення навантаження, величини як напруження, так і переміщення узгоджуються з результатами, одержаними з рівнянь неklasичних моделей оболонок. Разом з тим, в околі точки прикладання навантаження задачу визначення НДС необхідно розглядати як тривимірну. Тому розглянуті вище проблеми, що вимагають застосування розрахункових рівнянь неklasичних моделей оболонок, можна розв'язувати й за допомогою класичної моделі Кіргофа-Лява, але з певними кількісними похибками. При цьому похибки зменшуються пропорційно до зменшення величини параметра $Eh^2 / (G'R^2)$. Вплив деформацій поперечного обтиснення, що залежать від відношення модулів E/E' , у таких задачах був значно меншим від впливу деформацій поперечного зсуву. Разом з тим, існують класи задач механіки деформівного твердого тіла,

де врахування деформацій поперечного обтиснення є необхідним і визначальним у розв'язках. До таких задач відносяться задачі про контактну взаємодію пластин та оболонок із жорсткими штампами, а також про взаємний контакт між собою.

Найважливішою проблемою цих задач є визначення закону розподілу контактного тиску під штампами. Від правильності розв'язку цієї проблеми залежить достовірність визначення напружено-деформованого стану в оболонці.

Перші розв'язки задач про контакт пружних тіл належать Г. Герцу (1881р.). Сучасний стан цієї проблеми достатньо висвітлений у монографіях В.М. Александрова, С.М. Мхітаряна, Б.Л. Ромаліса, [3,4], Л.А. Галіна [40], Е.І. Григолюка та В.М. Толкачева [44], Б.Я. Кантора [61], В.І. Моссаковського, В.С. Гудрамовича та Є.М. Макеева [82,83], Б.Л. Пелеха і М.А. Сухорольського [99], Б.Л. Пелеха та В.І. Шваб'юка [96], Б.Л. Пелеха, О.В. Максимука, І.М. Коровайчука [97], Г.Я. Попова [113,114], С.Н. Карасева та Ю.П. Артюхіна [63] та ін.

М.А. Сухорольським, Я.Й. Бураком та Ю.К. Рудавським [27] побудовано узагальнені розв'язки контактних задач теорії оболонок Кірхгофа-Лява та різних теорій оболонок типу Тимошенка через подання функцій Гріна частинними сумами рядів Фур'є та методу інтегральних рівнянь. Розглянуто задачі про взаємодію оболонок із жорсткими тілами, а також випадки,

коли між ними є лінійно- або нелінійно-пружні проміжні шари. Досліджено розподіл контактних напружень.

Задача визначення контактного тиску під штампом, що взаємодіє із тонкою пластинкою чи оболонкою та описується диференціальними рівняннями класичної теорії Кіргофа-Лява, зводиться до розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду [74,114]

$$\int_{\omega} G(A, B)q(B)d\omega = f(A), \quad A \in \omega, \quad (1.7)$$

де $G(A, B)$ – функція Гріна, що визначає прогин оболонки (пластини) в точці A при дії зосередженої сили в точці B ; $f(A)$ – функція, що визначає переміщення штампа як твердого тіла, а також описує форму основи штампа.

Використання теорії Кірхгофа-Лява призводить до визначення контактних напружень між оболонкою (пластиною) і штампом у вигляді розв'язку, коли реактивний тиск є розподіленою по лінії межі контакту зосередженою силою. Згідно цього розв'язку тиск під штампом у центрі області контакту вважається рівним нулю, що суперечить фізичному змісту задачі.

У роботах В.С. Гудрамовича, В.І. Моссаковського та Є.М. Макеева [82,83] був запропонований метод розв'язування задач про контактні взаємодії з жорсткими, пружними та пружно-пластичними основами, де використовуються рівняння оболонок Муштарі-Доннела-Власова [37,58,84]. Ними вперше було

розв'язано задачу для пружного кругового шпангоута, що взаємодіє із циліндричною оболонкою, де контактний тиск був представлений розподіленою уздовж межі зони контакту погонною силою та розподіленим тиском.

М.М. Філоненко-Бородич у задачі згину тонкого стрижня по жорсткому лекалу [151] скористався уточненим рівнянням прогинів балки типу Тимошенка, де враховується вплив деформації поперечного зсуву. У результаті, контактний тиск по всій довжині стрижня став розподіленим і відмінним від нуля навіть для жорстких контактів без кутових точок. Цей факт суперечить фізичному змістові задачі, а також результатам Л. Кіра та Л. Сілви [179], А. Улітка та М. Моргунова [149], В. Гембари, Я. Максимовича та В. Шваб'юка [41], одержаним на базі рівнянь плоскої задачі теорії пружності. У роботі [41] фундаментальний розв'язок контактної задачі для смуги записано через комплексні потенціали Мусхелішвілі у вигляді розв'язків типу Гріна. Одержане таким методом інтегральне рівняння розв'язується із застосуванням методу механічних квадратур. Розроблена методика є універсальнішою порівняно з роботою Л. Кіра та М. Сілви [179], у якій достовірні результати гарантуються тільки для великих відношень довжини смуги до її висоти ($L/H \gg 1$).

Згадана задача розв'язана також і в постановці уточненої моделі трансверсально-ізотропних плит [96], що враховує

деформації поперечного зсуву та обтиснення. Порівняння одержаних результатів із відомими точними розв'язками для плоскої задачі теорії пружності показує, що запропонований варіант уточненої теорії дає результати, досить близькі до точних, а у випадках великих областей контакту – майже повністю співпадаючі.

Аналітичні дослідження контактних задач для циліндричної оболонки на базі неklasичної моделі типу Тимошенка були проведені Б.Л. Пелехом і М.А. Сухорольським [99]. У цьому випадку осесиметрична задача зводилась до інтегрального рівняння Вольтерра першого роду відносно невідомого контактного тиску. Ядром цього рівняння були функції типу Крилова, а розв'язок був знайдений за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. На прикладі дії на оболонку гладких штампів і штампів із кутовими точками авторами було показано, що врахування деформацій поперечного зсуву дещо згладжує фізичні невідповідності стосовно розподілу контактного тиску, але все одно не відповідає реальному змісту задачі. Для штампа з кутовими точками отримано важливий результат, який заключається в тому, що величина внутрішньої області контакту залежить тільки від геометричних і пружних характеристик оболонки та ширини штампа та не залежить від зовнішнього навантаження, що діє на оболонку.

Математично та фізично коректною контактна задача теорії оболонок стала можливою тільки у випадку врахування деформації поперечного обтиснення, тобто врахування прямої залежності між контактним тиском і переміщенням поверхні контакту оболонки. При такому підході розв'язок задачі зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду [74, 113,114]

$$Kq(A) + \int_{\omega} G(A,B)q(B)d\omega = f(A), \quad (1.8)$$

де K – параметр регуляризації, який кількісно характеризує властивості поверхні контакту оболонки, що має властивості коефіцієнта цієї поверхні.

Ю.П. Артюхин, С.М. Карасьов [9,63], М.В. Блох [19,20], Е.І. Григолюк і В.М. Толкачев [44], Б.Л. Пелех і М.А. Сухорольський [99], В.Г. Піскунов, В.К. Присяжнюк [105,116], В.І. Шваб'юк [96,108,171], Д.Г. Хлебніков, О.М. Паращак та І.А. Прокопишин [154] запропонували додатково до рівнянь згину ввести залежність між контактним тиском і переміщенням серединної поверхні оболонки (пластини). Остання залежність отримується з умови, що зовнішня поверхня оболонки (пластини) при тісному контакті зі штампом мусить повторити її форму

$$W(h) = w(\alpha, \beta) + K \cdot q(\alpha, \beta) + O(\omega^{(n)}) = f(\alpha, \beta), \quad (1.9)$$

де $O(\omega^{(n)})$ – величина, що залежить від вищих похідних ($n > 1$) від переміщення серединної поверхні і якою в більшості випадків нехтують.

При підстановці залежності (1.9) у систему рівнянь згину, авторами [108,171] отримано диференційне рівняння відносно невідомого контактного тиску. Порядок такого рівняння вищий, ніж у прикладних теоріях типу Тимошенка і рівний четвертому. Його розв’язок має більше сталих диференціювання, тому дозволяє краще задовільняти граничним умовам на межі штампа, наприклад, отримувати нульові значення контактної тиску на границі області контакту гладкого штампа з оболонкою чи плитою. Останнє наближає його до розв’язків відповідних задач теорії пружності. За допомогою розробленої методики отримано розв’язки низки контактних задач для циліндричних оболонок, пластин і стрижнів.

Інші варіанти розв’язку контактних задач у лінійній та нелінійній постановках запропоновані в роботах [3,61,74], де використано відомі вирази для нормального переміщення шару малої товщини та умову непроникнення штампа в оболонку. Величину області контакту ω в контактних задачах (де вона невідома) пропонується шукати з умови

$$q(A) \geq 0, A \in \omega. \quad (1.10)$$

Контактне напруження $q(A)$ у цих роботах вважається лінійним відносно величини поперечного обтиснення оболонки в зоні контакту з точністю до величин із похідними четвертого та вище порядків, які перемножуються на малі коефіцієнти.

Застосування моделей оболонок, що враховують поперечне обтиснення, може бути ефективним і для розв'язування контактних задач для оболонок і плит, що лежать на пружних чи жорстких основах, або для оболонок із заповнювачем. За цією методикою у роботах [24,96,168,171] розглянуто низку осесиметричних задач для розподілених за певним законом навантажень, що діють на трансверсально-ізотропну плиту, а також зосередженої сили, що згинає плиту на пружному півпросторі. Одержано розв'язок осесиметричної контактної задачі для трансверсально - ізотропної плити на пружній основі Вінклера під дією жорсткого штамп, а також задача згину жорстким штампом трансверсально-ізотропної плити на жорсткому фундаменті з вирізом. Вирази для переміщень, згинальних моментів і поперечної сили записуються через відповідні функції Бесселя і Ганкеля від комплексного аргументу. Показано, що на величини контактних переміщень і тисків суттєво впливає поперечна анізотропія плити, а також величина області контакту — чим більший її розмір, тим більше цей характер відрізняється від розподілу згідно закону Герца. Для нульових величин областей контакту штамп з плитою

знайдені розв'язки вироджуються у розв'язок для трансверсально - ізотропної плити під дією зосередженої сили. У часткових випадках відношень пружних сталей для ізотропної плити легко отримуються відомі результати Г. Герца та С. Лукасевича.

1.3. Особливості розрахунку стійкості ортотропних оболонок середньої товщини

Проблема стійкості рівноваги тонких оболонок у механіці деформівного твердого тіла стала вирішуватись на базі класичних рівнянь теорій стрижнів, пластин і оболонок. З початку минулого століття, коли були закладені основи теорії та отримані фундаментальні результати, більшість задач стійкості було розв'язано у рамках концепції Ейлера.

Класична теорія стійкості оболонок була розвинута Лоренцом, Саутсвеллом, Тимошенком, Вольміром та іншими [39, 55, 148] на основі лінійної теорії малих прогинів оболонок. Ними була визначена величина верхнього критичного навантаження для стиснутої в осьовому напрямку замкнутої кругової циліндричної оболонки середньої довжини. Але порівняння теоретичних і експериментальних значень для критичних напружень за осьового стиску циліндричних оболонок показали автори [57, 58, 142], що класична теорія оболонок Кіргофа-Лява дає результати, які приблизно у два рази вищі за експериментальні. Як показали експериментальні та

теоретичні дослідження Л. Доннела [58] та У. Койтера [180], головною причиною таких невідповідностей є неврахування недосконалостей чи неідеальності поверхонь оболонок, до яких особливо чутливі тонкостінні оболонки з відношеннями $R/2h > 100$. У таких випадках необхідно користуватися нелінійними рівняннями теорії оболонок [12], а також ураховувати локальні недосконалості на поверхнях цих оболонок. У випадках тонких композитних оболонок та оболонок середньої товщини ($R/2h \leq 50$) ще однією з причин таких розходжень є неточність гіпотез, на основі яких побудована класична теорія оболонок Кіргофа-Лява. Тому для розв'язування задач стійкості оболонок стали застосовувати так звані зсувні моделі типу С.П.Тимошенка [18,28,98,126], що враховували деформації поперечного зсуву.

Дослідження, проведені О.М. Гузем та І.Ю. Бабичем [11,12,50,51], Б.Л. Пелехом [98], Г.А. Ваніним та М.П. Семенюком [28], В.В. Васильєвим [31], О.О. Рассказовим, І.І.Соколовською, М.О.Шульгою[124] та іншими, показали, що ця різниця суттєво зменшиться, якщо до задач стійкості оболонок і стрижнів застосувати моделі, які враховують понижену зсувну жорсткість матеріалу, його структурні недосконалості, а також відхилення геометричного характеру в розподілі навантажень, підкріплень і початкових прогинів. Цими

авторами при розрахунках в основному були використані теорії типу Тимошенка.

Разом з тим, випадки втрати стійкості циліндричними оболонками за однорідного бокового стиску, зумовленого зовнішнім розподіленим тиском (внутрішнім вакуумом), відрізняються від випадку осьового стиску тим, що за бокового тиску багато хвиль виникає для дуже коротких оболонок, унаслідок чого не можна ігнорувати граничними умовами на краях. Крім цього, є ще один випадок, який відрізняється від попередніх і часто зустрічається на практиці, коли зовнішній тиск прикладений не тільки до бокової поверхні циліндричної оболонки, а й до закритих торців оболонки (вакуумні камери, корпуси підводних човнів). У класичній постановці ці випадки розглядалися С. Тимошенком [148], Х. Муштарі [84], Л.Доннелом [58], О. Вольміром [39] та іншими авторами.

В уточненій постановці, на основі рівнянь оболонок типу Тимошенка, згадані задачі розглядалися у роботах [18,28,31,50,140] та інших. У всіх випадках, що розглядалися (і теоретичних, і експериментальних), у поздовжньому напрямку утворювалася тільки одна півхвиля, а величина критичного тиску зменшувалася разом із зниженням поперечної жорсткості оболонки. При цьому необхідно зауважити, що мінімізація функції критичного тиску методом формального порівнювання

першої похідної цієї функції за дискретним параметром, у який входить кількість хвиль (чи півхвиль), хоча й не є до кінця коректною з математичної точки зору, призводила до досить простих і точних (у межах цих теорій) формул для критичного тиску. Для досконаліших моделей оболонок, із вищим сумарним порядком розрахункових диференціальних рівнянь, знайти вираз для критичної кількості хвиль (півхвиль) у вигляді замкненої формули стає неможливим, тому користуються або методом перебору чисел кількості хвиль [11,50] або графічним методом [60]. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок розглядаються в обширній монографії В.А. Баженова, М.П. Семенюка та В.М. Трача [13] та інших роботах цієї наукової школи. Досліджуються явища взаємозв'язку деформацій розтягу, зсуву, згину та кручення в анізотропній оболонці при її докритичному деформуванні, втраті стійкості та в закритичному стані.

Разом з тим, О.М. Гузем та І.Ю. Бабичем [51] була побудована тривимірною лінеаризована теорія стійкості деформованих пружних і непружних тіл. Досліджувалися питання і межі застосування класичної та уточнених теорій оболонок і пластин із анізотропних матеріалів. Отримані розв'язки задач у рамках тривимірної теорії можна вважати еталонними при побудові інженерних методів розрахунку, які

дозволяють оцінити результати як класичних, так і уточнених теорій оболонок із анізотропних матеріалів. Ними також досліджувався вплив поперечного обтиснення на межу критичного тиску та величини похибок прикладних моделей оболонок, пластин і стрижнів, що не враховували поперечного обтиснення, які залежать від величини відношення модулів пружності в поздовжньому та поперечному напрямках та значень коефіцієнтів Пуассона.

Вплив поперечного обтиснення у задачах стійкості циліндричних ортотропних оболонок і композитних кілець детально досліджувався у роботах авторів [128,131,167], де застосовувалися диференціальні рівняння уточненої моделі, що враховує як деформацію поперечного зсуву, так і деформацію поперечного обтиснення. Показано, що вплив деформації поперечного обтиснення на величину критичної сили у кількісному значенні менший від впливу поперечного зсуву та діє у напрямку, протилежному до ефекту поперечного зсуву.

Згаданими вище дослідженнями показано також, що класична теорія Кіргофа-Лява в теорії стійкості тонкостінних ортотропних циліндричних оболонок є асимптотично точною. Але ця теорія не може застосовуватися для оболонок із матеріалів з низькою зсувною жорсткістю та оболонок середньої товщини, де похибки за певних товщин і відношень модулів пружності можуть досягати 40%.

1.4. Дослідження напружено-деформованого стану оболонки і пластин із отворами та тріщинами

Значні особливості у розрахунку ортотропних оболонки середньої товщини виникають при визначенні напружено-деформованого стану в околі криволінійних отворів та включень для оболонки і пластин, виготовлених із полімерних композитних матеріалів типу армованих пластмас. Шляхом гомогенізації цих матеріалів відповідні тонкостінні конструкції найчастіше можна моделювати однорідними анізотропними, що містять ті ж конструкційні елементи: отвори, включення, тріщини тощо.

У цьому випадку, з точки зору інженерного застосування, необхідно використовувати моделі оболонки, які б урахували специфічні особливості механічної поведінки таких матеріалів, які пов'язані з їх різкою анізотропією та податливістю на зсув. Результати функціональних досліджень у цьому напрямку наведені в монографіях та оглядах О.С. Космодам'янського та В.А. Шалдирвана [159], Е.І. Григолюка, В.М. Толкачева [44], О.М. Гузя, І.С. Чернишенка, Вал. М. Чехова, Вік. М. Чехова та К.І. Шнеренка [80], С.Г. Лехніцького [71], Б.Л. Пелеха та А.О. Сяського [100].

С.Г. Лехніцьким [71] було вперше досліджено вплив еліптичного отвору на напружено-деформований стан в анізотропній пластинці. Цей розв'язок дозволяє граничним переходом одержати розв'язок для тріщини. Після

С.Г. Лехніцького задачу для еліптичного отвору детально вивчив Г.М. Савін [133], який здійснив граничні переходи для ізотропного та ортотропного матеріалів. На основі цих переходів Дж. Ірвін [175] установив залежність між коефіцієнтом інтенсивності напружень (КІН), кривиною отвору та коефіцієнтом концентрації напружень. Так само, як і у Г.М. Савіна [133], побудовано фундаментальний розв'язок для безмежної пластини з еліптичним отвором і на його основі вивчено задачу про внутрішній і крайовий еліптичний отвір та відповідні тріщини.

У роботах Б.Л. Пелеха, А.О. Сяського та Є.І. Луня [100] досліджується вплив ортотропії та поперечного зсуву на напружено-деформований стан у сферичних і циліндричних оболонках, послаблених круговими отворами. Показано, що вплив ортотропії матеріалу оболонки на розподіл напружено-деформованого стану в околі отворів на порядок вищий від впливу поперечного зсуву. Останній фактор істотно впливає на моменти і є незначним для зусиль. Отримані результати і якісно, і кількісно узгоджуються з результатами теорії пружності та експериментальними даними.

Задачі концентрації напружено-деформованого стану в околі отворів і включень у пластинах та оболонках значно ускладнюються при появі біля них тріщин і розрізів. У цих випадках біля вістря тріщини виникає істотно тривимірний

напружений стан, який можна описати тільки на базі рівнянь теорії пружності. Спочатку праці з теорії пружності для анізотропних тіл із тріщинами не розглядали тріщину як об'єкт механіки руйнування, тобто не використовували поняття КІН та відповідні асимптотичні залежності поблизу вістря тріщини. Вперше ці поняття для пластини були розглянуті Дж. Сі та Дж. Лібовіцем [143,187,188], В.В. Панасюком, М.П. Савруком, О.П. Дацишин [92], І.П. Шацьким [160] та ін. Для аналізу були використані класичні рівняння теорії згину Кірхгофа-Лява та метод комплексної змінної М.І. Мусхелішвілі, що дозволило одержати КІН для різної конфігурації тріщин. Досить детально ці питання розглянуті у монографії Л.Т. Бережницького, М.В. Делявського та В.В. Панасюка [15], де систематизовані та синтезовані основні результати з визначення КІН для широкого класу криволінійних дефектів у випадках дії на пластину згинальних і крутних моментів, поперечних сил, а також теплових потоків. Було досліджено вплив форми пластини, граничних умов, анізотропії матеріалу, а також відношення довжини тріщини до товщини пластини на величину КІН, що визначають крихке руйнування пластинчастих елементів.

Для точнішого дослідження напружено-деформованого стану пластини в околі кінців тріщини Ванг [193] застосував досконалішу теорію згину пластини Е. Рейсснера. На базі рівнянь цієї теорії він розв'язав задачу про всесторонній згин

тонкої нескінченної ізотропної пластини з наскрізною тріщиною. Було встановлено, що коефіцієнти інтенсивності напружень, одержані за теоріями Кірхгофа ($K_I^{(k)}$) та Рейсснера ($K_I^{(P)}$) при $h/l \rightarrow 0$ відрізняються тільки постійним множником

$$K_I^{(P)} = \frac{1+\nu}{3+\nu} K_I^{(k)}, \quad (1.12)$$

що залежить лише від коефіцієнта Пуассона і не залежить від виду навантаження. Дослідження Л.Т. Бережницького, М.В. Делявського, В.В. Панасюка [15], В.К. Опанасовича, М.В. Делявського [88] показали, що у випадку трансверсально-ізотропних пластин коефіцієнт інтенсивності напружень $K_I^{(P)}$ залежить ще й від відношення пружних характеристик у поперечному напрямку, зокрема від відношення E/G' , яке для сучасних композитних матеріалів може змінюватися в широких межах.

Недоліком уточнених теорій Рейсснера та типу Тимошенка, як і класичної теорії згину пластин, є задання розподілу по товщині компонент тензора напружень і вектора переміщень за лінійним законом, що суперечить реальному розподілу в околі наявних концентраторів. Разом з тим, практично відсутні роботи, які б досліджували наявність впливу нелінійності розподілу напружень і переміщень по товщині, а також впливу поперечного обтиснення на НДС в околі тріщин.

У роботах [129,130,170] названий недолік усувається за допомогою уточненої моделі [163,166], де розподіл напружень і переміщень по товщині є нелінійним. Авторами узагальнюється і розвивається метод лінійного спряження стосовно ортотропних пластин при розв'язуванні основних крайових задач, а також для пластин із тріщинами. Розв'язується задача для ортотропної пластини, послабленої системою наскрізних розрізів - тріщин, розміщених уздовж прямої. За аналогією з відомими формулами [15,120] для ізотропних пластин записується вираз для комплексного коефіцієнта інтенсивності напружень для ортотропного матеріалу. Отримані значення коефіцієнтів інтенсивності напружень у квадратурах для випадку однієї тріщини.

Ж. Сі та Р. Гартранфт [188] на основі варіаційних принципів отримали нову систему диференціальних рівнянь, де розподіл напружень і переміщень в околі тріщини визначається шляхом використання рівнянь теорії пружності. Таким чином, задача розрахунку пластин в околі тріщини стає істотно тривимірною. Ж. Сі [187] також запропоновано методу визначення напрямку поширення вторинної тріщини. Згідно із його S-теорією, нестабільний ріст тріщини починається при досягненні густиною енергії деформації S деякого критичного значення S_c , яке трактують як в'язкість руйнування матеріалу. При цьому стверджується, що

руйнування завжди починається із поверхневого шару пластини, коли до неї прикладені згинальні зусилля.

На порядок затребуванішими та складнішими є задачі про дослідження НДС біля тріщин в оболонках. Одними з перших у цьому напрямку були роботи Е.С. Фоліаса [176], С.Я. Яреми та М.П. Саврука [134], І.В. Ориняка [89], В.А. Осадчука [90], М.М. Николишина [87], Р.М. Кушніра, В.А. Осадчука та М.М. Николишина [69]. Несуча здатність циліндричних оболонок з отворами різної форми і розмірів експериментально досліджена А.П. Дзюбою, Є.Ф. Прокопало та П.А. Дзюбою у монографії [57].

Е.С. Фоліас уперше розв'язав задачу для сферичної оболонки з меридіанальною тріщиною, що знаходиться під дією внутрішнього тиску, а також симетричні задачі для циліндричної оболонки з поздовжньою чи поперечною тріщиною. Аналогічні задачі для циліндричної оболонки, незалежно від Е. Фоліаса, були розв'язані С.Я. Яремою та М.П. Савруком. Ними ж у роботі [134] методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано розв'язки задач про напружений стан в околі довільно орієнтованої тріщини в циліндричній та двоякої кривини оболонках при довільному навантаженні на тріщину. У вказаних вище випадках дослідження проводились на базі розрахункових рівнянь теорії пологих оболонок Кірхгофа-Лява. Використовуючи метод дисторсій, Я.С. Підстригач та

В.О. Осадчук [90,101] отримали систему інтегральних рівнянь для визначення зусиль і моментів у пологій та замкненій циліндричній оболонках із поперечною та поздовжньою тріщинами. Пізніше цей метод був поширений на замкнені циліндричні оболонки з системою паралельних періодично розміщених по колу тріщин, а також для оболонок типу Тимошенка. Отримані цими авторами результати важливі ще й тим, що були знайдені залежності для визначення тримкості оболонок. Особливо це стосується циліндричних оболонок, які можуть представляти собою частини трубопроводів, наповнених різного виду промисловими продуктами. Дефекти, що спостерігаються у матеріалі труб, можуть виникати як при спорудженні магістральних трубопроводів, так і в процесі їхньої експлуатації при дії змінних температурних полів і механічних навантажень. Тріщини можуть бути і ненаскрізними, але якщо їх глибина досягає певної величини, то тоді їх вважають наскрізними. Так, досліди, проведені для композитних оболонок, показують, що наскрізними можна вважати тріщини, глибина яких перевищує 0,7 товщини стінки оболонки.

Е.С. Фоліас [176] запропонував визначати граничне напруження для ізотропної оболонки з тріщиною через граничне напруження пластини з тріщиною за допомогою залежності

$$\sigma_c^{об.} = \psi \cdot \sigma_c^{пл.} \quad (1.13)$$

де $\psi = \left[1 + \alpha l^2 / (Rh)\right]^{-\frac{1}{2}}$, α – коефіцієнт, що залежить від напрямку тріщини по відношенню до поздовжньої осі циліндричної оболонки: $\alpha = \frac{\pi}{32} \sqrt{3(1-\nu^2)}$ – для поперечної тріщини, $\alpha = \frac{5\pi}{32} \sqrt{3(1-\nu^2)}$ – для поздовжньої тріщини; $2l$ – довжина тріщини, h , R – товщина та радіус кривини серединної поверхні циліндричної оболонки.

С.В. Серенсеном та Т.П. Зайцевим [139] коефіцієнт ψ застосовується для визначення граничних напружень у композитних оболонках із армованих пластиків, де замість коефіцієнта Пуассона ν використовується зведений коефіцієнт ν^* , що визначається із умови тонкостінності циліндра та збереження пружного потенціалу. Експериментальні дослідження на циліндричних оболонках із композитного матеріалу АГ-4С (1:2) показали хороше співпадання експериментальних точок із розрахунковими формулами.

У роботах [129,130,170] авторами було застосовано уточнену модель ортотропних оболонок середньої товщини [163], що враховує поперечний зсув та обтиснення, для обчислення КІН у циліндричній оболонці із внутрішньою поверхневою тріщиною. Для визначення КІН використовується розв'язок Ражу і Ньюмена [184], який був одержаний ними для плити і товстостінної труби під внутрішнім тиском. Отримані у

роботі результати порівнюються із відповідними результатами, одержаними числовими методами [190] та за допомогою емпіричних формул [184].

Крім розв'язків задач про напружений стан оболонок із тріщинами, які одержано в пружній постановці, значна кількість робіт присвячена урахуванню зони пластичних деформацій біля вершини тріщини. Першими у цьому напрямку вважаються роботи М.Я. Леонова та В.В. Панасюка [94], а також Д.С. Дагдейла [26,174] і А.А. Уелса [194]. У цих роботах уперше зроблено припущення, що береги на продовженні тріщини (фіктивної тріщини) взаємодіють до певної величини її розкриття у вершині – деякого критичного значення δ_c . Хоча у постановці задач цих авторів є певні розбіжності, але отримані результати співпадають. Тому ці моделі часто називають δ_c -моделями або КРТ-моделями.

В.А. Осадчуком та М.М. Николишиним [69,90] запропоновано узагальнений аналог δ_c -моделі, який дозволяє тривимірну пружно-пластичну задачу звести до двовимірної задачі про пружну рівновагу оболонки з наскрізною тріщиною невідомої довжини, навантаженої невідомими зусиллями та моментами, що задовольняють прийнятій умові пластичності для моментної теорії оболонок. Замість відомого коефіцієнта Фоліаса ними вводиться більш універсальна функція від параметра $\rho = l^2/(hR)$. Запропоновано визначати розкриття вершини

тріщини та довжину пластичної зони на її продовженні в циліндричних оболонках за формулами, отриманими для пластин, якщо в цих формулах напруження на лінії тріщини в оболонці без тріщини збільшити у $f_a(\rho)$ разів. Отримані розв'язки досить добре узгоджуються із результатами, одержаними іншими методами, та з експериментальними даними.

Продовженням та розширенням цих методів є монографія Р.М. Кушніра, М.М. Николишина та В.А. Осадчука [69], де розглядаються задачі для трансверсально-ізотропних і ортотропних оболонок із наскрізними та ненаскрізними тріщинами, а також задачі для кусково-однорідних та неоднорідних за товщиною ортотропних циліндричних оболонок типу Тимошенка із тріщинами. Числовий аналіз проводився для оболонки з однонаправлених склопластиків для різних випадків розміщення армувальних волокон відносно серединної поверхні оболонки. Досліджено вплив параметра зсувної жорсткості E/G' на відносне розкриття тріщини та довжини пластичної зони від відношення модулів пружності E_1/E_2 . Аналізувався вплив умов пластичності на розкриття вершини тріщини. Показано, що врахування поперечних деформацій більше впливає на НДС в оболонках із поздовжніми тріщинами, ніж із поперечними.

Ще одним ефективним методом визначення КІН у тонкостінних елементах різних типів геометрій є *комбінований метод вагових функцій*, запропонований І.В. Ориняком [89],

який удосконалив процедуру пошуку вагової функції у *методі вагових функцій* Петроскі та Ашенбаха [182]. Згадану вагову функцію вибирають у вигляді функції розкриття тріщини, викликаного зосередженою силою, прикладеною до протилежних берегів тріщини. Практично її використовують як множник при квадратному корені відстані від точки x до вершини тріщини.

Дещо інший підхід до визначення КІН для тріщин у циліндрах, оболонках і кільцях запропонований Чженом і Фінні [157], який дістав назву *методу податливості тріщини*. Згідно з цим методом тріщину розглядають як зосереджену податливість, де стрибок переміщень і кути повороту лінійно зв'язані зі значенням сили та моменту у перерізі з тріщиною. Згадані методи дозволили розв'язати низку задач [192] із визначення граничних навантажень для товстостінних циліндрів і тонких оболонок та кілець, пошкоджених поверхневими тріщинами.

Розв'язуванню просторових задач механіки для неоднорідних кругових і призматичних тіл складної форми з довільними граничними умовами напіваналітичним методом скінченних елементів присвячені дослідження С.О. Пискунова [104], яким, зокрема, розроблено новий метод обчислення J – інтеграла Черепанова - Райса в дискретних моделях.

РОЗДІЛ 2

ПОБУДОВА УТОЧНЕНОЇ МОДЕЛІ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ІЗ УРАХУВАННЯМ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ ТА ОБТИСНЕННЯ

Широке застосування оболонок із композитних матеріалів в якості несучих елементів конструкцій багатьох сучасних машин і споруд вимагає надійних методів їх розрахунку. Вдосконалення теорій і методів розрахунку композитних оболонок – важлива проблема механіки деформівного тіла. Для такого виду оболонок не можна застосувати класичні теорії, які базуються на гіпотезах Кірхгофа-Лява. Розвитку узагальнених теорій оболонок і пластин, які враховують поперечні деформації, присвячена ціла низка робіт [31,46,53,68,80,84, 86,98,120,123,138,155, 161-163, 181].

Разом з тим, урахування лише деформацій поперечного зсуву є недостатньою умовою для отримання фізично коректних розв'язків для деяких класів задач. Такими можуть бути як задачі про контактну взаємодію оболонок із жорсткими штампами, так і задачі про розрахунок оболонок і пластин середньої товщини.

У даному розділі побудовано систему рівнянь і співвідношень узагальненої моделі третього рівня (М3) ортотропних оболонок, які враховують деформації поперечного зсуву та обтиснення.

2.1. Основні співвідношення теорії пружності ортотропних оболонок

Розглянемо ортотропну оболонку сталої товщини $2h$, серединна поверхня якої відноситься до криволінійної системи координат α, β, z (рис. 2.1). Нехай α і β є криволінійними ортогональними координатами, які співпадають із лініями головних кривин координатної поверхні оболонки, а z є прямолінійною і перпендикулярною до ліній $\alpha = const$, $\beta = const$ і напрямлена по зовнішній нормалі до серединної поверхні.

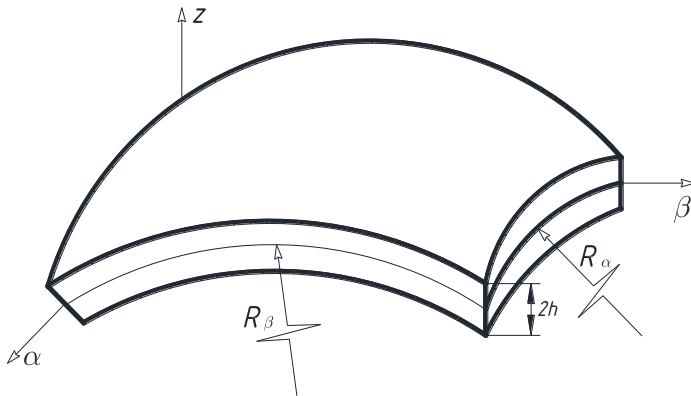


Рис 2.1. Загальний вид елемента оболонки

Коефіцієнти Ламе у вибраній триортогональній системі координат мають вигляд:

$$H_{\alpha} = A_{\alpha}(1 + k_{\alpha}z), \quad H_{\beta} = A_{\beta}(1 + k_{\beta}z), \quad H_z = 1, \quad (2.1)$$

де $A_\alpha = A_\alpha(\alpha, \beta)$, $A_\beta = A_\beta(\alpha, \beta)$, – коефіцієнти першої квадратичної форми координатної поверхні, $k_\alpha = k_\alpha(\alpha, \beta)$, $k_\beta = k_\beta(\alpha, \beta)$ – головні кривини координатної поверхні оболонки на лініях відповідно $\alpha = const$, $\beta = const$.

Між коефіцієнтами Ламе існують залежності [5,42]

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} \cdot \frac{\partial H_\beta}{\partial z} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial \beta \partial z} = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial^2 H_\beta}{\partial \alpha \partial z} = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} \cdot \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha}.$$

Підставивши в (2.2) вирази (2.1) і вважаючи $\gamma = 0$, одержимо відомі рівняння Гауса-Кодацці [42]

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \right) - k_\alpha \cdot k_\beta \cdot A_\alpha \cdot A_\beta = 0, \quad (2.3)$$

З останніх двох рівнянь системи (2.2), (2.3) можна одержати

$$\frac{1}{H_\beta} \cdot \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} = \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta}, \quad \frac{1}{H_\alpha} \cdot \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} = \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha}. \quad (2.4)$$

Будемо вважати, що матеріал оболонки має три взаємно ортогональні площини пружної симетрії, які перпендикулярні до ортогональних координатних напрямків. Цей випадок має назву криволінійної ортотропії [5]. Закон Гука для такого матеріалу у вибраній системі координат α, β, z має вигляд

$$\begin{aligned}
e_{\alpha} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{\alpha} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{\beta} - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_z, \\
e_{\beta} &= \frac{1}{E_2} \sigma_{\beta} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_{\alpha} - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_z, \\
e_z &= \frac{1}{E_3} \sigma_z - \frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_{\alpha} - \frac{\nu_{32}}{E_2} \sigma_{\beta}, \\
e_{\alpha z} &= \frac{\tau_{\alpha z}}{G_{13}}, \quad e_{\beta z} = \frac{\tau_{\beta z}}{G_{23}}, \quad e_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{12}}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Тут e_i , e_{ij} , σ_i , τ_{ij} – нормальні та дотичні деформації і напруження, що діють у відповідних напрямках i , $j = \alpha, \beta, z$; E_1, E_2, E_3 – модулі Юнга в напрямках α, β, z ; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модулі зсуву, які характеризують зміну кутів між головними напрямками α і β , α і z , β і z ; $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{31}$ – коефіцієнти Пуассона, які характеризують зміну поперечних деформацій (перший індекс показує напрямок вкорочення (розширення), другий – напрямок дії сили). Між коефіцієнтами рівнянь (2.5) існують залежності:

$$E_1 \cdot \nu_{12} = E_2 \cdot \nu_{21}, \quad E_2 \cdot \nu_{23} = E_3 \cdot \nu_{32}, \quad E_1 \cdot \nu_{13} = E_3 \cdot \nu_{31}.$$

Розв'язуючи рівняння (2.5) відносно компонент напружень (окрім напруження σ_z , яке будемо вважати відомою функцією від зовнішнього навантаження), отримаємо

$$\sigma_{\alpha} = \tilde{E}_1 (e_{\alpha} + \nu_{12} e_{\beta}) + A_1 \sigma_z,$$

$$\sigma_{\beta} = \tilde{E}_2 (e_{\beta} + \nu_{21} e_{\alpha}) + A_2 \sigma_z, \quad (2.6)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = G_{12} e_{\alpha\beta}, \quad \tau_{\alpha z} = G_{13} e_{\alpha z}, \quad \tau_{\beta z} = G_{23} e_{\beta z},$$

де $\tilde{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}, \quad A_1 = \frac{\nu_{31} + \nu_{32} \cdot \nu_{21}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad (1 \rightarrow 2).$

Диференціальні рівняння рівноваги елемента оболонки в криволінійних координатах α, β, z із урахуванням закону парності дотичних напружень за $H_z = 1$, мають вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_{\beta} \sigma_{\alpha}) + \frac{1}{H_{\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (H_{\alpha}^2 \tau_{\alpha\beta}) - \sigma_{\beta} \cdot \frac{\partial H_{\beta}}{\partial \alpha} + \\ & + \frac{1}{H_{\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (H_{\alpha}^2 \cdot H_{\beta} \cdot \tau_{\alpha z}) + F_{\alpha} \cdot H_{\alpha} \cdot H_{\beta} = 0, \quad (\alpha \leftrightarrow \beta), \\ & \frac{\partial}{\partial z} (H_{\alpha} \cdot H_{\beta} \cdot \sigma_z) - \sigma_{\alpha} H_{\beta} \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial z} - \sigma_{\beta} H_{\alpha} \frac{\partial H_{\beta}}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_{\beta} \cdot \tau_{\alpha z}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_{\alpha} \cdot \tau_{\beta z}) + F_z \cdot H_{\alpha} \cdot H_{\beta} = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

де $F_{\alpha}, F_{\beta}, F_z$ – компоненти вектора об'ємної сили у відповідних координатних напрямках.

2.2. Постановка задачі. Гіпотези для переміщень і деформацій

В основу запропонованого варіанту теорії згину ортотропних оболонок покладена гіпотеза про можливість

розгортання компонент вектора пружних переміщень U, V, W довільної точки оболонки у вигляді притягнених рядів за вертикальною координатою z [161 - 163]:

$$\begin{aligned}
 U(\alpha, \beta, z) &= u(\alpha, \beta) + \sum_{k=1}^3 u_k \cdot z^k, \\
 V(\alpha, \beta, z) &= v(\alpha, \beta) + \sum_{k=1}^3 v_k \cdot z^k, \\
 W(\alpha, \beta, z) &= w(\alpha, \beta) + \sum_{k=1}^4 w_k \cdot z^k,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

де u, v, w – складові переміщення точок серединної поверхні оболонки в напрямках α, β, z ; $u_k(\alpha, \beta), v_k(\alpha, \beta), w_k(\alpha, \beta)$ – довільні функції, які необхідно визначити з рівнянь рівноваги елемента оболонки та граничних умов на її зовнішній і внутрішній ($z = \pm h$) поверхнях (рис. 2.2):

$$\begin{aligned}
 \sigma_z(h) &= -q^+(\alpha, \beta), \sigma_z(-h) = -q^-(\alpha, \beta); \\
 \tau_{\alpha z}(\alpha, \beta, \pm h) &= \tau_{\beta z}(\alpha, \beta, \pm h) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Слід зауважити, що представлення (2.8) є частковим випадком гіпотези про можливість розкладу вектора переміщень у вигляді нескінченних степеневих рядів за поперечною координатою z , вперше запропонованої Коші та Пуассоном і детально розробленої М.О. Кільчевським [64,65]. Формули (2.8)

повторено (без посилання на [161]) і в роботі [127], де для W приймається параметр $k=3$.

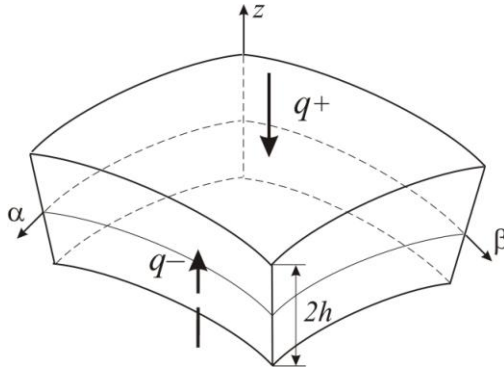


Рис. 2.2. Навантаження елемента оболонки

Прийmemo надалі, що вплив поперечного обтиснення на величини деформацій $e_{\alpha z}$ і $e_{\beta z}$ незначний, а коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини координатної поверхні оболонки є величинами сталими:

$$A_\alpha, A_\beta \approx const, \quad k_\alpha, k_\beta \approx const. \quad (2.10)$$

Тоді, враховуючи співвідношення Гаусса-Кодацці та попередні допущення, залежності між компонентами пружних переміщень і відповідними деформаціями будуть мати вигляд

$$e_\alpha = \frac{1}{H_\alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} + k_\alpha A_\alpha W \right), \quad \begin{pmatrix} \alpha \rightarrow \beta \\ U \rightarrow V \end{pmatrix};$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \beta}; \quad e_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad (2.11)$$

$$e_{\alpha z} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{H_\alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - k_\alpha A_\alpha U \right), \quad \left(\begin{array}{l} \alpha \rightarrow \beta \\ U \rightarrow V \end{array} \right);$$

$$H_\alpha = A_\alpha (1 + k_\alpha z), \quad (\alpha \rightarrow \beta).$$

Із тринадцяти незалежних складових вектора переміщень чотири можна знайти, виходячи з допущень С.О. Амбарцумяна [5], що поперечне нормальне напруження σ_z змінюється по товщині оболонки (з точністю до членів із множниками k_α , k_β) за законом кубічної параболи відносно зовнішнього навантаження

$$\sigma_z = q_1 + \frac{1}{4} \left(3 \frac{z}{h} - \frac{z^3}{h^3} \right) \cdot q_2, \quad (2.12)$$

де $q_1 = -\frac{1}{2}(q^+ + q^-)$, $q_2 = q^- - q^+$.

Шляхом інтегрування спрощеного рівняння із узагальненого закону Гука

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E_3} - A_1 e_\alpha^k - A_2 e_\beta^k,$$

де $e_\alpha^k = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{1}{A_\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} (z - k_\alpha z^2) + k_\alpha w$, $\left(\begin{array}{l} \alpha \leftrightarrow \beta \\ u \leftrightarrow v \end{array} \right)$, знаходимо

чотири складові радіального переміщення W :

$$w_1 = \frac{q_1}{E_3} - A_1 \left(\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_\alpha w \right) - A_2 \left(\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_\beta w \right),$$

$$w_2 = \frac{3}{8} \frac{q_2}{E_3 h} + \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{A_\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{A_2}{A_\beta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right), \quad (2.13)$$

$$w_3 = -\frac{1}{3} \left(\frac{k_\alpha A_1}{A_\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{k_\beta A_2}{A_\beta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right), \quad w_4 = -\frac{q_2}{16 \cdot h^3 E_3}.$$

Ще чотири складових знаходимо з умов (2.9) для дотичних напружень

$$u_1 = k_\alpha u - \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} - 3u_3 h^2 \left(1 - \frac{1}{3} h^2 k_\alpha^2 \right), \quad (2.14)$$

$$v_1 = k_\beta v - \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} - 3v_3 h^2 \left(1 - \frac{1}{3} h^2 k_\beta^2 \right),$$

$$u_2 = -u_3 \cdot h^2 \cdot k_\alpha, \quad v_2 = -v_3 \cdot h^2 \cdot k_\beta.$$

Таким чином, вирази для компонент пружних переміщень, з урахуванням формул (2.13), (2.14), зручно записати у вигляді:

$$U(\alpha, \beta, z) = u + z \cdot \gamma_\alpha + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} z - \frac{z^3}{h^2} + z^2 k_\alpha \right) \cdot \psi_\alpha,$$

$$V(\alpha, \beta, z) = v + z \cdot \gamma_\beta + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} z - \frac{z^3}{h^2} + z^2 k_\beta \right) \cdot \psi_\beta, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} W(\alpha, \beta, z) = & w + z \cdot \frac{q_1}{E_3} + \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{z^2}{h} - \frac{z^4}{6h^3} \right) \cdot \frac{q_2}{E_3} + \\ & + \left[\frac{A_1}{A_\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{A_2}{A_\beta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right] \frac{z^2}{2} - \left(\frac{A_1}{A_\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + A_1 k_\alpha w \right) z - \\ & - \left(\frac{A_2}{A_\beta^2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + A_2 k_\beta w \right) z - \frac{1}{3} \left(\frac{k_\alpha A_1}{A_\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{k_\beta A_2}{A_\beta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) z^3. \end{aligned}$$

Тут $\mathcal{Y}_\alpha, \mathcal{Y}_\beta = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h (U, V) \cdot z \cdot dz$ – узагальнені кути

повороту нормалі до серединної поверхні оболонки:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_\alpha &= k_\alpha \cdot u - \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3} \cdot h^2 \cdot k_\alpha^2 \right) \cdot \psi_\alpha; \\ \mathcal{Y}_\beta &= k_\beta \cdot v - \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3} \cdot h^2 \cdot k_\beta^2 \right) \cdot \psi_\beta; \\ \psi_\alpha &= -3 \cdot h^2 u_3; \quad \psi_\beta = -3 \cdot h^2 v_3;\end{aligned}\tag{2.16}$$

ψ_α, ψ_β – функції, які мають характер деформацій поперечного зсуву серединної поверхні оболонки.

Враховуючи (2.11), (2.15), загальні вирази для деформацій $e_\alpha, e_\beta, e_{\alpha\beta}, e_{\alpha z}, e_{\beta z}$ можна записати таким чином:

$$\begin{aligned}e_\alpha &= \frac{1}{1+k_\alpha \cdot z} \left(\varepsilon_\alpha + z \cdot \kappa_\alpha + f_\alpha(z) \cdot \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} + k_\alpha \cdot f_q(z) \cdot w_2 \right), \\ e_\beta &= \frac{1}{1+k_\beta \cdot z} \left(\varepsilon_\beta + z \cdot \kappa_\beta + f_\beta(z) \cdot \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \beta} + k_\beta \cdot f_q(z) \cdot w_2 \right), \\ e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{1+k_\alpha \cdot z} \left(\omega_\alpha + z \cdot \tau_\alpha + f_\beta(z) \cdot \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \alpha} \right) + \\ &+ \frac{1}{1+k_\beta \cdot z} \left(\omega_\beta + z \cdot \tau_\beta + f_\alpha(z) \cdot \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \beta} \right), \\ e_{\alpha z} &= \psi_\alpha \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} z \cdot k_\alpha \right), (\alpha \rightarrow \beta).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Тут $f_q(z) = z^2 - 0,3h^2 - z^4 / 6h^2$;

$$f_\alpha(z) = \frac{z}{5} - \frac{z^3}{3h^2} + \frac{1}{3} \left(z^2 - \frac{1}{3}h^2 \right) \cdot k_\alpha, (\alpha \rightarrow \beta);$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + k_\alpha \tilde{w}, \quad \omega_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha}, \left(\begin{array}{l} \alpha \rightarrow \beta \\ u \rightarrow v \end{array} \right);$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} + k_\alpha w_1, \quad \tau_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial \alpha}, (\alpha \rightarrow \beta);$$

$$\tilde{w} = w + 0,3h^2 \cdot w_2; \quad \tilde{u} = u + \frac{1}{9}h^2 \cdot k_\alpha \cdot \psi_\alpha, \left(\begin{array}{l} \alpha \rightarrow \beta \\ u \rightarrow v \end{array} \right);$$

$$\int_{-h}^h f_i(z) dz = \int_{-h}^h z \cdot f_i(z) dz = 0, \quad (i = \alpha, \beta, q).$$

Одержані вирази для переміщень (2.15) і деформацій (2.17) відрізняються від аналогічних, запропонованих авторами [5,31,46] додатковими членами, які враховують вплив кривин k_α, k_β , а також деформацію обтиснення e_z .

Зусилля і моменти, що діють у поперечних перерізах оболонки, записують через інтеграли від напружень за змінною z таким чином

$$N_\alpha, M_\alpha = \frac{1}{A_\beta} \int_{-h}^h (1, z) \cdot \sigma_\alpha \cdot H_\beta dz, (\alpha \rightarrow \beta);$$

$$N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_\beta} \int_{-h}^h (1, z) \cdot \tau_{\alpha\beta} \cdot H_\beta dz; \quad (2.18)$$

$$Q_\alpha = \frac{1}{A_\beta} \int_{-h}^h \tau_{\alpha z} \cdot H_\beta dz, \quad (\alpha \rightarrow \beta).$$

Виражаючи в формулах закону Гука напруження через деформації і підставивши їх у вирази (2.18), одержимо, з точністю до членів з множниками $(k_\alpha - k_\beta) \cdot h$, такі вирази:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= B_1 \cdot (\varepsilon_\alpha + \nu_{12} \varepsilon_\beta) + N_\alpha^*, & \left(\alpha \rightarrow \beta \right); \\ M_\alpha &= D_1 \cdot (\kappa_\alpha + \nu_{12} \kappa_\beta) + M_\alpha^*, & \left(1 \rightarrow 2 \right); \\ N_{\alpha\beta} &= 3 \cdot D_{66} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} \cdot h^{-2}, & M_{\alpha\beta} = D_{66} \cdot \kappa_{\alpha\beta}, & (2.19) \\ Q_\alpha &= K_\alpha \cdot \psi_\alpha, & (\alpha \rightarrow \beta). \end{aligned}$$

$$\text{Тут } B_1 = 2\tilde{E}_1 \cdot h, \quad D_1 = 2\tilde{E}_1 \cdot h^3 / 3, \quad \tilde{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}, \quad (1 \rightarrow 2);$$

$$A_1 = \frac{\nu_{13} + \nu_{23} \cdot \nu_{21}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \cdot \frac{E_1}{E_3}, \quad (1 \rightarrow 2); \quad D_{66} = \frac{2}{3} G_{12} \cdot h^3;$$

$$N_\alpha^* = \frac{D_1}{R} (\kappa_x + \nu_{12} w_2) + 2A_1 \cdot h \cdot q_1, \quad M_\alpha^* = \frac{D_1}{R} (\varepsilon_x + \nu_{12} w_1) + 0,4A_1 \cdot h^2 \cdot q_2;$$

$$N_\varphi^* = \frac{D_2}{R} (w_2 - \kappa_\varphi) + 2A_1 \cdot h \cdot q_1, \quad M_\varphi^* = \frac{D_2}{R} (w_1 - \varepsilon_\varphi) + 0,4A_1 \cdot h^2 \cdot q_2;$$

$$q_1 = -\frac{1}{2} (q^+ + q^-), \quad q_2 = q^- - q^+. \quad K_\alpha = \frac{4}{3} G_{13} \cdot h (1 - 0,07k_\alpha k_\beta h^2),$$

$K_\beta = G_{23} \cdot K_\alpha / G_{13}$ – жорсткість матеріалу оболонки за поперечного зсуву.

Напруження у поперечних перерізах оболонки, виражені через внутрішні зусилля і моменти (2.18), дорівнюватимуть

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha} &= \frac{N_{\alpha}}{2h(1+k_{\beta}z)} + \frac{3M_{\alpha} \cdot z}{2h^3(1+k_{\beta}z)} + \frac{\tilde{E}_1}{A_{\alpha}K_{\alpha}} \cdot \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial \alpha} \cdot \varphi_{\alpha}(z) + \\
&+ \frac{v_{12}\tilde{E}_1}{K_{\beta} \cdot A_{\beta}} \cdot \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial \beta} \cdot \varphi_{\beta}(z) + q_2(k_{\alpha} + v_{12}k_{\beta}) \cdot \varphi_q(z), \quad \left(\begin{array}{l} \alpha \leftrightarrow \beta \\ 1 \leftrightarrow 2 \end{array} \right); \\
\tau_{\alpha\beta} &= \frac{N_{\alpha\beta}}{2h(1+k_{\beta}z)} + \frac{3M_{\alpha\beta} \cdot z}{2h^3(1+k_{\beta}z)} + \\
&+ \frac{G_{12}}{K_{\alpha}A_{\beta}} \cdot \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial \beta} \cdot \varphi_{\alpha}(z) + \frac{G_{12}}{K_{\beta}A_{\alpha}} \cdot \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial \alpha} \cdot \varphi_{\beta}(z); \\
\tau_{\alpha z} &= \frac{G_{13}}{K_{\alpha}} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \left(1 - \frac{z}{3} k_{\alpha} \right) Q_{\alpha}, \quad \left(\begin{array}{l} \alpha \leftrightarrow \beta \\ 1 \leftrightarrow 2 \end{array} \right),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

де $\varphi_{\alpha}(z) = f_{\alpha}(z) \cdot (1+k_{\beta}z)^{-1}$, $(\alpha \rightarrow \beta)$;

$$\varphi_q(z) = -\frac{3}{8} \frac{\tilde{E}_1}{E_3 h} \cdot f_q(z) (1+k_{\beta}z)^{-1}.$$

Слід відзначити, що формули (2.20), так само як і формули (2.19), записані з точністю до членів із множниками $(k_{\alpha} - k_{\beta}) \cdot h$ і $(k_{\alpha}^2 - k_{\alpha} \cdot k_{\beta}) \cdot h^2$.

2.3. Рівняння сумісності деформацій

Крім співвідношень (2.17)-(2.20) між компонентами деформації оболонки існують додаткові диференціальні залежності, які повинні забезпечувати сумісність цієї системи. Ці залежності називають рівняннями нерозривності деформацій.

Вони є необхідними і достатніми умовами суцільності деформованої серединної поверхні плити. Названі рівняння можна одержати з відомої рівності [98,101]:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta} \right). \quad (2.21)$$

Тут $\vec{R} = U\vec{e}_\alpha + V\vec{e}_\beta + W\vec{e}_z$ – вектор переміщень довільної точки оболонки; \vec{e}_α , \vec{e}_β , \vec{e}_z – орти ліній кривин серединної поверхні оболонки.

Здійснивши диференціювання вектора переміщень по α і β та порівнюючи після цього коефіцієнти біля однакових ортів і однакових степенів координати z , одержимо, в принципі, дванадцять рівнянь. Більшість із них повинні задовольнятися тотожно.

У рамках розробленої моделі будемо вимагати точного виконання двох із чотирьох рівнянь нерозривності, одержаних М.П. Шереметьєвим, Б.Л Пелехом та їх учнями [98, 100]:

$$\begin{aligned} & k_\alpha \kappa_\beta + k_\beta \kappa_\alpha + \frac{1}{A_\alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{E}_\beta}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{A_\beta^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{E}_\alpha}{\partial \beta^2} = \\ & = \frac{1}{A_\alpha \cdot A_\beta} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + k_\beta \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}_{\alpha z}}{\partial \alpha} + k_\alpha \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}_{\beta z}}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\tau_\alpha + k_\alpha \omega_\beta + \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}_{\alpha z}}{\partial \beta} = \tau_\beta + k_\beta \omega_\alpha + \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}_{\beta z}}{\partial \alpha},$$

$$\text{де} \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha} + \omega_{\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\gamma} = \frac{4}{5}\psi_{\alpha}, \quad \varepsilon_{\beta\gamma} = \frac{4}{5}\psi_{\beta},$$

$$\omega_{\alpha} = \frac{1}{A_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha}, \quad \tau_{\alpha} = \frac{1}{A_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \gamma_{\beta}}{\partial \alpha}, \quad (\alpha \leftrightarrow \beta).$$

Інші два рівняння повинні задовольнятися наближено.

Разом з тим, необхідно зауважити, що рівняння сумісності деформацій (2.22) і відповідні рівняння, виведені з позицій теорії оболонок типу С. Тимошенка, не є абсолютно тотожними. Так, у названій теорії величини \mathcal{E}_{α} , \mathcal{E}_{β} , $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ характеризують рівномірні по товщині оболонки деформації, пов'язані з розтягом і тангенціальним зсувом її серединної поверхні. Величини κ_{α} , κ_{β} , \mathcal{T}_{α} , \mathcal{T}_{β} означають деформації, пов'язані зі згином і крученням серединної поверхні оболонки. У даній моделі згадані величини характеризують деформації поверхні, котра є деякою еквідистантною поверхнею по відношенню до серединної. З цієї причини не можна вважати абсолютно тотожними рівняння (2.22) і рівняння нерозривності деформацій [98].

2.4. Варіаційний вивід рівнянь рівноваги та граничних умов для ортотропних оболонок

Для знаходження п'яти ще невизначених складових компонент вектора переміщень u , v , w , ψ_{α} і ψ_{β}

скористаємося варіаційним принципом Лагранжа [1,125] для повної енергії пружної системи

$$\delta\Pi = \delta A, \quad (2.23)$$

$$\delta\Pi = \iiint_V \left(\sigma_\alpha \cdot \delta e_\alpha + \sigma_\beta \cdot \delta e_\beta + \sigma_z \cdot \delta e_z + \tau_{\alpha\beta} \cdot \delta e_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha z} \cdot \delta e_{\alpha z} + \tau_{\beta z} \cdot \delta e_{\beta z} \right) \times H_\alpha \cdot H_\beta \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot dz -$$

- варіація потенціальної енергії деформації;

$$\delta A = \iiint_V \left(F_\alpha \cdot \delta U + F_\beta \cdot \delta V + F_z \cdot \delta W \right) \cdot H_\alpha \cdot H_\beta \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot dz + \iint_S \left(q^- \cdot H_\alpha^- \cdot H_\beta^- \cdot \delta W^- - q^+ \cdot H_\alpha^+ \cdot H_\beta^+ \cdot \delta W^+ \right) \cdot d\alpha \cdot d\beta -$$

– варіація роботи об’ємних і поверхневих сил;

$W^\pm, H_{\alpha,\beta}^\pm$ – значення величин на зовнішніх поверхнях оболонки ($z = \pm h$). Надалі у виразі для $\delta\Pi$ впливом напружень σ_z будемо нехтувати, а у виразі δA об’ємні сили F_α, F_β і F_z будемо вважати рівними нулю.

Виражаючи напруження через зусилля і моменти та підставляючи їх разом з деформаціями у вираз для варіації потенціальної енергії $\delta\Pi$, після інтегрування за змінною z , одержуємо:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = & \iint_S (N_\alpha \cdot \delta\varepsilon_\alpha + N_\beta \cdot \delta\varepsilon_\beta + N_{\alpha\beta} \cdot \delta\varepsilon_{\alpha\beta} + M_\alpha \cdot \delta\kappa_\alpha + \\
& + M_\beta \cdot \delta\kappa_\beta + M_{\alpha\beta} \cdot \delta\kappa_{\alpha\beta} + \tilde{M}_\alpha \cdot \delta\tilde{\kappa}_\alpha + \tilde{M}_\beta \cdot \delta\tilde{\kappa}_\beta + \\
& + \tilde{M}_{\alpha\beta} \cdot \delta\tilde{\kappa}_{\alpha\beta} + \frac{4}{5} \cdot Q_\alpha \cdot \delta\psi_\alpha + \frac{4}{5} \cdot Q_\beta \cdot \delta\psi_\beta) \cdot dS.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Тут $\tilde{M}_\alpha = D_1 \cdot (r_\alpha \cdot \tilde{\kappa}_\alpha + \nu_{12} \cdot r_\beta \cdot \tilde{\kappa}_\beta)$, $\tilde{\kappa}_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\alpha}$, $(\alpha \rightarrow \beta)$;

$$\tilde{M}_{\alpha\beta} = D_{66} \cdot r_{\alpha\beta} \cdot \tilde{\kappa}_{\alpha\beta}, \quad \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial\psi_\beta}{\partial\alpha} + \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\beta};$$

$$r_{\alpha\beta} = 0,03 \left(\frac{1}{4} + k_\alpha \cdot k_\beta \cdot h^2 \right), \quad r_\alpha = 0,03 \left(\frac{1}{4} + k_\alpha^2 \cdot h^2 \right), \quad (\alpha \rightarrow \beta),$$

$$dS = A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta.$$

Вибираючи у варіаційному рівнянні (2.24) в якості екстремалей невідомі функції \tilde{u} , \tilde{v} , w , ψ_α , ψ_β і виражаючи через них варіації узагальнених деформацій $\delta\varepsilon$, $\delta\kappa$, $\delta\psi$, здійснюємо операцію варіювання з урахуванням формул інтегрування по частинах

$$\iiint_V N \frac{\partial}{\partial\alpha} (\delta u) dV = - \iiint_V \frac{\partial N}{\partial\alpha} (\delta u) dV + \iint_S Nl (\delta u) dS,$$

та співвідношень типу

$$\delta \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\delta \tilde{u}), \quad \cos(n^\wedge \alpha) = l, \quad \cos(n^\wedge \beta) = m.$$

Остаточний вигляд варіації (2.24) буде таким:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = & -\iint_S \left(\left(A_\beta \cdot \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + A_\alpha \cdot \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + k_\alpha \cdot \left(A_\beta \cdot \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + A_\alpha \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) \cdot \delta\tilde{u} + \left(A_\alpha \cdot \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + A_\beta \cdot \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + k_\beta \times \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \times \left(A_\alpha \cdot \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + A_\beta \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} \right) \right) \cdot \delta\tilde{v} + \left(\frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(A_\beta \cdot \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + A_\alpha \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(A_\alpha \cdot \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + A_\beta \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} \right) - \right. \\
& \left. - A_\alpha A_\beta \cdot (k_\alpha N_\alpha + k_\beta N_\beta) \right) \delta w + \frac{4}{5} \lambda_\alpha \left(A_\beta \cdot \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \right. \\
& \left. + A_\alpha \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - A_\alpha A_\beta \tilde{Q}_\alpha \right) \cdot \delta\psi_\alpha + \frac{4}{5} \lambda_\beta \left(A_\alpha \cdot \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + \right. \\
& \left. + A_\beta \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - A_\alpha A_\beta \tilde{Q}_\beta \right) \cdot \delta\psi_\beta) d\alpha d\beta + \quad (2.25) \\
& + \int_\Gamma (N_{\alpha n} \cdot \delta\tilde{u} + N_{\beta n} \cdot \delta\tilde{v} + M_{\alpha n} \cdot \delta\gamma_\alpha + M_{\beta n} \cdot \delta\gamma_\beta + \\
& \quad + \tilde{M}_{\alpha n} \cdot \delta\psi_\alpha + \tilde{M}_{\beta n} \cdot \delta\psi_\beta + Q_n \delta w) \cdot d\Gamma,
\end{aligned}$$

де $N_{\alpha n} = N_\alpha l + N_{\alpha\beta} m$, $M_{\alpha n} = M_\alpha l + M_{\alpha\beta} m$,

$\tilde{M}_{\alpha n} = \tilde{M}_\alpha l + \tilde{M}_{\alpha\beta} m$, $Q_n = \tilde{Q}_\alpha l + \tilde{Q}_\beta m$,

$\tilde{Q}_\alpha = Q_\alpha / \lambda_\alpha$, $\lambda_\alpha = \left(1 - \frac{5}{9} k_\alpha^2 h^2 \right)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$;

Γ – межа контуру області S .

Варто зауважити, що в поверхневому інтегралі рівності (2.25) не враховуються доданки, записані через величини

$\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta, \tilde{M}_{\alpha\beta}$. Разом з тим, у контурному інтегралі, який

відповідає за формування граничних умов, вплив цих величин

враховується. Їх неврахування призвело б до зменшення кількості граничних умов на краях оболонки. Згадані умови знаходяться із контурного інтеграла варіаційної рівності (2.25). Їх кількість буде залежати від сумарного порядку отриманих нижче диференціальних рівнянь рівноваги в узагальнених переміщеннях.

Варіацію потенціалу зовнішніх навантажень, після деяких алгебраїчних перетворень, можна записати так:

$$\delta A = \iint_S q_z \delta w \cdot ds. \quad (2.26)$$

Тут $q_z = q_2(1 + k_\alpha k_\beta h^2) + 2q_1(k_\alpha + k_\beta)h$ – узагальнене навантаження у напрямку осі Oz .

Підставивши рівності (2.25) і (2.26) у варіаційне рівняння (2.23) і прирівнюючи до нуля у поверхневому інтегралі коефіцієнти біля незалежних варіацій $\delta \tilde{u}$, $\delta \tilde{v}$, δw , $\delta \psi_\alpha$, $\delta \psi_\beta$, одержимо систему п'яти диференціальних рівнянь рівноваги для ортотропної оболонки

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + k_\alpha \tilde{Q}_\alpha &= 0, (\alpha \rightarrow \beta); \\ \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \tilde{Q}_\alpha &= 0, (\alpha \rightarrow \beta); \\ \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial \tilde{Q}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \tilde{Q}_\beta}{\partial \beta} - k_\alpha N_\alpha - k_\beta N_\beta &= -q_\gamma. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Отримана система буде повністю співпадати з відомими рівняннями С.О. Амбарцумяна [5] та іншими, якщо в (2.27) покласти параметри $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = 1$, які враховують вплив кривин оболонки.

2.5. Рівняння рівноваги ортотропної оболонки в узагальнених переміщеннях

Якщо в систему рівнянь рівноваги (2.27) замість зусиль і моментів підставити їх відповідні значення, записані через деформації і переміщення, то одержимо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних 14-го порядку. При цьому виявляється зручнішим функції кутів зсуву ψ_α і ψ_β виразити через відповідні похідні від невідомої складової переміщення поперечного зсуву w_τ і так званої функції кручення Ω

$$\psi_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial w_\tau}{\partial \alpha} - \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}, \quad \psi_\beta = \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial w_\tau}{\partial \beta} + \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}. \quad (2.28)$$

Скориставшись цим розкладом і залежностями (2.15), перетворимо рівняння (2.27) у систему рівнянь виду:

$$[L] \cdot \{V\} = \{Q\}. \quad (2.29)$$

Тут $[L] = (L_{ij}), (i, j = 1, 2, \dots, 5)$ – матриця диференціальних операторів L_{ij} від шуканих функцій $\{V\} = \{u, v, w, w_\tau, \Omega\}$;

$\{Q\} = colon\{L_{i6}q\}$ – вектор-стовпець диференційних операторів від функції навантаження. Значення лінійних операторів L_{ij} наведені в додатку 1.

Система п'яти диференціальних рівнянь (2.29) є повною системою рівнянь відносно п'ятих шуканих функцій u, v, w, w_τ і Ω . Загальний порядок такої системи диференціальних рівнянь у частинних похідних дорівнює 14. При розв'язуванні конкретних крайових задач до цієї системи необхідно приєднати граничні умови. Їх кількість не повинна перевищувати семи.

Система рівнянь (2.29) для оболонки значно спроститься у випадку трансверсально-ізотропного матеріалу ($E_1 = E_2 = E_3$, $G_{13} = G_{23} = G'$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$) шляхом введення так званої функції зусиль $F(\alpha, \beta)$, а також допущень, що

$$\tilde{K}_\alpha = \tilde{K}_\beta = K' \approx \frac{4}{3} G' h, \quad \lambda_\alpha = \lambda_\beta \approx 1.$$

Наслідуючи В.З. Власова [37], врахувавши члени з w_τ , приймемо:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \frac{1}{A_\beta^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - k_\alpha K' w_\tau, \\ N_\beta &= \frac{1}{A_\alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} - k_\beta K' w_\tau, \\ N_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{A_\alpha A_\beta} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

де $F(\alpha, \beta)$ – деяка функція координат α і β .

Користуючись виразами (2.30) для зусиль, із формул (2.20) знайдемо значення відповідних деформацій:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{2Eh} \left(\frac{1}{A_\beta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - \frac{\nu}{A_\alpha^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} - K'(k_\alpha - \nu k_\beta) w_\tau - (1-\nu) N_\alpha^* \right); \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= -\frac{1+\nu}{Eh} \cdot \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}; \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{2Eh} \left(\frac{1}{A_\alpha^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} - \frac{\nu}{A_\beta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - K'(k_\beta - \nu k_\alpha) w_\tau - (1-\nu) N_\beta^* \right);\end{aligned}\quad (2.31)$$

Нові доданки з множниками k_α , k_β вводяться у виразах (2.30) для задоволення (із точністю до членів $\frac{k_\alpha}{A_\beta} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}$, $\frac{k_\beta}{A_\alpha} \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}$) перших двох рівнянь рівноваги (2.31).

З урахуванням виразів (2.30), (2.31) решта три рівняння (2.27) або тотожні їм рівняння (2.29) зводяться до таких:

$$\begin{aligned}D_1 \Delta \Delta' w + \delta \Delta_k F - \varepsilon_\nu \Delta \Delta'_k F - \delta_k w_\tau &= \\ = \delta q_\gamma + \varepsilon' (\bar{\Delta}_k + \nu \Delta_k) q_1 + A'_0 \Delta (q_2 + k_1 q_1); &\quad (2.32)\end{aligned}$$

$$\Delta (\Delta \Omega - k^2 \Omega) = 0; \quad \Delta_k F - K' \Delta'_k w_\tau = q_z.$$

$$\text{Тут} \quad \varepsilon_\nu = \frac{D_1}{2Eh}, \quad \varepsilon' = \frac{D_1}{E'}, \quad \varepsilon = \frac{4 D_1}{5 K'}, \quad k^2 = \frac{2}{\varepsilon(1-\nu)},$$

$$\delta = 1 + \varepsilon'_\nu - \varepsilon \Delta, \quad \varepsilon'_\nu = \varepsilon_\nu \cdot (k_\alpha^2 + k_\beta^2 - 2\nu k_\alpha k_\beta),$$

$$\delta_k = \delta (k_\alpha^2 + k_\beta^2) K', \quad k_1 = \frac{5}{3} h (k_\alpha + k_\beta) (1+\nu)^{-1},$$

$$\Delta' = \Delta + k_\alpha^2 + k_\beta^2, \quad \Delta'_k = \Delta_k - \nu \bar{\Delta}_k,$$

$$A'_0 = \frac{2\nu''h^2}{5(1-\nu)}, \quad \Delta = \frac{1}{A_\alpha^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{A_\beta^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2},$$

$$\Delta_k = \frac{k_\beta}{A_\alpha^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{k_\alpha}{A_\beta^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad \bar{\Delta}_k = \frac{k_\alpha}{A_\alpha^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{k_\beta}{A_\beta^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}.$$

Ще одне рівняння для функцій F , w і w_τ можна отримати з першого рівняння сумісності (2.22), врахувавши залежності (2.31):

$$\Delta(\Delta + (1-\nu)k_\alpha k_\beta)F - 2Eh \bar{\Delta}_k w - \quad (2.33)$$

$$-K' \bar{\Delta}_k w_\tau = 2h \left(\nu'' \Delta - 2(1-\nu')k_\alpha k_\beta \cdot \frac{E}{E'} \right) q_1,$$

$$\text{де } \bar{\Delta}_k = \Delta_k + (k_\alpha + k_\beta) \cdot k_\alpha k_\beta, \quad \bar{\Delta}'_k = \Delta'_k + (1-\nu)(k_\alpha + k_\beta) \cdot k_\alpha k_\beta.$$

Аналіз системи рівнянь (2.32), (2.33) показує, що більшість із них за формою співпадає з відомими рівняннями так званої технічної теорії трансверсально-ізотропних оболонок Б.Л. Пелеха [98]. Разом з тим, останнє рівняння (2.32) в названій роботі відсутнє, а передостаннє, з точністю до постійної, зведене до рівняння Гельмгольца

$$\Delta \Omega - k^2 \Omega = 0. \quad (2.34)$$

Особливістю згаданої технічної теорії є і те, що в перших двох рівняннях рівноваги (2.27) доданки $k_\alpha \tilde{Q}_\alpha$ і $k_\beta \tilde{Q}_\beta$ відкидаються. Результат їхнього врахування у даній моделі проявляється у структурі рівнянь (2.30)-(2.33). Необхідні

варіанти граничних умов при розв'язку практичних задач можна сформулювати з умови рівності нулю контурного інтеграла у виразі (2.25). Прирівнюючи до нуля кожен його складову та враховуючи співвідношення (2.28), одержимо рівності для формування однорідних граничних умов.

Система п'яти диференціальних рівнянь (2.29) є повною системою рівнянь відносно п'ятьох шуканих функцій u , v , w , w_τ і Ω . При інтегруванні такої системи її розв'язки повинні задовольняти семи граничним умовам на краях оболонки. Рівності для формулювання граничних умов можна одержати, прирівнюючи до нуля кожен складову контурного інтеграла у виразі (2.25):

$$\begin{aligned}
 N_\alpha \delta \tilde{u} &= 0, & N_{\alpha\beta} \delta \tilde{v} &= 0, & Q_\alpha \delta \tilde{w} &= 0, \\
 M_\alpha \delta \gamma_\alpha &= 0, & M_{\alpha\beta} \delta \gamma_\beta &= 0, & \tilde{M}_\alpha \delta \psi_\alpha &= 0, \\
 \tilde{M}_{\alpha\beta} \delta \psi_\beta &= 0, & \text{при } \alpha &= \text{const}; & & (2.35) \\
 N_\beta \delta \tilde{v} &= 0, & N_{\alpha\beta} \delta \tilde{u} &= 0, & Q_\beta \delta \tilde{w} &= 0, \\
 M_\beta \delta \gamma_\beta &= 0, & M_{\alpha\beta} \delta \gamma_\alpha &= 0, & \tilde{M}_\beta \delta \psi_\beta &= 0, \\
 \tilde{M}_{\alpha\beta} \delta \psi_\alpha &= 0, & \text{при } \beta &= \text{const}.
 \end{aligned}$$

На базі умов (2.35) легко формуються різні граничні умови на краях оболонки. Наприклад, для жорсткого закріплення краю необхідно, щоб виконувались такі умови:

$$u = v = w = \gamma_\alpha = \gamma_\beta = \psi_\alpha = \psi_\beta = 0. \quad (2.36)$$

Звідси випливає, що на основі рівностей (2.15) для переміщень для такого краю оболонки її повні переміщення стають тотожно рівними нулю:

$$U(\alpha, \beta, z) \equiv 0, \quad V(\alpha, \beta, z) \equiv 0, \quad W(\alpha, \beta, z) \equiv 0.$$

Умови шарнірного закріплення краю $\alpha = const$ можуть бути різними. Одним із таких варіантів умов може бути наступний:

$$v = w = \mathcal{Y}_\beta = \psi_\beta = 0; \quad N_\alpha = M_\alpha = \tilde{M}_\alpha = 0. \quad (2.37)$$

У роботах В.Г. Піскунова, О.О. Рассказова та їх учнів [105-107] подібні умови носять назву “рухомого шарніра”.

Якщо край оболонки $\alpha = const$ вільний від навантаження, то згідно умов (2.35), на ньому

$$N_\alpha = N_{\alpha\beta} = M_\alpha = M_{\alpha\beta} = Q_\alpha = \tilde{M}_\alpha = \tilde{M}_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.38)$$

Легко показати, що умови (2.38) забезпечують (із точністю до величини з множниками k_α, k_β) рівність нулю напружень на вільному краю оболонки

$$\sigma_\alpha \equiv 0, \quad \tau_{\alpha\beta} \equiv 0, \quad \tau_{\alpha z} \equiv 0.$$

Таким чином, можна стверджувати, що теорія, яка описує напружено-деформований стан оболонки рівняннями (2.29) і умовами (2.35), отриманими в результаті мінімізації функціонала Лагранжа (2.23), є енергетично узгодженою. Умови

для так званої енергетичної узгодженості теорії оболонок виведені В.В. Васильєвим і С.А. Лур'є [32].

Якщо ж у рівностях (2.35) для формування граничних умов відкинути дві останні, то кількість граничних умов на краях оболонки (2.36)-(2.38) зменшиться до п'яти. Вони будуть співпадати з граничними умовами, які формуються уточненими теоріями оболонок типу С.П. Тимошенка і С.О. Амбарцумяна [5,98].

2.6. Згин ортотропної оболонки, шарнірно обпертої по контуру

Нехай прямокутна в плані сферична ($k_\alpha = k_\beta = 1/R$) оболонка обперта по всьому контуру і навантажена по зовнішній поверхні розподіленим навантаженням

$$q^-(\alpha, \beta) = q \sin \lambda \alpha \cdot \sin \zeta \beta, \quad q^+(\alpha, \beta) = 0,$$

де q – інтенсивність навантаження в центрі оболонки

$$(\alpha = a/2, \quad \beta = b/2), \quad \lambda = \pi/a, \quad \zeta = \pi/b.$$

Будемо вважати, що краї оболонки співпадають із лініями $\alpha, \beta = \text{const } j$. Виходячи з (2.35), умови шарнірного обпирання можна записати у вигляді (2.37):

а) для $\alpha = 0, \quad \alpha = a$

$$N_\alpha = M_\alpha = \tilde{M}_\alpha = 0, \quad v = w = \gamma_\beta = \psi_\beta = 0; \quad (2.39)$$

б) для $\beta = 0, \beta = b$

$$N_\beta = M_\beta = \tilde{M}_\beta = 0, \quad u = w = \gamma_\alpha = \psi_\alpha = 0.$$

Користуючись співвідношеннями (2.28) та рівняннями Гельмгольца у вигляді (2.34), перетворимо граничні умови (2.39) для величин $\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta, \psi_\alpha, \psi_\beta$ в умови, записані через відповідні похідні від функцій w_τ і Ω

$$\text{а) } N_\alpha = M_\alpha = 0, \quad v = w = \gamma_\beta = 0,$$

$$\frac{\partial w_\tau}{\partial \beta} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{для } \alpha = 0, \quad \alpha = a;$$

$$\text{б) } N_\beta = M_\beta = 0, \quad v = w = \gamma_\alpha = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial w_\tau}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = 0 \quad \text{для } \beta = 0, \quad \beta = b.$$

Із теорії диференціальних рівнянь відомо, що задача знаходження функції Ω з рівняння Гельмгольца (2.34) і граничних умов $\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = 0$ при $\alpha = const$, $\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = 0$ при $\beta = const$ має тільки тривіальний розв'язок $\Omega = 0$. Тому у випадку шарнірного обпирання країв ця функція виключається із системи рівнянь рівноваги (2.29).

Граничні умови (2.40) будуть виконуватись, якщо шукані функції координатної поверхні оболонки представити у вигляді:

$$u = A \cos \lambda \alpha \cdot \sin \zeta \beta, \quad v = B \cos \lambda \alpha \cdot \sin \zeta \beta, \quad (2.41)$$

$$(w, w_\tau) = (C, D) \sin \lambda \alpha \sin \zeta \beta.$$

Тут A, B, C, D – сталі, які задовольняють системі диференціальних рівнянь (2.29).

Підстановка (2.41) у (2.29) призводить до системи п'яти алгебраїчних рівнянь відносно чотирьох вищеназваних сталих:

$$\begin{aligned}
 \bar{L}_{11} \cdot A + \bar{L}_{12} \cdot B - \bar{L}_{13} \cdot C + \bar{L}_{14} \cdot D &= -\bar{L}_{16} \cdot q; \\
 \bar{L}_{21} \cdot A + \bar{L}_{22} \cdot B - \bar{L}_{23} \cdot C + \bar{L}_{24} \cdot D &= -\bar{L}_{26} \cdot q; \\
 \bar{L}_{31} \cdot A + \bar{L}_{32} \cdot B - \bar{L}_{33} \cdot C + \bar{L}_{34} \cdot D &= -\bar{L}_{36} \cdot q; \\
 \bar{L}_{41} \cdot A + \bar{L}_{42} \cdot B - \bar{L}_{43} \cdot C + \bar{L}_{44} \cdot D &= -\bar{L}_{46} \cdot q; \\
 \bar{L}_{51} \cdot A + \bar{L}_{52} \cdot B - \bar{L}_{53} \cdot C + \bar{L}_{54} \cdot D &= -\bar{L}_{56} \cdot q,
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

де коефіцієнти L_{ij} наведені в додатку 2.

При одержанні розв'язків системи (2.42) її п'яте рівняння мусить задовольнятись тотожно. У випадку трансверсально-ізотропної ($n_1 = n_2 = n$), квадратної в плані оболонки

$\left(a = b, \quad k_\alpha = k_\beta = \frac{1}{R} \right)$, цілий ряд коефіцієнтів \bar{L}_{ij} співпадає

$$\begin{aligned}
 \bar{L}_{11} = \bar{L}_{22}, \quad \bar{L}_{13} = \bar{L}_{23} = \bar{L}_{51} = \bar{L}_{52}, \\
 \bar{L}_{14} = \bar{L}_{24}, \quad \bar{L}_{16} = \bar{L}_{26}, \quad \bar{L}_{36} = \bar{L}_{46}, \quad \bar{L}_{31} = \bar{L}_{42}, \\
 \bar{L}_{32} = \bar{L}_{41}, \quad \bar{L}_{33} = \bar{L}_{43}, \quad \bar{L}_{34} = \bar{L}_{44}.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Тому, у зв'язку з симетрією граничних умов, зменшується кількість невідомих постійних до трьох ($A = B, C, D$). У результаті система (2.42) зводиться до системи трьох рівнянь із трьома невідомими

$$\begin{aligned}
(\bar{L}_{11} + \bar{L}_{12})A - \bar{L}_{13} \cdot C + \bar{L}_{14} \cdot D &= -\bar{L}_{16} \cdot q; \\
(\bar{L}_{31} + \bar{L}_{32})A - \bar{L}_{33} \cdot C + \bar{L}_{34} \cdot D &= -\bar{L}_{36} \cdot q; \\
2\bar{L}_{51} \cdot A - \bar{L}_{53} \cdot C + \bar{L}_{54} \cdot D &= -\bar{L}_{56} \cdot q,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

яку після деяких перетворень можна привести до вигляду:

$$\begin{aligned}
L_1 \cdot A - \bar{n}C + L_2 D &= \bar{q}_1; \\
(2 + \bar{n})A - L_1 C + L_3 D &= \bar{q}_2; \\
A - \bar{a}C + L_4 D &= \bar{q}_3.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Тут $\bar{n} = n(1 + \nu)$, $L_1 = (2 + \bar{n}) / \bar{a}$, $\bar{a} = \frac{a}{\pi R}$,

$$L_2 = \frac{L_1 h^2}{9 \bar{a} R^2} - n \frac{\tilde{K}_\alpha}{B_1}, \quad L_3 = \frac{4}{5} \tilde{\lambda}_\alpha L_1 + \frac{\tilde{K}_\alpha}{D_{66}} R^2 \bar{a},$$

$$L_4 = \frac{1}{\bar{a}} \left(\frac{h^2}{9 R^2} - \frac{\tilde{K}_\alpha}{(1 + \nu) B_1} \right), \quad \tilde{K}_\alpha = K_\alpha / \lambda_\alpha,$$

$$\bar{q}_1 = \bar{n} \left(\frac{9}{40} \frac{h}{a} \cdot \frac{E}{E'} - \nu'' \cdot \frac{R}{a} \right) \cdot \frac{qa}{2E},$$

$$\bar{q}_2 = \frac{\bar{n}}{\pi} \left(1.2 \nu'' \cdot \frac{R}{h} - \frac{E}{E'} \right) \cdot \frac{qa}{2E},$$

$$\bar{q}_3 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{9}{40} \frac{h}{R} \cdot \frac{E}{E'} - \frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{R}{h} + \frac{h}{R} - 2 \right) - \nu'' \right) \cdot \frac{qa}{2E}.$$

Користуючись правилом Крамера, розв'язок системи (2.45) запишемо у вигляді:

$$A = \frac{\Omega_A}{\Omega_\Delta}, \quad C = \frac{\Omega_C}{\Omega_\Delta}, \quad D = \frac{\Omega_D}{\Omega_\Delta}, \tag{2.46}$$

де величини Ω_i дорівнюють:

$$\Omega_A = \begin{vmatrix} L_1 & -\bar{n} & L_2 \\ (2+\bar{n}) & -L_1 & L_3 \\ 1 & -\bar{a} & L_4 \end{vmatrix} = (1-\bar{a}^2)L_1L_2 + 2L_3 + (\bar{n}^2 + 2\bar{n} - L_1^2)L_4;$$

$$\Omega_A = \begin{vmatrix} \bar{q}_1 & -\bar{n} & L_2 \\ \bar{q}_2 & -L_1 & L_3 \\ \bar{q}_3 & -\bar{a} & L_4 \end{vmatrix} = (L_3\bar{a} - L_1L_4)\bar{q}_1 + (\bar{n}L_4 - \bar{a}L_2)\bar{q}_2 + (L_1L_2 - \bar{n}L_3)\bar{q}_3;$$

$$\Omega_C = \begin{vmatrix} L_1 & \bar{q}_1 & L_2 \\ (2+\bar{n}) & \bar{q}_2 & L_3 \\ 1 & \bar{q}_3 & L_4 \end{vmatrix} = (L_3 - (2+\bar{n})L_4)\bar{q}_1 + \\ + (L_1L_4 - L_2)\bar{q}_2 + ((2+\bar{n})L_2 - L_1L_3)\bar{q}_3;$$

$$\Omega_D = \begin{vmatrix} L_1 & -\bar{n} & \bar{q}_1 \\ (2+\bar{n}) & -L_1 & \bar{q}_2 \\ 1 & -\bar{a} & \bar{q}_3 \end{vmatrix} = (1-\bar{a}^2)L_1\bar{q}_1 + 2\bar{q}_2 + ((2+\bar{n})\bar{n} - L_1^2)\bar{q}_3.$$

Розв'язок поставленої задачі у замкненому вигляді можна одержати також із системи рівнянь (2.32) для трансверсально-ізотропного матеріалу. Вирази для сталих A , D , C , F подібні (але складніші) від тих, які отримали С.О. Амбарцумян і його колеги [5]. На основі їх значень дослідимо вплив поперечного зсуву та обтиснення на вертикальне переміщення серединної поверхні оболонки за різних відношень h/a , h/R , E/G' і E/E' . За допомогою розв'язків (2.46) системи (2.45) пораховано відносні величини $\tilde{w} = w/w_n = 4\lambda^4 D_1 \cdot C/q$ (w_n – переміщення пластини з еквівалентними розмірами). Значення цих величин зведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Значення відносних нормальних переміщень оболонки \bar{w}

$\frac{h}{R}, \frac{h}{a}$	$E/G' = 2, E/E' = 1$		$E/G' = 10, E/E' = 5$	
	Розв'язки (2.46)	Теорія С.О.Амбар- цумяна	Розв'язки (2.46)	Теорія С.О.Амбар- цумяна
$\frac{1}{12}, \frac{1}{6}$	1,103 (18,0%)	1,319 (41,1%)	2,294 (145%)	2,853 (205%)
$\frac{1}{40}, \frac{1}{20}$	0,558 (-1,0%)	0,578 (2,3%)	0,601 (6,4%)	0,628 (11,1%)
$\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$	0,529 (-6,4%)	0,635 (12,4%)	0,762 (34%)	1,193 (117%)

Згідно розв'язку за класичною теорією пологих оболонок переміщення $\bar{w} = 0,935$ для даних першої стрічки і $\bar{w} = 0,565$ – для даних другої і третьої стрічок. Відсотки у дужках порашовані відносно цих даних. Результат $\bar{w} = 1$ відповідає переміщенню пластини ($h/R = 0$). Коефіцієнт Пуассона ν'' , який враховує вплив поперечних нормальних напружень σ_y , приймали рівним $\nu'' = 0,3$.

Для спрощення підрахунків і можливості порівняння коефіцієнт Пуассона $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ у всіх випадках приймали рівним нулю. Як видно з таблиці, результати запропонованої моделі значно відрізняються від результатів теорії С.О. Амбарцумяна [5] і даних класичної теорії.

Але якщо в даній теорії покласти $q_y \equiv q_2, E/E' = \nu'' = 0$, тобто знехтувати ефектом обтиснення, то одержимо результати С.О. Амбарцумяна. Необхідно зазначити, що дані перших двох стрічок таблиці стосуються одного й того ж відношення

$a/R=0,5$. Остання стрічка порахована для $a/R=1$, що відповідає куполоподібній сферичній оболонці досить великої кривини. Таким чином, за допомогою варіаційного принципу Лагранжа для повної енергії пружної системи отримано систему диференціальних рівнянь рівноваги 14-го порядку в узагальнених переміщеннях. Розв'язки такої системи повинні задовольняти семи граничним умовам на кожному з країв оболонки і сформульовані з умови рівності нулю відповідного контурного інтеграла. Шляхом введення так званої функції зусиль В.З. Власова побудована компактна система рівнянь оболонок із трансверсально-ізотропного матеріалу, яка за формою співпадає з технічною теорією оболонок Б.Л. Пелеха. Останню можна одержати з побудованої, якщо покласти відповідні доданки з добутками кривин рівними нулю, а також відкинути одне з рівнянь рівноваги.

Хоча рівняння сумісності деформацій побудованого варіанту теорії оболонок і теорії оболонок типу С. Тимошенка з вигляду ідентичні, але за змістом їх не можна вважати абсолютно тотожними. Це пов'язано з неспівпаданням деформацій серединної поверхні оболонки С. Тимошенка з відповідними деформаціями оболонки середньої товщини.

Результати розробленого варіанту теорії у випадку пологих оболонок лежать у межах між відповідними результатами класичної теорії оболонок і теорії оболонок С.О. Амбарцумяна. Для оболонок із великою кривиною ($a/R=1$) значення нормальних переміщень значно нижчі від рівня відповідних переміщень класичної теорії оболонок.

РОЗДІЛ 3

РОЗРАХУНКОВІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Циліндрична оболонка є однією з найбільш поширених розрахункових моделей тонкостінних несучих конструкцій, виготовлених як з традиційних, так і з композитних матеріалів. У циліндричних оболонках вдало поєднуються переваги, пов'язані з опуклістю серединної поверхні та відносною простотою технології виготовлення. Крім того, така оболонка вигідна ще й тим, що при певних умовах закріплення країв її розрахункові рівняння дають можливість одержати точні розв'язки.

У літературі відомо досить багато варіантів побудови розрахункових рівнянь для циліндричних оболонок. Фундаментальні основи їх розрахунку закладені в рівняннях типу В.З. Власова [37], А.Л. Гольденвейзера [42], Доннела [58], С.П. Тимошенка [147] та інших, коли базовими гіпотезами були гіпотези Кірхгофа-Лява. Для композитних і анізотропних оболонок з малою зсувною жорсткістю значний вклад у побудову неklasичних теорій було зроблено С.О. Амбарцумяном [5], В.В. Васильєвим [31,32], А.Т. Василенком [30], Я.М. Григоренком [45-47], А.К. Малмейстром, В.П. Тамужем і Г.А. Тетерсом [142], В.Г. Піскуновим [104-107] і О.О. Рассказовим [123,124], Б.Л. Пелехом і М.А. Сухорольським

[98,99], І.Ю. Хомою [155], А.В. Саченковим і І.Ю.Красновським [138], О.М. Ульяшиною [150] та іншими авторами [43, 86,102].

Товстостінні циліндричні оболонки з анізотропного матеріалу на основі рівнянь теорії пружності досить детально розглянуті у відомих роботах О.М. Гузя і І.Ю. Бабица [50, 51], Я.М. Григоренка та його учнів [46,47]. Отримані ними розв'язки задач можуть бути використані при порівнянні з відповідними результатами класичних та уточнених теорій оболонок з метою визначення областей їх застосування. Особливо це є важливим при дослідженнях впливу анізотропії матеріалу на критичні навантаження.

3.1. Рівняння рівноваги. Вирази для зусиль і моментів

Для побудови рівнянь рівноваги кругової ортотропної циліндричної оболонки з радіусом R скористаємось рівняннями рівноваги (2.27). При цьому будемо вважати, що серединна поверхня оболонки віднесена до ліній кривини α і β , які будуть відігравати відповідно роль твірної і напрямної. Для більшої зручності скористаємось заміною змінних системи координат: $\alpha = x$, $\beta = \varphi$, де x – віддаль точки вздовж твірної від початкового поперечного (екваторіального) перерізу; φ – кут між початковою і будь-якою меридіональними площинами (рис. 3.1).

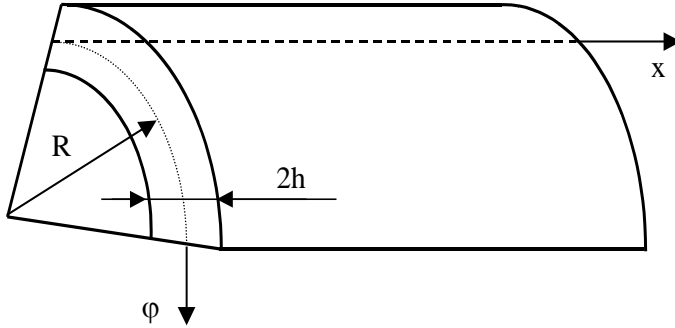


Рис. 3.1. Елемент кругової циліндричної оболонки.

Коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини серединної поверхні оболонки будуть рівними:

$$A_x = 1, \quad A_\varphi = R, \quad k_x = 0, \quad k_\varphi = 1/R.$$

Підставивши значення координат і коефіцієнтів Ляме в рівняння (2.27), одержимо вирази для зусиль і моментів, як і в (2.19):

$$N_x = B_x(\varepsilon_x + \nu_{12}\varepsilon_\varphi) + N_x^*, \quad (x \rightarrow \varphi);$$

$$M_x = D_x(\kappa_x + \nu_{12}\kappa_\varphi) + M_x^*, \quad (x \rightarrow \varphi); \quad (3.1)$$

$$N_{x\varphi} = 2G_{12}h\varepsilon_{x\varphi}, \quad M_{x\varphi} = D_{66}\kappa_{x\varphi},$$

$$Q_x = \frac{5}{4}K_x\varepsilon_{xz} = K_x\psi_x, \quad (x \rightarrow \varphi).$$

$$N_x^* = \frac{D_1}{R}(\kappa_x + \nu_{12}w_2) + 2A_1 \cdot h \cdot q_1, \quad M_x^* = \frac{D_1}{R}(\varepsilon_x + \nu_{12}w_1) + 0,4A_1 \cdot h^2 \cdot q_2;$$

$$N_\varphi^* = \frac{D_2}{R}(w_2 - \kappa_\varphi) + 2A_1 \cdot h \cdot q_1, \quad M_\varphi^* = \frac{D_2}{R}(w_1 - \varepsilon_\varphi) + 0,4A_1 \cdot h^2 \cdot q_2;$$

У формулах (3.2) стали $B_i, D_i, (i = x, \varphi)$ такі ж, як і в формулах (2.19), а вирази для сталих K_x, K_φ спрощуються:

$$K_x = \frac{4}{3} G_{13} h, \quad K_\varphi = \frac{4}{3} G_{23} h.$$

Підставивши у залежності (2.15) для компонент вектора переміщення вирази для узагальнених кутів повороту нормалей

$$\gamma_x = \frac{4}{5} \psi_x - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_\varphi = \frac{v}{R} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{4}{5} \left(1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{h^2}{R^2} \right) \psi_\varphi,$$

для випадку циліндричної оболонки можна записати:

$$\begin{aligned} U(x, \varphi, z) &= \underline{u(x, \varphi)} - \frac{\partial w}{\partial x} z + \left(z - \frac{z^3}{3h^2} \right) \psi_x; \\ V(x, \varphi, z) &= \left(1 + \frac{z}{R} \right) \underline{v(x, \varphi)} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} z + \left(z - \frac{z^3}{3h^2} \right) \psi_\varphi + f(z, \psi_\varphi); \\ W(x, \varphi, z) &= \underline{w(x, \varphi)} + \frac{q_1}{E_3} z + \frac{3}{8} \frac{z^2}{h} \frac{q_2}{E_3} - \frac{1}{16} \frac{z^4}{h^3} \frac{q_2}{E_3} - \\ &\quad - (A_1 \varepsilon_x + A_2 \varepsilon_\varphi) z - \frac{1}{2} (A_1 \kappa_x^T + A_2 \kappa_\varphi^T) z^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{де } \kappa_\varphi^T = \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\varphi^T}{\partial \varphi} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{4}{5} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \varphi};$$

$$\kappa_x^T = \frac{\partial \gamma_x^T}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{4}{5} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}; \quad f(z, \psi_\varphi) = \frac{z \cdot h}{3R} \left(\frac{z}{h} - \frac{h}{R} \right) \psi_\varphi;$$

$\psi_x = -3u_3 h^2$, $\psi_\varphi = -3v_3 h^2$ – функції поперечного зсуву (кути зсуву) поперечних перерізів оболонки.

У формулах (3.2) підкреслені члени (для $\tilde{w} \equiv w$) відповідають класичній теорії тонких оболонок Кірхгофа-Лява.

Решта виразів у формулі (3.3) для W є уточненням до неklasичної моделі [68,163,181] і враховують ефект Пуассона.

Формули, котрі пов'язують компоненти деформації серединної поверхні оболонки, що входять у (3.2), з компонентами переміщень (3.3), мають вигляд:

$$\{\varepsilon_x, \kappa_x\} = \frac{\partial}{\partial x} \{u, \gamma_x\}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{w}}{R};$$

$$\varepsilon_{x\varphi} = \omega_x + \omega_\varphi \equiv \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi}; \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{4}{5} \psi_\varphi; \quad (3.3)$$

$$\kappa_\varphi = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{q_1}{E_3} \right); \quad \tilde{v} = v + \frac{h^2}{9R} \psi_\varphi;$$

$$\kappa_{x\varphi} = \tau_x + \tau_\varphi \equiv \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi};$$

$$\tilde{w} = w + \frac{3}{8} \frac{q_2}{E_3 h} + \frac{1}{2} \left(A_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{A_2}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right);$$

Рівняння нерозривності (2.22) у випадку циліндричної оболонки дещо спрощуються:

$$\frac{\kappa_x}{R} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{x\varphi}}{\partial \varphi} + \varepsilon_{xy} \right); \quad (3.4)$$

$$\tau_x + \frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial \varphi} = \tau_\varphi + \frac{\partial \varepsilon_{\varphi y}}{\partial x} + \frac{\omega_x}{R}.$$

Напруження у поперечних перерізах циліндричної оболонки записуються через внутрішні зусилля і моменти (з точністю до величин $\alpha h^2 / R^2$) у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N_x}{2h(1+k_\varphi z)} + \frac{M_x z}{I(1+k_\varphi z)} + \frac{\tilde{E}_1}{K_x} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\tilde{\nu}_{12}}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} \right) \frac{f_0(z)}{(1+k_\varphi z)} + \\ &+ \frac{3}{4} \frac{q_2}{h} f_0(z) A_1 + \frac{\nu_0}{H_\varphi} \frac{q_2}{h} f_q(z) + \frac{3}{8} h f_0(z) \left(\frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 q_2}{R^2 \partial \varphi^2} \right) \frac{\tilde{E}_1}{E_3}; \\ \sigma_\varphi &= \frac{N_\varphi}{2h} + \frac{M_\varphi z}{I} + \frac{\tilde{E}_2}{K_\varphi} \left(\frac{\partial Q_\varphi}{R \cdot \partial \varphi} + \tilde{\nu}_{21} \frac{1}{R} \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right) f_0(z) + \\ &+ \frac{3}{4} \frac{q_2}{h} f_0(z) A_2 + \frac{q_2}{Rh} f_q(z) + \frac{3}{8} h f_0(z) \left(\frac{\partial^2 q_2}{R^2 \partial \varphi^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} \right) \frac{\tilde{E}_2}{E_3}; \\ \tau_{x\varphi} &= \frac{N_{x\varphi}}{2h(1+k_\varphi z)} + \frac{M_{x\varphi} \cdot z}{I(1+k_\varphi z)} + \frac{G_{12}}{K_\varphi} \frac{\partial \tilde{Q}_\varphi}{\partial x} f_0(z) + \\ &+ \frac{G_{12}}{K_x} \frac{\partial \tilde{Q}_x}{R \partial \varphi} \frac{f_0(z)}{(1+k_\varphi z)} + \frac{N_{x\varphi}}{2h(1+k_\varphi z)} \left(3 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right); \\ \tau_{xz} &= \frac{3Q_x}{4h} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right); \quad \tau_{\varphi z} = \frac{3Q_\varphi}{4h} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \left(1 - \frac{z}{R} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тут

$$\begin{aligned} f_q(z) &= z^2 - 0.3h^2 - z^4 / (6h^2); \quad \tilde{\nu}_{12} = \nu_{12} \cdot G_{13} / G_{23}, \quad (1 \rightarrow 2) \\ \tilde{Q}_x &= Q_x + K_x h^2 \frac{\partial w_2}{\partial x}; \quad \tilde{Q}_\varphi = Q_\varphi + K_\varphi h^2 \frac{\partial w_2}{R \partial \varphi}; \quad \nu_0 = \nu_{12} \frac{3}{8} \frac{\tilde{E}_1}{E_3} \dots \end{aligned}$$

Отримані вирази для нормальних σ_x, σ_φ і дотичного $\tau_{x\varphi}$ напружень, додатково до вже відомих формул [163], мають

члени, що враховують вплив ефекту Пуассона та поперечних нормальних напружень.

Використовуючи формули для напружень (3.5) і деформацій (3.3), запишемо вираз (2.24) для варіації потенціальної енергії Π_e у випадку циліндричної оболонки через узагальнені зусилля та деформації $\delta\varepsilon, \delta\kappa$, та $\delta\psi$

$$\delta\Pi_e = \iint_S \int_{-h}^h \left[\sigma_x \delta e_x + \sigma_\varphi \delta e_\varphi + \sigma_z \delta e_z + \tau_{x\varphi} \delta e_{x\varphi} + \tau_{xz} \delta e_{xz} + \tau_{\varphi z} \delta e_{\varphi z} \right] \times \\ \times H_\varphi z dz d\varphi dx = \iint_S \left[\tilde{N}_x \delta\varepsilon_x + \tilde{N}_\varphi \delta\varepsilon_\varphi + N_{x\varphi} \delta\varepsilon_{x\varphi} + M_x \delta\kappa_x + M_\varphi \delta\kappa_\varphi + \right. \\ \left. + M_{x\varphi} \delta\kappa_{x\varphi} + \frac{4}{5} (Q_x \delta\psi_x + Q_\varphi \delta\psi_\varphi) \right] R d\varphi dx + \frac{2}{5} h^2 \int_L Q_n (\delta\kappa_x + R \delta\kappa_\varphi) dL, \quad (3.6)$$

де L – межа контуру S , n – нормаль до контуру S ; $\tilde{N}_x = N_x - N_x^\varepsilon$; $\tilde{N}_\varphi = N_\varphi - N_\varphi^\varepsilon$; $Q_n = Q_x \cdot l + Q_\varphi \cdot m$; $l = \cos(n, x)$, $m = \cos(n, \varphi)$ - напрямні косинуси нормалі.

Тут і надалі операція варіювання здійснювалася з урахуванням формул інтегрування за частинами [98]:

$$\iint_S \left[P \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q \delta \left(\frac{\partial u}{R \partial \varphi} \right) \right] R d\varphi dx = \int_L (Pl + Q \cdot m) \delta u dL - \\ - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right) \delta u R d\varphi dx; \quad \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u).$$

За незалежні екстремалі у варіаційному рівнянні (3.6) вибрані узагальнені переміщення $u, v, \tilde{w}, \psi_x, \psi_\varphi$. Тоді подальше

використання формул інтегрування за частинами призводить до такого виразу для варіації потенціальної енергії

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi_e = & -\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{N}_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} \right) \delta u + \left(\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{N}_\varphi}{\partial \varphi} \right) \delta v + \right. \\
 & + \frac{4}{5} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} - Q_x \right) \delta \psi_x + \frac{4}{5} \left(\frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - Q_\varphi \right) \delta \psi_\varphi + \\
 & + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \right. \\
 & - \frac{1}{R} \tilde{N}_\varphi \delta \tilde{w} \} R d\varphi dx + \int_L [(N_{xn} - N_{xn}^*) \delta u + (N_{\varphi n} - N_{\varphi n}^*) \delta v + \\
 & + (M_{xn} - M_{xn}^*) \delta \gamma_x + (M_{\varphi n} - M_{\varphi n}^*) \delta \gamma_\varphi + (Q_n - Q_n^*) \delta \tilde{w}] dL,
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

де $N_{xn} = \tilde{N}_n l + N_{x\varphi} m$; $N_{\varphi n} = \tilde{N}_n l + N_\varphi m$; $M_{xn} = M_n l + M_{x\varphi} m$;

$$M_{\varphi n} = M_n l + M_\varphi m; \quad \gamma_x = -\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{4}{5} \psi_x,$$

$$\gamma_\varphi = -\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} + \frac{v}{R} + \frac{4}{5} \left(1 - \frac{5}{12} \frac{h^2}{R^2} \right) \psi_\varphi - \text{узагальнені кути повороту}$$

нормалі до серединної поверхні оболонки.

Величинами з зірочками позначені зусилля, що діють на контурі оболонки. Другий член варіаційного рівняння (2.17) (варіація роботи об'ємних і поверхневих сил δA), з урахуванням попередніх допущень і з точністю до величини $\alpha \cdot h^2 / R^2$, у випадку циліндричної оболонки зводиться до виразу

$$\delta A = \iint_S q_z \delta \tilde{w} dS, \tag{3.8}$$

де $q_z = q_2 + 2q_1 h / R$.

Приймаючи віртуальні переміщення $\delta u, \delta v, \delta \psi_x, \delta \psi_\varphi$ та $\delta \tilde{w}$ незалежними, вважаємо, що рівність (3.7) буде справедливою тільки за умови рівності нулю їх множників. Прирівнявши ці множники до нуля, отримаємо рівняння рівноваги (в зусиллях і моментах):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{Q}_\varphi}{R} = 0; \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} - Q_x = 0; \quad \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - \tilde{Q}_\varphi = 0;$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{Q}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{N_\varphi}{R} = -q_z,$$

де $\tilde{Q}_\varphi = Q_\varphi / \left(1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{h^2}{R^2} \right),$

а також п'ять граничних умов на кожному з країв побудованої моделі ортотропних циліндричних оболонок:

$$(N_{xn} - N_{xn}^*) \delta u = 0; \quad (N_{\varphi n} - N_{\varphi n}^*) \delta v = 0; \quad (M_{xn} - M_{xn}^*) \delta \gamma_x = 0;$$

$$(M_{\varphi n} - M_{\varphi n}^*) \delta \gamma_\varphi = 0; \quad (Q_n - Q_n^*) \delta \tilde{w} = 0. \quad (3.10)$$

Залежно від того, який множник кожної з рівностей (3.10) покладається рівним нулю, отримаємо статичні чи геометричні граничні умови.

Комбінуючи дві групи умов (3.10), маємо можливість виконувати розрахунок оболонок із різними конструктивними особливостями на контурі. Кількість умов завжди відповідає кількості рівнянь рівноваги (3.9), тобто п'яти. Наприклад, умови навантаження краю оболонки при $x = const$ повністю задовольняються п'ятьма статичними умовами:

$$\tilde{N}_x = N_x^*; N_{x\varphi} = N_{x\varphi}^*; M_x = M_x^*; M_{x\varphi} = M_{x\varphi}^*; Q_x = Q_x^*. \quad (3.11)$$

Умова жорсткого закріплення краю оболонки повністю описується п'ятьма геометричними умовами:

$$u = v = \gamma_x = \gamma_\varphi = \tilde{w} = 0. \quad (3.12)$$

Змішаними умовами (геометричними та статичними) можуть бути описані умови шарнірного обпирання:

$$\tilde{N}_x = M_x = 0; v = \tilde{w} = \gamma_\varphi = 0. \quad (3.13)$$

Випадок вільного обпирання може описуватися дещо іншими умовами:

$$\tilde{N}_x = N_{x\varphi} = M_x = M_{x\varphi} = 0; \tilde{w} = 0. \quad (3.14)$$

У випадку замкненої циліндричної оболонки (довжиною l) записані умови мають враховуватись на її краях $x = \pm l / 2$.

Згідно з визначенням В.В. Васильєва та С.А. Лур'є [32] можна стверджувати, що наведені граничні умови, які отримані в результаті мінімізації функціоналу Лагранжа, є умовами енергетичної узгодженості розробленої моделі оболонок.

Рівняння рівноваги (2.28) в узагальнених переміщеннях для ортотропної циліндричної оболонки залишаються такими ж складними, як і в загальному випадку. Разом з тим, у випадку осевої симетрії рівняння значно спрощуються і мають вигляд:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\nu_{12}}{R} \frac{dw}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(A_1 \cdot \frac{q_1}{\tilde{E}_1} + \frac{\nu_{12}}{2} \cdot \frac{q_2}{\tilde{E}_3} \frac{h}{R} \right);$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{4}{5\varepsilon_x} \frac{d}{dx} \left(1 - \varepsilon_x \frac{d^2}{dx^2} \right) w_\tau = \frac{d}{dx} \left(\frac{\nu_{12} q_1}{R E_3} + \frac{3A_1}{5h} \cdot \frac{q_2}{\tilde{E}_1} \right); \quad (3.15)$$

$$K_x \frac{d^2 w_\tau}{dx^2} - B_\varphi \cdot \left(\frac{w}{R^2} + \frac{\nu_{21}}{R} \frac{du}{dx} \right) = -q_2 \left(1 - \frac{h^2}{R^2} \frac{\tilde{E}_2}{\tilde{E}_3} \right) - 2q_1 (1 - A_2) \frac{h}{R}.$$

Тут $\varepsilon_x = 4D_x / (5K_x)$, $B_\varphi = 2\tilde{E}_2 h$.

Розв'язуючи систему рівнянь (3.15) відносно радіального переміщення w у випадку, коли на оболонку діє розподілене стискуєче навантаження $q^+ = q$, $q^- = 0$, отримуємо таке розрахункове рівняння осесиметричної задачі для ортотропної циліндричної оболонки:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \lambda^4 \left(1 - \varepsilon_x \frac{d^2}{dx^2} \right) w = -\frac{\lambda_x}{D_x} \left(1 - \varepsilon_x \frac{d^2}{dx^2} \right) q - \frac{3}{5} \frac{A_{01}}{h \tilde{E}_1} \frac{d^2 q}{dx^2} - \frac{\nu_{12} N_x^0}{R D_x}, \quad (3.16)$$

де $\lambda_x = 1 + (1 - \tilde{A}_2) \frac{h}{R} - \frac{E_2}{\tilde{E}_3} \frac{h^2}{R^2}$; $\tilde{E}_3 = \frac{40}{9} E_3$; $\lambda^4 = \frac{2E_2 h}{D_x R^2}$;

$A_{01} = A_1 + \frac{5h \tilde{E}_1 \nu_{12}}{6R E_3}$; $\tilde{A}_2 = A_2 - \nu_{21} A_1 E_2 / E_1$; N_x^0 – деяка стала, яка за

розмірністю еквівалентна величині поздовжньої сили .

Загальні рівняння рівноваги для трансверсально-ізотропної циліндричної оболонки, виражені через функції напружень і переміщень, можна отримати з відповідних рівнянь (2.32)-(2.34) у вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta^2 F - 2Eh\Delta_k w - K'\Delta'_k w_\tau &= 2\nu'' \cdot h\Delta q_1; \\ D\Delta\Delta'w + \delta\Delta_k F - \varepsilon_\nu \cdot \Delta\Delta'_k F - \delta \cdot K'R^{-2} \cdot w_\tau &= \\ = \delta \cdot q_\gamma + \frac{\varepsilon'}{R}(\bar{\Delta}_k + \nu\Delta_k)q_1 + A'_0\Delta(q_2 - k_1q_1); & \quad (3.17) \\ \Delta_k F - K'\Delta'_k w_\tau = q_z; \quad \Delta\Omega - k^2\Omega = 0, \end{aligned}$$

де $\varepsilon_\nu = D/2Eh$, $\varepsilon' = D/E'$, $\delta = 1 + \varepsilon'_\nu - \varepsilon \cdot \Delta$;

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{4D}{5K'}, \quad \varepsilon'_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{R^2}, \quad k_1 = \frac{5h}{3R}(1+\nu)^{-1}, \quad A'_0 = \frac{2\nu''h^2}{5(1-\nu)}; \\ k^2 = \frac{5K'}{2D(1-\nu)}; \quad \bar{\Delta}_k = \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \Delta'_k = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \Delta_k = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \Delta' = \Delta + \frac{1}{R^2}. \end{aligned}$$

Якщо в системі диференціальних рівнянь (3.17) покласти рівним нулю деякі члени, коефіцієнти та оператори, що враховують поперечне обтиснення та елементи непологості оболонки ($\varepsilon' = \varepsilon'_\nu = \nu'' = \Delta_k = \Delta'_k \equiv 0$), то ми отримаємо систему рівнянь для пологих циліндричних оболонок типу С. Тимошенка [98].

При розв'язуванні конкретних задач для циліндричної оболонки відкритого профілю на кожному з її країв необхідно задовольнити семи однорідним граничним умовам, які легко формуються з умов (3.10):

$$N_x \delta \tilde{u} = 0, \quad N_{x\varphi} \delta \tilde{v} = 0, \quad Q_x \delta \tilde{w} = 0, \quad M_x \delta \gamma_x = 0,$$

$$M_{x\varphi} \delta \gamma_\varphi = 0, \quad \tilde{M}_x \delta \psi_x = 0, \quad \tilde{M}_{x\varphi} \delta \psi_\varphi = 0. \quad (3.18)$$

Порядок формування варіаційних рівностей конкретних граничних умов із наведених вище такий самий, як і для оболонок довільної конфігурації. Для випадку замкнутої в напрямку φ циліндричної оболонки таким умовам потрібно задовольняти на кожному з її торців $x=0$ і $x=\ell$ (ℓ – довжина оболонки).

3.2. Осесиметрична задача для замкнутої циліндричної оболонки

У деяких випадках навантаження, що діють на циліндричну оболонку, а також умови закріплення на її кінцях не залежать від кутової координати φ . Тоді, внаслідок симетрії величини $v = \mathcal{Y}_\varphi = \psi_\varphi \equiv 0$, а величини u , \mathcal{Y}_x і ψ_x залежать тільки від координати x .

У випадку трансверсально-ізотропного матеріалу, виключивши з системи рівнянь (3.5) горизонтальне переміщення u і переміщення w_r , одержимо для вертикального переміщення w таке рівняння:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - 2g^2 \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda^4 w = -\frac{\nu N_x^0}{R D} + \frac{1}{D} \left(1 - \varepsilon \frac{d^2}{dx^2}\right) \times \quad (3.19)$$

$$\times \left[q_2 \left(1 - \frac{9}{40} \frac{h^2}{R^2} \frac{E}{E'}\right) + 2q_1 (1 - \nu^n) \frac{h}{R} \right] + \frac{d^2}{dx^2} \left(\nu \frac{q_1}{R E'} + \frac{3A'}{5h} \cdot \frac{q_2}{E} \right).$$

Тут
$$\lambda^4 = \frac{2Eh}{DR^2} \equiv \frac{3(1-\nu^2)}{h^2 R^2}; \quad 2g^2 = \frac{6}{5} \frac{E}{G'} R^{-2} = \varepsilon \lambda^4.$$

Ліва частина одержаного рівняння повністю співпадає з відомими рівняннями для циліндричної оболонки [98]. Права частина, крім деформації поперечного зсуву, враховує вплив величин σ_z і ε_z . Для нейтралізації цього впливу достатньо покласти: $q_1 = 0$ і $E/E' = 0$.

Щоб дослідити точність розробленого варіанту теорії, порівняємо його результати для конкретної задачі з результатами інших теорій, а також – із точним розв'язком тривимірної задачі теорії пружності.

Розглянемо згин циліндричної оболонки під дією внутрішнього тиску, котрий змінюється за законом

$$q^- = q \cdot \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = n\pi / \ell \quad q^+ = 0, \quad (3.20)$$

де q – інтенсивність навантаження посередині оболонки.

В силу (2.11), для вантажних членів будемо мати

$$q_1 = -\frac{q}{2} \sin \lambda_n x, \quad q_2 = q \cdot \sin \lambda_n x. \quad (3.21)$$

Будемо вважати, що на краях оболонки $x=0$, $x=\ell$ виконуються умови шарнірного закріплення (3.13). Для їх тотожного задоволення досить взяти вираз для вертикального прогину у вигляді

$$w = w_0 \sin \lambda_n x. \quad (3.22)$$

Підставивши вирази (3.21) і (3.22) у рівняння (3.19), за умови $N_x^0 = 0$, одержимо

$$w_0 = \frac{qR^2}{2Eh[\dots]} \left[(1 + \lambda_n^2 \varepsilon) \left(1 - \frac{h}{R} (1 - \nu'') \right) - \frac{9}{40} \frac{h^2}{R^2} \frac{E}{E'} \right] - \frac{D\lambda_n^2}{ER} \left(0,6\nu''(1 + \nu) \cdot \frac{R}{h} - 0,5\nu \frac{E}{E'} \right), \quad (3.23)$$

де використано позначення $[\dots] = 1 + \varepsilon\lambda_n^2 + \lambda_n^4 / \lambda^4$.

Зробимо порівняння числових результатів, одержаних за формулою (3.23), з точним розв'язком просторової задачі теорії пружності [30,46,47].

У підрахунках було прийнято такі значення вихідних даних: $\frac{\ell}{R} = 2$; $\frac{R}{2h} = 3, 4, 5, 10; 20$; $\frac{E}{G'} = 2, 6; 20$; $R/\ell_0 = 60, 20$;

$\nu = \nu'' = 0,3$ і різних $\delta = \ell / 2nh$; (ℓ_0 – одиниця довжини).

Величини відносного радіального переміщення $w^* = w / qE^{-1} \cdot \ell_0$ для ізотропної оболонки (при $R/\ell_0 = 60$) наведені в табл. 3.1.

Аналіз числових даних табл. 3.1 показує, що для $n=1$ значення відносного радіального переміщення \tilde{w} серединної

поверхні оболонки, знайдені за формулою (3.23) і за допомогою точного розв'язку теорії пружності повністю співпадають. Разом з тим, уточнені теорії типу С. Тимошенка [31, 98] у цих випадках дають результати, які майже не відрізняються від відповідних результатів класичної теорії оболонок Кірхгофа-Лява.

Таблиця 3.1

Значення відносних переміщень w' залежно від виду навантаження, товщини та моделі оболонки

$\frac{2h}{R}$	$n; \delta$	Точний розв'язок [46]	Модель М3 (формула (3.23))	Теорія Тимошенка	Класична теорія
$\frac{1}{10}$	1; 20	575	575	597	597
	10; 2	15,8	15,9	17,8	10,6
$\frac{1}{5}$	1; 10	271	271	294	293
	5; 2	28,8	28,4	32,7	20,1
	10; 1	3,76	4,15	5,05	1,34
$\frac{1}{3}$	1; 6	148	148	170	169
	5; 1,2	9,70	10,1	12,8	4,50
	10; 0,6	–	1,94	2,56	3,76

Ці ж теорії дають значно кращі результати у порівнянні з класичною теорією при $n \geq 5$. З табл. 3.1 також видно, що для $\delta < 1$ жодна з уточнених теорій оболонок не працює. Тому тут необхідно користуватись розв'язками просторової задачі теорії пружності.

У табл. 3.2 наведені величини радіальних переміщень $w^* \cdot 10^{-2}$ оболонки для різних значень E/G' . При підрахунках приймалося, що відношення $E/E' = 1$, $R/\ell_0 = 20$, $\delta = 4$. Порівнюються радіальні переміщення ізотропної та трансверсально-ізотропної оболонок, знайдені за формулою (3.23), із точним розв'язком просторової задачі теорії пружності [46] для $W^*(-h)$ і $\tilde{W}^*(h)$ (числа в дужках).

Таблиця 3.2.

Значення переміщень $w^* \cdot 10^{-2}$

$\frac{2h}{R}$	n	$E/G' = 0$	$E/G' = 2,6$	$E/G' = 20$	
		Класична теорія	Формула (3.23)	Точний розв'язок	Формула (3.23)
0,05	10	0,268	0,299	0,558 (0,474)	0,573
0,10	5	0,446	0,476	0,866 (0,649)	0,871
0,25	2	0,514	0,482	0,922 (0,448)	0,922

З таблиці видно, що пониження зсувної жорсткості оболонки приблизно у вісім разів веде до збільшення радіальних переміщень w^* на 20-90% (залежно від $2h/R$). Крім того, спостерігається поява досить значного ефекту обтиснення. Цей ефект можна наближено врахувати, якщо скористатись відповідною формулою (3.2). У даному випадку до результатів колонок, знайдених за формулою (3.23), необхідно відповідно

додати величини $0,0081 h / \ell_0$; $-0,0019 h / \ell_0$. Одержані результати будуть лежати в інтервалі величин, знайдених на основі точного розв'язку. Разом з тим, аналіз відповідних формул (3.2) і (3.23) показує, що для оболонок середньої товщини ($1/10 \leq 2h/R \leq 1/5$) вплив ефектів поперечного обтиснення може значно зрости при збільшенні відношень E/E' .

3.3. Розрахунок трансверсально-ізотропної циліндричної панелі

Розглянемо прямокутну в плані циліндричну ($k_x = 0$, $k_\phi = 1/R$) оболонку (рис. 3.2), що оберта по всьому контуру і завантажена на зовнішній поверхні розподіленим навантаженням, що змінюється за законом

$$\sigma_z(h) = -q^+(x, y) = -q \sin \phi x \sin \beta y, \quad q^-(x, y) = 0, \quad (3.24)$$

де q – інтенсивність навантаження в центрі оболонки ($x = a/2$, $y = b/2$); $\phi = \pi/a$, $\beta = \pi/b$.

Будемо вважати, що середні лінії країв оболонки збігаються із координатними лініями $x, y = const$, а на краях виконуються умови шарнірного обпирання (3.13):

$$\text{а) для } x=0, x=a: \quad \tilde{N}_x = M_x = 0; \quad v = \tilde{w} = \gamma_\phi = 0; \quad (3.25)$$

$$\text{б) для } y=0, y=b: \quad \tilde{N}_\phi = M_\phi = 0; \quad u = \tilde{w} = \gamma_x = 0.$$

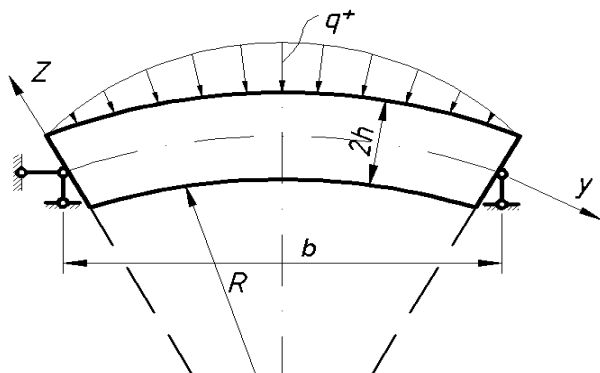


Рис. 3.2. Схема навантаження циліндричної панелі

Граничні умови (3.25) виконуватимуться, якщо шукані функції зусиль F та координатної поверхні оболонки (w, w_τ) подати у вигляді

$$\begin{aligned}
 F &= A \sin \phi x \sin \beta y; & (w, \tilde{w}_\tau) &= (B, C) \sin \phi x \sin \beta y; \\
 u &= L \cos \phi x \sin \beta y; & v &= M \sin \phi x \cos \beta y.
 \end{aligned}
 \quad (3.26)$$

Сталі A, B, C, L, M , після проведення відповідних операцій диференціювання, визначаються із системи диференціальних рівнянь (3.15), (3.17), у якій аргумент ϕ замінюється на змінну y/R .

Як показано у роботі [98], задача знаходження функції Ω з рівняння Гельмгольца системи (3.17) за граничних умов (3.25) має тільки тривіальний розв'язок $\Omega \equiv 0$. Тому, у випадку шарнірного обпирання країв, ця функція виключається із диференціальних рівнянь системи (3.17).

Виходячи із попередніх позначень, можна записати, що

$$\Delta \tilde{w}_\tau \equiv \Delta(1+0,4A'h^2\Delta)w_\tau - \frac{3}{4} \frac{A'}{\tilde{E}h}(1-\varepsilon\Delta)q_2 - \frac{3}{5} \frac{h}{E_3} \Delta q_2. \quad (3.27)$$

Тоді з третього рівняння системи (3.15) визначаємо функцію поперечного зсуву w_τ

$$w_\tau = \frac{F\phi^2/R + \tilde{q}_z}{k'K_x(\phi^2 + \beta^2)}, \quad q_z = -q^+(1 + \frac{h}{R}), \quad q_2 = -q^+, \quad (3.28)$$

$$\text{де } \tilde{q}_z = q_z - \frac{3}{4} \frac{A'K_x}{\tilde{E}h}(1 + \varepsilon(\phi^2 + \beta^2))q_2 + \frac{3}{8} \frac{hK_x}{E_3}(\phi^2 + \beta^2)q_2.$$

Підставивши вирази (3.26), (3.28) у перші два рівняння системи (3.17), одержимо систему лінійних рівнянь відносно сталих A і B

$$a_1A + b_1B = c_1; \quad a_2A + b_2B = c_2, \quad (3.29)$$

$$\text{де } a_1 = (\phi^2 + \beta^2)^2 + \frac{\tilde{D}}{R^2} \frac{\phi^4 \beta^2}{k'K_x(\phi^2 + \beta^2)} + \frac{h^2}{3R^2}(\phi^4 + \nu_{12}\phi^2\beta^2);$$

$$b_1 = 2E \frac{h\phi^2}{R} \left(1 + \frac{h^2}{3R^2} - \frac{1}{3}h^2\beta^2 - 0,2A'h^2(\phi^2 + \beta^2)\right);$$

$$c_1 = -\frac{\tilde{D}}{R} \frac{\phi^2 \beta^2 \tilde{q}_z}{k'K_x(\phi^2 + \beta^2)};$$

$$a_2 = -\frac{D}{R} \frac{\phi^2}{K_x} \left(1 - \frac{1}{5k'} - \frac{A'K_x h^2}{D}\right)(\phi^2 + \beta^2) -$$

$$-\frac{1}{\tilde{B}R} \left[\tilde{B}\phi^2 + (\tilde{D}_3\phi^2 - A'D\beta^2)(\phi^2 - \nu\beta^2) + D(\phi^2 - A'\beta^2)(\beta^2 - A'\phi^2) \right];$$

$$b_2 = D \left[(\phi^2 + \beta^2)^2 - (k\phi^2 + \beta^2) / R^2 \right]; \quad k' = 1 - 0,4A'h^2(\phi^2 + \beta^2);$$

$$c_2 = q_z(1 + \varepsilon(\phi^2 + \beta^2)) - 0,4A'h^2(\phi^2 + \beta^2)q_2 - \\ - \frac{Dq_2}{2\tilde{E}R} \left[\left(A' + \nu \frac{\tilde{E}}{E_3} \right) \phi^2 + \frac{\tilde{E}}{E_3} \beta^2 \right];$$

Визначивши параметри a_i , b_i , знайдемо значення основних сталих A і B із системи лінійних рівнянь (3.29) за формулами:

$$A = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}; \quad B = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (3.30)$$

Для спрощення розрахунків параметри a_i , b_i , c_i можна записати у безрозмірному вигляді:

$$\bar{a}_1 \equiv \frac{a_1}{\phi^4} = (1 + \tilde{a}^2)^2 + \frac{E}{2G'} \frac{\tilde{a}^2 h^2}{k' R^2} (1 + \tilde{a}^2)^{-1} + \frac{h^2}{3R^2} (1 + \nu \tilde{a}^2); \\ \bar{a}_2 \equiv \frac{a_2}{R\phi^4} = -\frac{E}{2G'} \frac{h^2}{R^2} \left(1 - \frac{1}{5k'} - \frac{2A'G'}{\tilde{E}} \right) (1 + \tilde{a}^2) - \\ - \left\{ \theta^2 + \frac{h^2}{3R^2(1-\nu^2)} \left[(k - A'\tilde{a}^2)(1 - \nu\tilde{a}^2) + (1 - A'\tilde{a}^2)(\tilde{a}^2 - \nu) \right] \right\}; \quad (3.31)$$

$$\bar{b}_1 \equiv \frac{b_1}{E\phi^2} = 2 \frac{h}{R} \left(1 + \frac{h^2}{3R^2} - \frac{1}{3} \rho^2 \tilde{a}^2 - A' \rho^2 (1 + \tilde{a}^2) \right);$$

$$k' = 1 - 0,4A'\rho^2(1 + \tilde{a}^2); \quad \tilde{a} = \frac{a}{b}; \quad k = 2 - \nu;$$

$$\bar{b}_2 \equiv \frac{b_2}{E\phi^2 R} = \frac{2\rho^2}{3(1-\nu^2)} \frac{h}{R} \left[(1 + \tilde{a}^2)^2 - \theta^2 (k + \tilde{a}^2) \right];$$

$$\begin{aligned}\bar{c}_1 &\equiv \frac{Rc_1}{q} = \frac{E}{2G'} \rho^2 \tilde{a}^2 \frac{\tilde{q}}{1 + \tilde{a}^2}; & \theta &= \frac{a}{\pi R}; \\ \bar{c}_2 &\equiv \frac{c_2}{q} = -(1 + \frac{h}{R})(1 + \frac{2}{5} \frac{\tilde{E}}{G'} \rho^2 (1 + \tilde{a}^2)) + 0,4A' \rho^2 (1 + \tilde{a}^2) + \\ &+ \frac{\rho^2 h}{3R} (A' + (\nu + \tilde{a}^2) \frac{\tilde{E}}{E_3}; & A' &= \frac{\nu''}{1 - \nu}; \\ \tilde{q} &= -1 - \frac{h}{R} + \frac{A' G'}{\tilde{E}} (1 + \frac{2}{5} \frac{\tilde{E}}{G'} \rho^2 (1 + \tilde{a}^2)) - \frac{G'}{2E_3} \rho^2 (1 + \tilde{a}^2).\end{aligned}$$

Визначення сталих A , B дозволяє знайти функції зусиль $F(x, y)$ і переміщень $w(x, y)$ серединної поверхні оболонки. Останнє дає можливість також установити й напруження у поперечних перерізах оболонки, виражені через внутрішні зусилля і моменти, за формулами (3.5).

Значення напружень σ_x на зовнішніх поверхнях оболонки мають вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_x(\pm h)(1 \pm \frac{h}{R}) &= -(\beta^2 \pm \frac{4}{5} \frac{E}{G'} \frac{\phi^4 h / R}{\phi^2 + \beta^2 - R^{-2}}) \frac{F}{2h} \pm \\ &\pm Eh\phi^2 (w + M_x^*) \pm \frac{2}{5} \frac{E}{G'} \frac{\phi^2 \tilde{q}_z}{\phi^2 + \beta^2 - R^{-2}}; & M_x^* &= \frac{3}{5} \frac{\nu'' q_2}{Eh\phi^2}.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Значення безрозмірних величин, що характеризують переміщення $\tilde{w} = -4D\phi^4 w / q$ та напруження в оболонці $\tilde{\sigma} = \sigma_x / q$, подано у табл. 3.3 і 3.4 для $a/R = 0,5$, $a = b$; $\nu = 0$ та різних значень відношень h/a і E/G . Значення величин у дужках – розбіжності у відсотках між результатами класичної теорії та запропонованої моделі оболонок.

Таблиця 3.3

Значення переміщень \tilde{w} у центрі панелі

$\frac{h}{a}$	$E/G' = 0$	$E/G' = 2$		$E/G' = 10$		
		Зсувні теорії	$\frac{E}{E'} = 1$	Зсувні теорії	$\frac{E}{E'} = 1$	$\frac{E}{E'} = 10$
1/20	0,839	0,873	0,897 (4,5%)	0,977	1,010	1,008
1/6	0,983	1,422	1,474 (47,5%)	3,102	3,306	3,272
w_{nl}^*	1,000	1,626	1,537	3,410	3,321	3,169

Таблиця 3.4

Значення нормальних напружень $\tilde{\sigma}$ у центрі панелі

$\frac{h}{a}$	z	$E/G' = 0$	$E/G' = 2$	$E/G' = 10$
$\frac{1}{20}$	h	-15,973	-16,55 (3,6%)	-17,408(9,0%)
	$-h$	9,517	10,253 (7,2%)	10,306(8,3%)
$\frac{1}{6}$	h	-1,454	-1,823 (25,4%)	-2,720(87,1%)
	$-h$	1,263	1,657 (31,2%)	2,316(83,4%)

Аналіз даних таблиць 3.3 і 3.4 показує, що поперечна анізотропія матеріалу циліндричної панелі відчутно впливає на напруження та переміщення. В останньому рядку табл. 3.3 наведені дані, що визначені для транстропної плити, в яку вироджується циліндрична оболонка, коли $R \rightarrow \infty$, а коефіцієнт

Пуассона $\nu = 0,3$. Ці дані можна порівняти з точним розв'язком теорії пружності [35], де $\tilde{w}_{nl.}^{m.n.} = 1,538$, що з інженерною точністю співпадає з одержаним результатом за розробленою моделлю (четверта колонка). Похибка теорій типу Тимошенка у цьому випадку складає 5,7%.

Нормальні напруження в оболонках середньої товщини ($\frac{h}{a} \leq \frac{1}{6}$; $\frac{h}{R} \leq \frac{1}{20}$) також можуть бути значно більшими від обчислених за класичною теорією оболонок (табл. 3.4). Особливо це стосується транстропних оболонок ($E/G' \geq 10$), де таке збільшення може перевищувати 80%. Що стосується теорій типу Тимошенка [5,31,98], то їх результати ближчі до результатів даної моделі оболонок, ніж до класичної моделі.

Порівняння значень радіальних переміщень ізотропної і трансверсально-ізотропної оболонки з точним розв'язком просторової задачі теорії пружності показують, що пониження зсувної жорсткості оболонки приблизно у вісім разів призводить до збільшення на 20-90 % (залежно від товщини оболонки) її радіальних переміщень. Крім цього спостерігається поява досить значного ефекту обтиснення.

РОЗДІЛ 4

РОЗРАХУНОК ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК І КІЛЕЦЬ, ПОШКОДЖЕНИХ ТРИЩИНАМИ

Проблема розрахунку оболонки з поверхневими тріщинами за своєю природою є тривимірною і не може бути точно вирішена (розподіл напружень та деформацій) за допомогою двовимірних рівнянь класичної теорії оболонок. Тому більшість подібних задач розв'язується числовими методами скінченних елементів [186] або граничних інтегральних рівнянь (ГІР) [190]. Існує ще один метод, який називають у літературі моделлю лінійних пружин, вперше застосований Ф. Ердоганом та іншими авторами [26] для дослідження пружних пластин і пологих оболонок із поверхневими тріщинами. В.А. Осадчуком і М.М. Николишиним [69,90] цей метод розвинутий для трансверсально-ізоотропних оболонок типу Тимошенка. Згадана модель дає змогу апроксимувати тривимірну задачу про поверхневу тріщину двовимірною задачею теорії оболонок із наскрізною тріщиною. До берегів такої тріщини прикладені мембранна сила та згинальний момент, які статично еквівалентні невідомим напруженням, що діють на рівні фронту тріщини у перерізі оболонки. Разом з тим, у цьому випадку необхідно розв'язати задачу для оболонки з наскрізною тріщиною, що також є надзвичайно складною задачею теорії

оболонок. Після цього записується відома емпірична формула [143] для коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) і дається чисельний аналіз залежності КІН від довжини та глибини тріщини, а також інших чинників.

Запропонований І.В. Ориняком у роботі [89] комбінований метод вагових функцій дозволяє визначати КІН у товстостінній трубі, що має крайову тріщину, береги якої піддаються “поліноміальному” навантаженню [82,143]. Отримані результати порівнюються з числовими методами, а також результатами, одержаними Чженом і Фінні [157] методом зосередженої податливості тріщини. Згідно з цим методом тріщину розглядають як зосереджену податливість, де стрибок переміщень і кути повороту лінійно зв’язані зі значенням сили та моменту в перерізі з тріщиною. Згадані методи дозволили розв’язати низку задач [192] із визначення граничних навантажень для товстостінних циліндрів і тонких оболонок та кілець, пошкоджених поверхневими тріщинами.

У даному розділі застосовано методику [130] для розробленої вище моделі ортотропних оболонок середньої товщини [166], що враховує поперечний зсув та обтиснення, для обчислення КІН у циліндричній оболонці із внутрішньою поверхневою тріщиною. Для визначення КІН використовується розв’язок Ражу та Ньюмена [184], який був одержаний ними для плити та використаний пізніше М. Стадником та І. Дідухом [7] для товстостінної труби під внутрішнім тиском. Отримані у

роботі результати порівнюються із відповідними результатами, одержаними числовими методами [194] та за допомогою емпіричних формул Ражу та Ньюмена [184].

На основі розробленої теорії згину композитних кілець, пошкоджених зовнішніми чи внутрішніми тріщинами, досліджується їх гранична рівновага. Для кільця, навантаженого діаметральними силами, на основі силового критерію руйнування Дж. Ірвіна [26,175] будуються діаграми граничних навантажень на кільце залежно від його товщини та фізичних характеристик анізотропії.

4.1. Визначення внутрішніх зусиль у шарнірно обпертій циліндричній оболонці з внутрішньою тріщиною

Розглянемо замкнуту циліндричну оболонку довжиною L , що шарнірно закріплена на торцях (рис. 4.1).

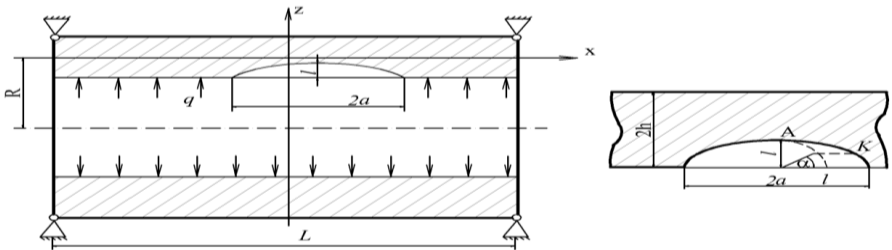


Рис. 4.1. Схема навантаження оболонки

Серединна поверхня оболонки віднесена до циліндричної системи координат x, θ, z . Внутрішня поверхня оболонки містить поздовжню півеліптичну тріщину довжиною $2a$ та

глибиною l . Оболонка знаходиться під дією розподіленого внутрішнього тиску $q^- = q$.

Для визначення напруженого стану в околі тріщини, що визначається коефіцієнтом інтенсивності напружень, використаємо розрахункові рівняння (2.38) для ортотропної циліндричної оболонки, які можна записати у вигляді:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - 2g_0^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda^4 w = \frac{\tilde{q}}{D_1};$$

$$K_x \frac{d^2 \tilde{w}_\tau}{dx^2} = 2 \frac{E_2 h}{R^2} w - \tilde{q}; \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\nu_{12}}{R} \frac{dw}{dx} = 0, \quad (4.1)$$

де u, w, R – переміщення та радіус кривини серединної поверхні оболонки, E_i, ν_{ij} – модулі пружності та коефіцієнти Пуассона у напрямках x, θ, z ; w_τ – складова переміщення w , що відповідає деформації поперечного зсуву;

$$D_x = \frac{2}{3} \tilde{E}_1 h^3; \quad \tilde{E}_1 = E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}); \quad \lambda^4 = 2E_2 h / (D_x R^2);$$

$$w_2 = 0,5 A_1 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{6 E_2}{5 G'} \frac{w}{R^2} \right); \quad q = q \left[1 - (1 - \tilde{A}_2) \frac{h}{R} - \frac{9 h^2 E_2}{40 R^2 E_3} \right];$$

$$2g_0^2 = \tilde{\varepsilon} \lambda^4; \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_x \cdot (1 - \nu^*); \quad \nu^* = \frac{5}{6} \nu_{12} (1 + \tilde{A}_2) G_{13} / E_2;$$

$$\varepsilon_x = 0,4 h^2 \tilde{E}_1 / G_{13}; \quad \tilde{A}_2 = A_2 - \nu_{12} A_1; \quad \tilde{w}_\tau = w_\tau - h^2 w_2;$$

$$A_1 = (\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}) (1 - \nu_{12} \nu_{21})^{-1}, \quad (1 \rightarrow 2).$$

Розв'язком першого рівняння системи (4.1) у випадку симетричності граничних умов є:

$$w = C_1 ch\alpha x \cdot \cos \beta x + C_2 sh\alpha x \cdot \sin \beta x + w^*; \quad (4.2)$$

$$\text{де } \alpha = \sqrt{\frac{\lambda^2 + g_0^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{\lambda^2 - g_0^2}{2}}; \quad w^* = \frac{qR^2}{2E_2h} - \text{ частковий}$$

розв'язок рівняння (4.1); C_1, C_2 – коефіцієнти, що знаходяться з граничних умов на краях оболонки.

Так, для циліндричної оболонки, шарнірно закріпленої на краях $x = \pm L/2$, крайові умови матимуть вигляд

$$w(\pm L/2) = 0; \quad N_x(\pm L/2) = 0; \quad M_x(\pm L/2) = 0. \quad (4.3)$$

За таких умов коефіцієнти розв'язку C_1, C_2 дорівнюють

$$C_1 = -\frac{\Omega \cdot w^*}{\Delta} + \frac{\varepsilon_x q}{D_x \Delta} \cdot K_2 - \frac{K_2 \cdot q^*}{D_x \Delta} + \frac{\nu_{12} q K_2}{2E_1 R \Delta};$$

$$C_2 = \frac{\Theta \cdot w^*}{\Delta} - \frac{\varepsilon_x q}{D_x \Delta} \cdot K_1 + \frac{K_1 \cdot q^*}{D_x \Delta} - \frac{\nu_{12} q K_1}{2E_1 R \Delta},$$

$$\text{де } K_1 = ch\left(\alpha_0 \cdot \frac{L}{2R}\right) \cdot \cos\left(\beta_0 \cdot \frac{L}{2R}\right); \quad K_2 = sh\left(\alpha_0 \cdot \frac{L}{2R}\right) \cdot \sin\left(\beta_0 \cdot \frac{L}{2R}\right);$$

$$\alpha_0 = \alpha \cdot R; \quad \beta_0 = \beta \cdot R; \quad \Delta = 2\alpha \cdot \beta (K_2^2 + K_1^2)(1 - 0,15A_1 h^2 g_0^2);$$

$$q^* = 0,4A_1 h^2 q; \quad \Delta = 2\alpha \cdot \beta (K_2^2 + K_1^2)(1 - 0,15A_1 h^2 g_0^2);$$

$$\Omega = \left[(\alpha^2 - \beta^2) \cdot K_2 + 2\alpha\beta \cdot K_1 \right] (1 - 0,15A_1 h^2 g_0^2);$$

$$\Theta = \left[(\alpha^2 - \beta^2) K_1 - 2\alpha\beta \cdot K_2 \right] (1 - 0,15A_1 h^2 g_0^2).$$

Таким чином, разом із визначенням сталих C_1, C_2 можна вважати, що знайдені компоненти переміщення серединної поверхні оболонки u, w . Останнє дає можливість за допомогою

формул (3.1) визначити силові характеристики, що виникають в оболонці, зокрема:

$$N_{\ominus} = \frac{2\tilde{E}_2 h}{R} (w(1-\nu_{12}\nu_{21}) + \frac{qh}{4E'}) - A_2 h q;$$

$$M_{\ominus} = -D_{\ominus} \left[\left(\frac{A_2 w}{R^2} + \frac{q}{2RE_3} \right) + \nu_{21} \left(\frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} - \frac{4}{5} \frac{\partial^2 w_{\tau}}{\partial x^2} \right) \right] + 0,4 A_2 h^2 q.$$

$$M_x = -D_x \left[\left(\frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} - \frac{4}{5} \frac{\partial^2 w_{\tau}}{\partial x^2} \right) + \nu_{12} \left(\frac{A_2 w}{R^2} + \frac{q}{2RE_3} \right) \right] + 0,4 A_1 h^2 q.$$

$$\text{Тут } D_{\ominus} = \frac{2}{3} \frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} h^3; \quad \tilde{w} = w + 0,5 A_1 h^2 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{6}{5} \frac{E_2}{G'} \frac{w}{R^2} \right).$$

Підкреслені члени у виразах для N_{\ominus} , M_{\ominus} , M_x можна отримати на основі гіпотез Кірхгофа-Лява або моделі типу Тимошенка. Інші члени одержані за рахунок впливу деформацій поперечного обтиснення та поперечних нормальних напружень σ_z . Як показують числові підрахунки, у виразі для згинального моменту M_{\ominus} та сили N_{\ominus} ці члени відіграють основну роль.

4.2. Розрахунок циліндричної оболонки з поверхневою тріщиною

Для визначення КІН K_I у циліндричній оболонці з внутрішньою тріщиною скористаємося відомим розв'язком Ражу і Ньюмена [184] для плити з тріщиною, навантаженою на нескінченності розтягувальною силою N та згинальним моментом M . При цьому для випадку циліндричної оболонки запишемо розв'язок [143] в уточненому вигляді, ввівши в ці формули новий параметр ε_1 , що враховує головну кривину оболонки:

$$K_I = (\varepsilon_1 \sigma_t + H \sigma_\varepsilon) \frac{\sqrt{\pi l}}{E(k)} F(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha), \quad (4.4)$$

де $\sigma_t = \frac{N_\ominus}{2h}$, $\sigma_\varepsilon = \frac{3\delta M_\ominus}{2h^2}$ – напруження від розтягу серединної поверхні та максимальне напруження від згину в оболонці на рівні тріщини; $\varepsilon_1 = \frac{1+h/R}{1-h/R}$ – новий параметр, який у розв'язку

[184] для плити дорівнює одиниці, а для товстостінної труби приймався [7] рівним відношенню її зовнішнього та внутрішнього радіусів; α – зведений кут, що відповідає певній точці K на тлі півеліптичної тріщини (рис. 4.1);

$$F(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha) = [M_1 + M_2 \varepsilon_2^2 + M_3 \varepsilon_3^4] f(\alpha) g(\alpha);$$

$$M_1 = 1,13 - 0,09\varepsilon_2; M_2 = -0,54 + \frac{0,89}{0,2 + \varepsilon_2}; \varepsilon_2 = l/a; \varepsilon_3 = l/2h;$$

$$M_3 = \frac{\varepsilon_2 - 1,35}{2\varepsilon_2 + 1,3} + 14(1 - \varepsilon_2)^{24}; \delta = \begin{cases} 1 - 2\varepsilon_3 & \text{при } \varepsilon_3 \leq 0,5; \\ 2\varepsilon_3 - 1 & \text{при } \varepsilon_3 > 0,5. \end{cases}$$

$$g(\alpha) = 1 + \left[0,1 + 0,35(\varepsilon_3)^2 \right] (1 - \sin \alpha)^2; \quad H = H_1 + (H_2 - H_1) \sin^n \alpha;$$

$$E(k) = \sqrt{1 + 1,464(\varepsilon_2)^{1,65}};$$

$$n = 0,2 + \varepsilon_2 + 0,6\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3; \quad H_1 = 1 - 0,34\varepsilon_3 - 0,11\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3;$$

$$H_2 = 1 - (1,22 + 0,12\varepsilon_2) \varepsilon_3 + (0,55 - 1,05\varepsilon_2^{3/4} + 0,47\varepsilon_2^{3/2}) \varepsilon_3^2;$$

$$f(\alpha) = \left[(\varepsilon_2)^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right]^{1/4}; \quad k = \sqrt{1 - \varepsilon_2^2}.$$

Підставивши вирази для N_Θ, M_Θ у формулу (4.4), одержимо величину коефіцієнта інтенсивності K_I .

Ю. Мураками та інші автори [143] для визначення коефіцієнта КІН K_I замінили суму напружень у формулі (4.3) еквівалентним напруженням, що відповідає теорії міцності найбільших дотичних напружень, де за головні напруження σ_1, σ_3 приймаються максимальні напруження σ_θ, σ_z на внутрішній поверхні циліндричної оболонки

$$K_I = 0,97 \sigma_{екв} \frac{\sqrt{\pi l}}{E_k} F(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha). \quad (4.5)$$

$$\text{Тут } \sigma_{екв} = \frac{2p\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2 - 1} - 0,5p\sqrt{\varepsilon_3}.$$

Другий член в останньому виразі для $\sigma_{екв}$ є поправкою, що враховує вплив глибини поширення тріщини в оболонці.

З метою перевірки точності отриманих формул були обчислені значення КІН $\tilde{K}_I = \frac{K_I}{q\sqrt{\pi l}}$ у найглибшій точці А ($\alpha = \pi/2$) фронту тріщини залежно від товщини оболонки та розмірів тріщини. Одержані результати наведені у таблицях 4.1 і 4.2, де їх співставлено з відомими результатами [7] для нескінченної ізотропної ($\nu = 0,3$) товстостінної труби.

Таблиця 4.1

Значення КІН \tilde{K}_I у точці А

$\begin{matrix} \varepsilon_3 \\ h/R \end{matrix}$	0,2	0,4	0,6	0,8	Модель розрахунку
$\frac{1}{2}$	1,208	1,067	1,087	1,216	Метод ГІР
	1,112	1,149	1,202	1,249	Ф-ла (4.4)
	1,485	1,466	1,476	1,484	Метод [184]
$\frac{1}{3}$	1,617	1,492	1,490	1,623	Метод ГІР
	1,602	1,644	1,716	1,779	Ф-ла (4.4)
	1,790	1,732	1,807	1,827	Метод [184]
$\frac{1}{10}$	4,430	4,483	4,579	4,646	Метод [7]
	4,232	4,307	4,491	4,648	Ф-ла (4.4)
	4,053	4,348	4,489	4,613	Метод [184]
$\frac{1}{20}$	8,209	8,393	8,666	8,890	Метод [7]
	7,929	8,139	8,498	8,811	Ф-ла (4.4)
	7,914	8,120	8,432	8,709	Метод [184]
$\varepsilon_2 = 0,1$	12,592	15,544	20,804	28,626	Ф-ла (4.4)
	12,563	15,501	20,625	28,170	Метод [184]

При розрахунках за формулою (4.4) параметр еліптичності та довжина оболонки відповідно дорівнювали: $\varepsilon_2 = 0.8$; $L = 3R$,

крім останніх двох рядків у таблиці 4.1, де $\varepsilon_2 = 0.1$. Тому при співставленні одержаних результатів необхідно враховувати той факт, що задача розв'язана для оболонки, яка не перебуває у стані плоского деформованого стану, і на її розв'язки можуть значно впливати крайові ефекти.

У таблиці 4.1 для товщин $\frac{h}{R} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ у перших рядках подані результати Тена і Феннера [190], одержані методом граничних інтегральних рівнянь (ГІР), а для товщин $\frac{h}{R} = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}$ розміщені результати М. Стадника та І.Дідуха [7], отримані шляхом лінеаризації напружень σ_θ задачі Ляме.

Дані, наведені у другому та третьому рядках таблиці, обчислені за формулами (4.4) та відомими формулами із [143], відповідно. Значення КІН \tilde{K}_I в останніх двох рядках пораховані для $h/R = 1/20$.

Графіки зміни КІН $\tilde{K}_I = \frac{K_I}{q\sqrt{\pi l}}$ залежно від параметра

$\varepsilon_3 = \frac{l}{2h}$ (відносної глибини тріщини) для товщин $\frac{h}{R} = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$ наведено на рис. 4.2. Криві 1 (суцільна та штрихова) побудовані для відносної товщини $h/R = 1/2$. Криві 2, 3 – для відносної товщини $h/R = 1/3$ для ізотропного ($E/G = 2,6$) та трансропного ($E/G = 8$) матеріалу, відповідно.

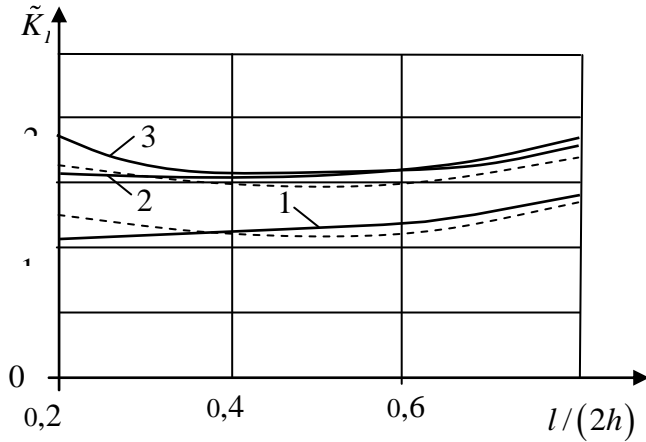


Рис. 4.2. Значення КІН \tilde{K}_I у найглибшій точці

Штрихові криві побудовані за даними методу граничних інтегральних рівнянь (ГІР) [189]. Аналіз кривих зміни \tilde{K}_I залежно від відносної глибини поширення тріщини свідчить, що ця зміна відносно невелика та складає приблизно 10÷14% для $\varepsilon_2 = 0.8$. Але з таблиці 4.2 видно, що для $\varepsilon_2 = 0.1$ коефіцієнт \tilde{K}_I у цьому випадку збільшується майже у 2,3 рази ($h/R = 1/20$). Вплив поперечної анізотропії на величину КІН \tilde{K}_I може досягати 15÷25%.

У таблиці 4.2 наведені результати для КІН \tilde{K}_I залежно від параметра еліптичності (l/a) тріщини в оболонці та її товщини. Аналіз даних таблиць 4.1 і 4.2 свідчить, що зменшення

параметра $\varepsilon_2 = l/a$ може призвести до збільшення КІН \tilde{K}_I у тонких оболонках ($h/R = 0.1; 0.05$) від 80% до 225%.

Таблиця 4.2

Зміна КІН \tilde{K}_I залежно від параметра еліптичності ε_2

$h/R \backslash l/a$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$l/(2h)$
$\frac{4}{5}$	7,929	4,232	1,602	1,112	0,2
	8,811	4,648	1,779	1,249	0,8
$\frac{1}{2}$	8,241	4,400	1,629	1,156	0,2
	10,269	5,424	2,074	-	0,8
$\frac{3}{10}$	8,524	4,551	1,684	1,195	0,2
	12,26	6,484	-	-	0,8

Пропуски в таблиці 4.2, що належать розрахункам для відносних товщин оболонок $h/R = 1/3$ та $h/R = 1/2$, стосуються тих випадків, коли тріщина виходить за край оболонки.

Можна стверджувати, що збільшення КІН \tilde{K}_I у безпосередній близькості від зовнішніх поверхонь оболонки відбувається через збільшення згинальної складової повного напруження в оболонці. Одночасно, виходячи із твердження С.В. Серенсена та Г.П. Зайцева [139], що "... тріщини - розрізи на глибину, яка дорівнює 0,7 товщини оболонки і більше, можна

вважати наскрізними...”, дійдемо висновку про однакову небезпеку, як від гранично мілкої (у розумінні початку руху) тріщини, так і від глибокої, коли вона знаходиться під протилежною поверхнею оболонки.

Зміна КІН \tilde{K}_I залежно від товщини оболонки зображена на рис. 4.3. Нижня крива відповідає параметру $\varepsilon_3 = 0,2$, верхня – $\varepsilon_3 = 0,8$. Штрихова крива побудована за формулами [183] для $\varepsilon_3 = 0,8$.

Аналіз отриманих результатів свідчить, що запропонована формула для визначення КІН \tilde{K}_I достатньо точно, у порівнянні з методом ГІР [191], апроксимує зміну КІН при заглибленні тріщини. При цьому найбільші відхилення (10÷12%) спостерігаються посередині діапазону зміни параметра ε_3 при $h/R=1/2$, тобто для випадку товстостінного циліндра. Ще більші відхилення від числового методу дають формули Ньюмена та Ражу [184], запропоновані ними для товстостінного циліндра. Близькими до цих формул є вирази, отримані для аналогічних випадків наближеним аналітичним підходом О.Є. Андрейківим, М.М. Стадником, А.І. Дарчуком та І.В. Дідухом у [7] для товстостінного циліндра з ізотропного матеріалу.

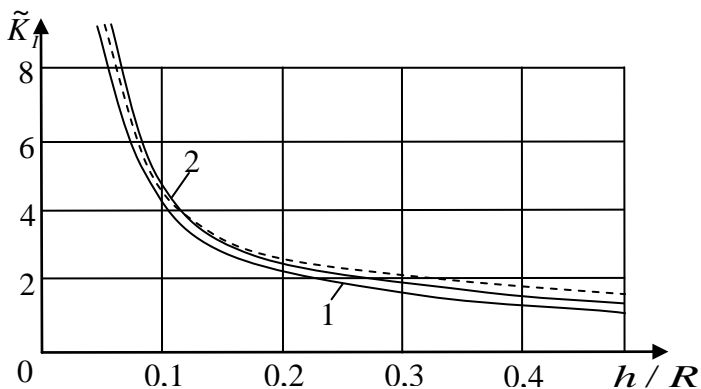


Рис. 4.3. Залежність \tilde{K}_I від товщини оболонки

Аналіз графічної залежності відносного КІН \tilde{K}_I від товщини оболонки (рис.4.3) свідчить, що ця зміна має приблизно гіперболічну залежність із однаковою тенденцією для різних глибин тріщини. Криві 1, 2, отримані на базі запропонованої моделі оболонок, та штрихова лінія Ньюмена-Ражу ($\varepsilon_3 = 0,8$) пролягають доволі близько одна від одної.

Варто також зауважити, що результати розв'язаної задачі згину циліндричної оболонки при $L \geq 3R$ порівнювали тільки з розв'язком задачі Ляме для товстостінної ізотропної труби. У випадку $L \leq 3R$ починає діяти крайовий ефект, тому напруження в оболонці та КІН \tilde{K}_I будуть істотно іншими, ніж у плоскій задачі Ляме.

У розділі розроблено методика визначення коефіцієнта інтенсивності напружень у циліндричній оболонці з внутрішньою тріщиною, що знаходиться під дією внутрішнього

тиску. Дана методика базується на відомих розв'язках Ражу та Ньюмена, які були одержані ними для товстої плити, пошкодженої поверхневою тріщиною.

На основі аналізу одержаних результатів можна стверджувати, що запропонована теорія оболонки середньої товщини може достатньо точно описувати НДС в околі поверхневої тріщини. Досліджено вплив анізотропії матеріалу на величину КІН залежно від товстостінності оболонки та впливу крайового ефекту. Величина КІН \tilde{K}_I залежить як від товщини оболонки, так і від форми самої тріщини. При збільшенні еліптичності тріщини ($\varepsilon_2 < 0,8$) величина КІН \tilde{K}_I зростає.

4.3. Міцність композитного кільця, пошкодженого тріщиною

Окремим випадком розрахунку досить довгої циліндричної оболонки є випадок, коли в кожному своєму поперечному перерізі вона навантажена однаковими радіальними та зсувними навантаженнями, а її поперечні перерізи знаходяться у плоскому деформованому стані ($e_x = 0$). Така задача з тривимірної "вироджується" у двовимірну і її аналогом стає задача згину кругового кільця. Диференціальні рівняння згину композитних кілець чи криволінійних стрижнів отримуємо як граничний випадок із диференціальних рівнянь (2.13), (2.20), (2.35) для

досить довгої циліндричної оболонки. Разом з тим, будемо вважати надалі, що реальні композитні кільця та стрижні перебувають у плоскому напруженому стані, коли напруження $\sigma_x = 0$.

Компоненти вектора переміщення для кругового композитного кільця одержимо з формул (2.13) для циліндричної оболонки, поклавши в них параметри $A_1 = A_2 = \nu''$:

$$V(\varphi, z) = v(\varphi) \left(1 + \frac{z}{R} \right) - \frac{z}{R} \frac{d\tilde{w}}{d\varphi} + \frac{z}{3R} \left(3 + \frac{z}{R} - \frac{z^2}{h^2} - \frac{h^2}{R^2} \right) \frac{d\tilde{w}_\tau}{d\varphi},$$

$$W(\varphi, z) = w(\varphi) - \nu'' \left[\varepsilon_\varphi z - \frac{z^2}{2R} \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right] + \frac{z}{2E_3} [q_1 + \sigma_z]. \quad (4.6)$$

Тут $v(\varphi)$ і $w(\varphi)$ - тангенціальна та радіальна складові переміщення середньої лінії кільця (рис.4.4); $A = 2h \cdot 1$ - площа перерізу кільця; R - радіус середньої лінії кільця; E_3, G', ν'' - модулі пружності, зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу у поперечному напрямі; $q_1 = -(q^+ + q^-) / 2$, $q_2 = (q^- - q^+)$; q^\pm - зовнішнє стискувальне навантаження на кільце для $z = \pm h$;

$\sigma_z = q_1 + \frac{1}{4} \left(3 \frac{z}{h} - \frac{z^3}{h^3} \right) q_2$ - радіальне напруження в кільці;

$$K_\varphi = \frac{4}{3} G' h; \quad \tilde{w} = w + h^2 w_2; \quad \tilde{w}_\tau = w_\tau - h^2 w_2;$$

$$h^2 w_2 = \frac{3 h q_2}{8 E_3} + \frac{\nu'' h^2}{2 R^2} \frac{d^2 w}{d\varphi^2}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{R} \left(\frac{dv}{d\varphi} + w \right);$$

w_r - складова радіального переміщення w від деформації поперечного зсуву; φ - кут, що відраховується від вертикального діаметра кільця (рис. 4.4).

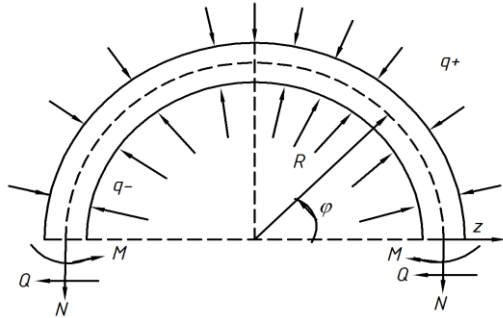


Рис. 4.4. Схема навантаження елемента кільця

$\nu', \nu'' = \nu' E_2 / E_3$ – коефіцієнти Пуассона матеріалу кільця у поперечному напрямку.

Так само, як і у випадку циліндричних оболонок, невідомі функції переміщень $\nu(\varphi)$ і $w(\varphi)$ знаходяться із системи рівнянь рівноваги в зусиллях і моментах (2.23), яка для кільця може бути записана у вигляді

$$\frac{dQ}{d\varphi} - N = -q_z R; \quad \frac{dM}{d\varphi} - RQ = 0; \quad \frac{dN}{d\varphi} = -Q(\varphi), \quad (4.7)$$

де $q_z = q_2 + 2q_1 h / R$; $q_1 = -(q^+ + q^-) / 2$, $q_2 = (q^- - q^+)$;

$$N(\varphi) = \int_{-h}^h \sigma_\varphi dz, \quad Q = \int_{-h}^h \tau_{z\varphi} dz, \quad M = \int_{-h}^h z \sigma_\varphi dz \quad - \text{поздовжня і}$$

поперечна сила та згинальний момент, що діють у поперечних перерізах кільця,

Вирази для внутрішніх зусиль N, Q, M мають такий вигляд:

$$N(\varphi) = 2E_2 \frac{h}{R} \left(\frac{dv}{d\varphi} + w \right) + 2hv''q_1 + \frac{h^2}{20R} \frac{E_2}{E_3} q_2 + N_\varepsilon; \quad (4.8)$$

$$M(\varphi) = -\frac{E_2 I'}{R^2} \left(\frac{d^2 \bar{w}}{d\varphi^2} + w \right) + \frac{E_2 I'}{E_3 R} (q_1(1-v') - v'N / (2h)) + 0,4v''q_2 h^2;$$

$$Q(\varphi) = \frac{K_\varphi}{R} \frac{d\tilde{w}_\tau}{d\varphi}, \quad K_\varphi = \frac{4}{3} G'h, \quad N_\varepsilon = \frac{E_2 I'}{2R} (2+v'')\kappa_\varphi,$$

де $I' = \int_{-h}^h \frac{R}{R+z} z^2 dz = I \left(1 + \frac{3h^2}{5R^2} \right)$ – величина, що еквівалентна

моменту інерції поперечного перерізу кільця одиничної ширини;

$$I = \frac{2}{3} h^3; \quad \kappa_\varphi = -\frac{1}{R^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\bar{w}}{d\varphi} - v \right); \quad \bar{w} = w - 0,8\tilde{w}_\tau.$$

Система рівнянь (4.7), за умови сталого навантаження на кільце ($q^- = 0; q^+ = q = const$), може бути зведена до вигляду:

$$\frac{d^2 N}{d\varphi^2} + N = q_z R; \quad \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + Q = 0; \quad \frac{d^2 M}{d\varphi^2} - RN = -q_z R^2, \quad (4.9)$$

де $q_z = -q(1+h/R)$.

Розв'язком першого диференціального рівняння буде

$$N(\varphi) = A \cos \varphi + B \sin \varphi + q_z R, \quad (4.10)$$

де A, B – константи, котрі знаходяться із граничних умов.

Для осесиметричного навантаження коефіцієнти $A = B = 0$. Тоді кільцева сила $N = -q(1 + h/R)$. Використавши рівняння системи (4.7), у якому $Q = -\frac{dN}{d\varphi}$, одержимо $Q = 0$. Розв'язок третього рівняння системи (4.9), із врахуванням попередніх результатів, призводить до залежності $M = C$,

де C – стала, що знаходиться з граничних умов для конкретної задачі.

Напружено-деформований стан кільця визначається на основі гіпотез розробленої вище уточненої моделі оболонок, що враховує поперечний зсув та обтиснення. Напруження σ_φ та $\tau_{\varphi z}$ за такого розподілу переміщень можна записати через попередньо знайдені зусилля N, Q, M у вигляді

$$\sigma_\varphi = \frac{N}{A} + \frac{M}{RA} + \frac{M}{I'} \frac{Rz}{R+z} - \frac{E_2}{2G'} \frac{N}{A} \frac{z}{R+z} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{h^2}{Rz} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{3}{5} \right);$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{3Q}{2A} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \left(1 - \frac{z}{3R} \right). \quad (4.11)$$

Розглядається міцність пошкодженого тріщиною кругового кільця, що стискується діаметральними силами P (рис. 4.5,а). У розтягненій частині кільця на рівні поперечного перерізу $\varphi = \varphi_0$ розміщена прямокутна у плані $l \times 1$ плоска поверхнева тріщина завглибшки $l \ll R, h$.

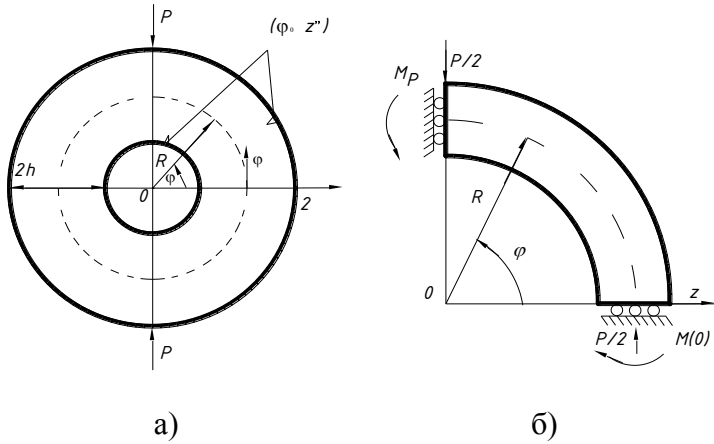


Рис.4.5. Схема навантаження кільця

Для знаходження внутрішніх силових факторів $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$, $M(\varphi)$ у кільці скористаємося симетрією поставленої задачі, за якою достатньо розглянути тільки один квадрант кільця (рис.4.5,б), що на кінцях ($\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$) закріплений у вигляді рухомих шарнірних опор. Граничні умови для такого способу закріплення країв квадранта кільця мають вигляд

$$V|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (4.12)$$

Внутрішні силові фактори для кільця у цьому випадку записуються так:

$$N = -\frac{P}{2} \cos \varphi, \quad Q = -\frac{P}{2} \sin \varphi, \quad M = M_p + \frac{P}{2} R \cos \varphi. \quad (4.13)$$

Тут M_p – невідомий згинальний момент у перерізі, де діє прикладена сила P . Для його знаходження, а також величини напружень у поперечних перерізах кільця, необхідно розв’язати систему диференціальних рівнянь (4.7), яку за відсутності розподіленого навантаження можна звести до вигляду:

$$\frac{d^2\bar{w}}{d\varphi^2} + w = -\frac{MR^2}{E_2I'} - \frac{\nu'NR}{2E_3h}; \quad \frac{dv}{d\varphi} + w = \frac{M + NR}{2E_2h}. \quad (4.14)$$

Тут $\bar{w} = w - 0.8\tilde{w}_r$.

Використавши залежності (4.13), рівняння (4.14) можна записати у такому вигляді:

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = -\frac{M_pR^2}{E_2I'} - \frac{PR^3}{2E_2I'} \left(1 + \frac{3E_2}{5G'} \frac{I'}{hR^2} \left(1 - \nu' \frac{5G'}{6E_2} \right) \right) \cos \varphi;$$

$$\frac{dv}{d\varphi} + w = \frac{M_p}{2E_2h}. \quad (4.15)$$

Розв’язками системи диференціальних рівнянь (4.15), із врахуванням умов симетричності задачі, будуть залежності:

$$w(\varphi) = C_1 \cos \varphi + w^*(\varphi); \quad v(\varphi) = -C_1 \sin \varphi + v^*(\varphi), \quad (4.16)$$

$$\text{де } w^*(\varphi) = -\frac{M_pR^2}{E_2I'} - \frac{PR^3}{4E_2I'} \left(1 + \frac{6I_0E_2^*}{5G'} \right) \varphi \sin \varphi,$$

$$v^*(\varphi) = \frac{M_pR^2}{E_2I'} \left(1 + \frac{h^2}{3R^2} \right) \varphi + \frac{PR^3}{4E_2I'} \left(1 + \frac{6I_0E_2^*}{5G'} \right) (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) -$$

часткові розв’язки системи диференціальних рівнянь (4.15);

$$E_2^* = E_2 \left(1 - \nu'' \frac{5G'}{6E_2} \right); \quad I_0 = I' / (2hR^2).$$

Невідомі сталі C_1 , M_P можна знайти, якщо задовольнити граничним умовам (4.12)

$$C_1 = \frac{\pi M_P R^2}{2E_2 I'} \left(1 + \frac{h^2}{3R^2} \right) + \frac{PR^3}{4E_2 I'} \left(1 + \frac{6I_0 E_2^*}{5G'} \right); \quad (4.17)$$

$$M_P = -\frac{PR}{\pi(1+I_0)} \left(1 - \frac{E_2}{G'} \frac{h^2}{R^2} (0.1 + 0.5(2\nu'' - 1) + \nu'' G' / (3E_2)) \right).$$

Використавши формулу (4.9) для напруження σ_φ , одержимо його значення залежно від кута φ та величини стискувальної сили P :

$$\sigma_\varphi = \frac{M_P}{2Rh} + \frac{M}{I'} \frac{Rz}{R+z} + \frac{E_2}{8G'} \frac{P}{h} \frac{z}{R+z} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{h^2}{Rz} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{3}{5} \right) \cos \varphi,$$

де вважається, що товщина кільця $t = 1$.

Значення напруження $\tilde{\sigma}_\varphi(\pm h, \varphi, h/R) = \frac{\sigma_\varphi}{2P/\pi R}$ у горизонтальних ($\varphi = 0$) і вертикальних ($\varphi = \pi/2$) перерізах кільця, залежно від розрахункових моделей та ступеня анізотропії, наведені у табл. 4.3.

Із аналізу даних таблиці 4.3 видно, що для ізотропного матеріалу значення відносних нормальних напружень $\tilde{\sigma}_\varphi(\pm h, \varphi, h/R)$, що обчислені на горизонтальному та вертикальному діаметрах кільця за допомогою формул теорії

пружності [147] та запропонованої моделі криволінійних стрижнів, різняться між собою у межах $1 \div 3\%$.

Таблиця 4.3

Визначення нормальних напружень $\tilde{\sigma}_\varphi$ у перерізах кільця

$\tilde{\sigma}_\varphi\left(\pm h, \varphi, \frac{h}{R}\right)$	Точні розв'язки теорії пружності	Уточнена модель		Гіпотеза плоских перерізів ($E/G' = 0$)
		$\frac{E}{G'} = 2.6$	$\frac{E}{G'} = 20$	
$\tilde{\sigma}\left(\pm h, 0; \frac{1}{3}\right)$	$\frac{2.20}{-6.71}$	$\frac{2.26}{-6.62}$	$\frac{3.00}{-8.04}$	$\frac{2.16}{-6.48}$
$\tilde{\sigma}\left(\pm h, 0; \frac{1}{9}\right)$	$\frac{29.46}{-41.43}$	$\frac{29.05}{-41.23}$	$\frac{30.93}{-43.74}$	$\frac{28.78}{-41.04}$
$\tilde{\sigma}\left(-h, \frac{\pi}{2}; \frac{1}{9}\right)$	63.34	65.29	65.71	65.59

Останнє підтверджує достовірність запропонованої моделі. Разом з тим, побудована модель дозволяє знаходити напруження та деформації і для композитних стрижнів, коли відношення $E_2/G' \neq 2,6$. У цьому випадку, разом із ростом відношень модулів пружності E_2/G' , E_2/E_3 може відбуватися значний ріст нормальних напружень σ_φ .

Класичні моделі (гіпотеза плоских перерізів та гіпотеза лінійного розподілу напружень) на такі зміни властивостей матеріалу вже не реагують.

Граничне навантаження $P = P^*$ для даного кільця можна знайти, використавши силовий критерій Дж. Ірвіна та напівемпіричну формулу [184] для кільця з двома внутрішніми тріщинами, що виникають на лінії дії діаметрально стискувальних сил

$$K_I \equiv \sigma_{\max} \sqrt{\pi l} f_1(\lambda) = K_{Ic}, \quad (4.18)$$

де $\sigma_{\max} = \tilde{\sigma}_\varphi \frac{3(1+\beta)}{(1-\beta)^2} \cdot \frac{0.995}{f_2(\beta)}$ – напівемпірична формула для

максимального напруження у кільці на місці тріщини; K_{Ic} – критичне значення коефіцієнта інтенсивності напружень для тріщини нормального відриву (характеристика тріщиностійкості матеріалу кільця);

$$\beta = (R-h) / (R+h); \quad \lambda = l / (R-h); \quad \tilde{\sigma}_\varphi = 2P / (\pi(R+h));$$

$$f_1(\lambda) = 1.1215(1 - 3.36\lambda + 10.6\lambda^2);$$

$$f_2(\beta) = 1 + \beta / 0.388 - (\beta / 0.523)^2 + (\beta / 0.84)^3.$$

Разом з тим, формула для σ_{\max} записана авторами [183] тільки для критичної точки, що знаходиться на лінії дії сил. За появи тріщини в інших точках наведена формула вже не може застосовуватися, тоді як у випадку композитного матеріалу максимальне напруження може виникати і в інших точках кільця (не обов'язково тільки на лінії дії сил). Тому в умові (4.16) буде доцільніше використати вираз (4.9) для напруження

σ_φ , знайдений на базі розробленої моделі для композитних кілець, за певних значень координат $z = z^*$ та $\varphi = \varphi^*$

$$\sigma(P^*, \varphi_0, z^*) = K_{IC} / [f_1(\lambda) \sqrt{\pi l}]. \quad (4.19)$$

Тут $\sigma_\varphi(P^*, \varphi_0, z^*)$ - нормальне напруження у волокні з координатами (φ_0, z^*) бездефектного кільця.

Подавши нормальне напруження σ_φ у вигляді $\sigma_\varphi(P^*, \varphi_0, z^*) = P^* \Phi(\varphi_0, z^*)/A$, отримаємо граничне значення зовнішньої стискувальної сили

$$P^* = K_{IC} A / (f_1(\lambda) \sqrt{\pi l} \Phi(\varphi_0, z^*)), \quad \Phi(\varphi_0, z^*) > 0, \quad (4.20)$$

$$\Phi(\varphi_0, z^*) = \tilde{M} \left(1 + \frac{z_0^*}{I_0} \right) - \frac{1}{2} \cos \varphi_0 +$$

де

$$+ \frac{E}{4G'} \left(\left(\frac{z^*}{h} \right)^2 - \frac{3}{5} - \frac{h}{R} \left(\frac{z^*}{h} - \frac{h}{3z^*} - \frac{h}{3R} \right) \right) z_0^* \cos \varphi_0,$$

$$\tilde{M} = -\frac{1}{\pi(1+I_0)} \left(1 - \frac{E_2}{G'} \frac{h^2}{R^2} (0.1 + 0.5(2\nu'' - 1) + \nu'' G' / (3E_2)) \right) + \frac{1}{2} \cos \varphi_0,$$

$$z_0^* = \frac{z^*}{R + z^*}, \quad I_0 = \frac{I'}{2hR^2} = \frac{R}{2h} \ln \frac{R+h}{R-h} - 1 \approx \frac{h^2}{3R^2} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{h^2}{R^2} \right).$$

Аналіз напруженого стану у кільці (табл.4.3) показує, що найнебезпечнішими місцями появи тріщин можуть бути точки, розміщені на вертикальному діаметрі (лінії дій сил) внутрішньої

$(\varphi_0 = \pi/2, z^* = -h+l)$ та горизонтальному зовнішньої $(\varphi_0 = 0, z^* = h-l)$ поверхонь кільця. У цих точках максимальні розтягувальні напруження є найбільшими. Вважаючи глибину тріщини l малою порівняно з іншими параметрами кільця, при обчисленні функції $\Phi(\varphi_0, z^*)$ у названих точках припускається, що $z^* \approx \pm h$. Таке наближення завжди піде в запас міцності кільця.

Порівняння числових результатів для K_I , порохованих за даною формулою, з відповідними табличними даними М.П.Саврука [134], одержаними методом СІР, показує, що її похибка не перевищує 6% для $h/R \geq 1/3$ і $l/h \leq 1$.

На рис. 4.5 показано залежність відносного критичного навантаження $\tilde{P}_{\pm}^* = P^* \cdot \sqrt{\pi l} / (A \cdot K_{Ic})$ від висоти перерізу та відношень фізичних характеристик анізотропії E/G' композитного кільця. Величина \tilde{P}_+^* відповідає випадку, коли тріщина знаходиться на зовнішній поверхні кільця на рівні горизонтального діаметра (криві 1, 2). Величина \tilde{P}_-^* відповідає внутрішній тріщині на вертикальному діаметрі кільця (крива 3). Криві 1, 3 побудовані для ізотропного матеріалу ($E/G' = 2.6$), а крива 2 - для композитного, при $E/G' = 20$. Штрихова крива побудована за формулою (4.20), що відповідає напівемпіричному розв'язку Ражу та Ньюмена [143,184].

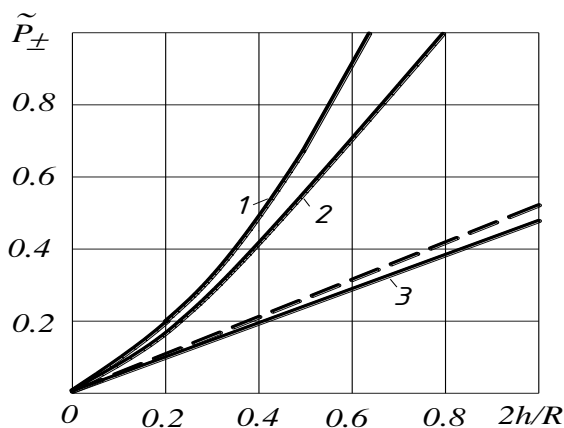


Рис. 4.5. Діаграми граничних навантажень

Аналіз діаграм граничних навантажень, представлених на рис. 4.5 показує, що значення величин цих навантажень на внутрішній поверхні кільця \tilde{P}_- значно нижчі (небезпечніші) за відповідні величини на зовнішній поверхні кільця \tilde{P}_+ . У ту ж саму сторону пониження для величин граничних навантажень є вплив поперечної анізотропії матеріалу.

На основі аналізу одержаних результатів можна стверджувати, що запропонована теорія оболонок середньої товщини може досить точно описувати НДС в околі поверхневої тріщини. Досліджено вплив анізотропії матеріалу на величину КІН залежно від товстостінності оболонки та впливу крайового ефекту. Величина КІН \tilde{K}_I залежить як від товщини оболонки, так і від форми самої тріщини. При збільшенні еліптичності тріщини ($\varepsilon_2 < 0,8$) величина КІН \tilde{K}_I зростає. Зміна КІН \tilde{K}_I

залежно від поширення тріщини в глибину перерізу оболонки не перевищувала 10-12%% за наведених товщин та форми тріщини. Аналіз графічної залежності відносного КІН \tilde{K}_I від товщини оболонки свідчить, що ця зміна має приблизно гіперболічну залежність із однаковою тенденцією для різних глибин тріщини.

На основі побудованої моделі для композитних кілець і криволінійних стрижнів розглядається проблема дослідження міцності пошкодженого тріщиною кругового композитного кільця, що стискується діаметральними силами P . Для знаходження граничного навантаження P^* для такого кільця використовується силовий критерій Дж. Ірвіна, де вводяться формули для нормальних напружень σ_φ у перерізах кілець на рівні виникнення тріщин. На основі одержаних результатів побудовані діаграми граничних навантажень залежно від висоти перерізу кільця та відношень модулів пружності E_2 / G' , E_2 / E_3 .

Показано, що найнебезпечнішими тріщинами в кільці є тріщини на лінії дії стискувальних сил, що виникають у поперечних перерізах його внутрішньої поверхні, де діють максимальні розтягувальні напруження. Для таких тріщин граничні навантаження є найнижчими для всіх товщин кільця. Значно понижуює величини граничних навантажень вплив поперечної анізотропії матеріалу. Зокрема, це стосується пониження поперечної жорсткості композитного кільця, що виражається через зростання відношень фізичних характеристик анізотропії E_2 / G' , E_2 / E_3 .

РОЗДІЛ 5

ЗГИН ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК І КІЛЕЦЬ ЗА ДІЇ ЛОКАЛЬНИХ І КОНТАКТНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

5.1. Напружено - деформований стан циліндричної оболонки за дії кільцевих зосереджених зусиль

Розглянемо згин циліндричної оболонки кільцевими зосередженими зусиллями P у перерізі, що знаходиться досить далеко від торців циліндра (рис.5.1). Така задача, у постановці рівнянь класичної теорії оболонок Кірхгофа- Лява, розв'язана С.П.Тимошенком [147]. У постановці некласичної теорії оболонок, що враховує деформацію поперечного зсуву, розв'язок даної задачі отримано у монографіях Б.Л.Пелеха [98] та В.В.Васильєва [31]. Для випадку ортотропної оболонки дана задача розглядалась у роботі [30].

За розрахункові рівняння цієї задачі візьмемо диференціальні рівняння (4.1), які, крім деформації поперечного зсуву, враховують ще й деформацію поперечного обтиснення та ефект Пуассона. Поклавши нулю у правих частинах цієї системи вирази з розподіленням навантаженням, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{dx^4} - 2g_0^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda^4 w &= 0; \\ K_x \frac{d^2 \tilde{w}_\tau}{dx^2} &= 2 \frac{E_2 h}{R^2} w; \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\nu_{12}}{R} \frac{dw}{dx} = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \text{де } D_1 &= \frac{2}{3} \tilde{E}_1 h^3; & 2g_0^2 &= \tilde{\varepsilon} \lambda^4; & \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon_x (1 - \nu^*); & \varepsilon_1 &= \varepsilon_x - 0.4 A_1 h^2; \\ \tilde{E}_1 &= E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}); & \lambda^4 &= 2E_2 h / (D_1 R^2); & \nu^* &= \tilde{\nu}_{12} \frac{5 G_{13}}{6 E_2}; \\ \varepsilon_x &= 0,4 h^2 \frac{\tilde{E}_1}{G_{13}}; & \tilde{\nu}_{12} &= \nu_{12} (1 + \tilde{A}_2); & \lambda^4 &= 2E_2 h / (D_1 R^2); \\ \tilde{w}_r &= w_r - 0,5 A_1 h^2 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{6 E_2}{5 G'} \frac{w}{R^2} \right); & \tilde{A}_2 &= A_2 - \nu_{12} A_1; \\ A_1 &= (\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}) (1 - \nu_{12} \nu_{21})^{-1}, & (1 \rightarrow 2). \end{aligned}$$

Якщо довжина оболонки така, що впливом крайового ефекту можна знехтувати, то загальний розв'язок першого рівняння системи (5.1), праворуч від місця прикладання навантаження ($x > 0$), можна записати у вигляді

$$\text{при } g_0 < \lambda^2 \text{ — } w = e^{-\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x); \quad (5.2)$$

$$\text{при } g_0 > \lambda^2 \text{ — } w = e^{-\alpha x} (C_1 \operatorname{ch} \beta x + C_2 \operatorname{sh} \beta x); \quad (5.3)$$

$$\text{при } g_0 = \lambda^2 \text{ — } w = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 x e^{-\alpha x}, \quad (5.4)$$

$$\text{де } \alpha = \sqrt{\frac{\lambda^2 + g_0^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{\lambda^2 - g_0^2}{2}}; \quad C_1, C_2 \text{ — довільні сталі,}$$

що знаходяться із граничних умов на краях оболонки.

Для розв'язання цієї задачі необхідно вирішити допоміжну задачу про визначення напружено-деформованого стану півнескінченної циліндричної оболонки, навантаженої у перерізі

$x = 0$ розподіленим згинальним моментом M_0 та поперечною силою Q_0 (рис. 5.2).

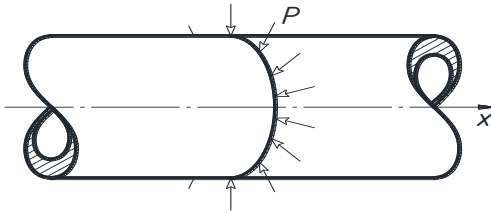


Рис. 5.1. Схема навантаження оболонки

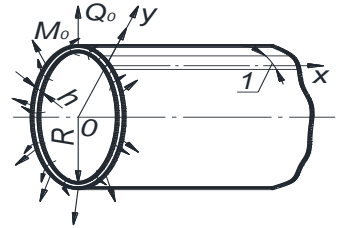


Рис. 5.2. Схема оболонки у допоміжній задачі

У подальшому, без зменшення загальності, скористаємося розв'язком (5.3), коли $g_0^2 < \lambda^2$. Для більшої зручності його можна записати через фундаментальні функції типу функцій Кривола у вигляді

$$w = C_1 K_1(x) + C_2 K_2(x). \quad (5.5)$$

Тут $K_1(x) = e^{-\alpha x} \cos \beta x$, $K_2(x) = e^{-\alpha x} \sin \beta x$.

При диференціюванні та інтегруванні цих функцій можна скористатися такими рекурентними формулами:

$$K_1'(x) = -\alpha K_1 - \beta K_2; \quad K_2'(x) = -\alpha K_2 + \beta K_1;$$

$$K_1''(x) = (\alpha^2 - \beta^2) K_1 + 2\alpha\beta K_2; \quad K_2''(x) = (\alpha^2 - \beta^2) K_2 - 2\alpha\beta K_1;$$

$$K_1'''(x) = \alpha(3\beta^2 - \alpha^2) K_1 - \beta(3\alpha^2 - \beta^2) K_2;$$

$$K_2'''(x) = \alpha(3\beta^2 - \alpha^2) K_2 + \beta(3\alpha^2 - \beta^2) K_1;$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) \int K_1(x) dx = -\alpha K_1 + \beta K_2 + C; \quad (5.6)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) \int K_2(x) dx = -\alpha K_2 - \beta K_1 + C.$$

Функції $K_i(x)$ дорівнюють нулю на нескінченності, а при $x = 0$ приймають такі значення:

$$K_1(0) = 1; \quad K_2(0) = 0 \quad .$$

Для знаходження сталих C_1, C_2 скористаємося граничними умовами на завантаженому торці оболонки:

$$M_x = M_0; \quad Q_x = Q_0 \quad \text{при } x = 0 \quad . \quad (5.7)$$

Підставивши значення згинального моменту M_x та поперечної сили Q_x (за умови симетричності задачі), одержимо граничні умови (при $x = 0$) у переміщеннях

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \tilde{\nu}_{12} \frac{w}{R^2} = -\frac{M_0}{D_1}; \quad \frac{d\tilde{w}_\tau}{dx} = \frac{Q_0}{K_x}, \quad (5.8)$$

де $\bar{w} = w - 0.8w_\tau + h^2w_2$; $\tilde{w}_\tau = w_\tau - h^2w_2$; $w_2 = \frac{A_1}{2} \left(\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{6E_2}{5G'} \cdot \frac{w}{R^2} \right)$;

$$\tilde{\nu}_{12} = \nu_{12} (1 + \tilde{A}_2); \quad \tilde{\nu}_{12} = \nu_{12} (1 + \tilde{A}_2); \quad \tilde{A}_2 = A_2 - \nu_{12}A_1.$$

Виходячи з другого рівняння системи (5.1), знайдемо вираз для величини \tilde{w}_τ

$$\tilde{w}_\tau = \frac{D_1}{K_x} \left\{ C_1 \left[\begin{array}{l} (\alpha^2 - \beta^2) K_1 - \\ -2\alpha\beta K_2 \end{array} \right] + C_2 \left[\begin{array}{l} (\alpha^2 - \beta^2) K_2 + \\ +2\alpha\beta K_1 \end{array} \right] \right\}. \quad (5.9)$$

Вирази (5.5) та (5.9) підставимо у граничні умови (5.8). У результаті, після певних перетворень, одержимо систему рівнянь для визначення сталих C_1 , C_2

$$g_0^2 C_1 + 2\alpha\beta C_2 = \frac{M_0}{D_1}; \quad \alpha C_1 + \beta C_2 = -\frac{Q_0}{\lambda^2 D_1}. \quad (5.10)$$

Розв'язуючи систему (5.10), одержимо вирази для C_1 , C_2 :

$$C_1 = -\frac{M_0}{\lambda^2 D_1} - \frac{2\alpha Q_0}{\lambda^4 D_1}; \quad C_2 = \frac{\alpha M_0}{\beta \lambda^2 D_1} + \frac{g_0^2 Q_0}{\beta \lambda^4 D_1}; \quad \lambda^2 = \sqrt{\frac{2E_2 h}{D_1 R^2}}. \quad (5.11)$$

Таким чином, можна вважати, що допоміжна задача розв'язана. Вираз для радіального переміщення серединної поверхні оболонки можна записати у такому вигляді:

$$w = -\frac{K_1(x)}{D_1 \lambda^4} (\lambda^2 M_0 + 2\alpha Q_0) + \frac{K_2(x)}{\beta D_1 \lambda^4} (\alpha \lambda^2 M_0 + g_0^2 Q_0). \quad (5.12)$$

Для того, щоб визначити напружено-деформований стан оболонки, навантаженої кільцевими зосередженими зусиллями P , досить застосувати одержані розв'язки для кожної з половин циліндричної оболонки (при цьому, вважаючи її досить довгою). У такому випадку величина $Q_0 = -P/2$, а величину згинального моменту M_0 у перерізі $x=0$ визначимо з граничної умови (2.26), поклавши нулю узагальнений кут повороту $\gamma_x = 0$. У переміщеннях w , \tilde{w}_τ ця умова має вигляд

$$\frac{dw}{dx} = \frac{4}{5} \frac{d\tilde{w}_\tau}{dx} \quad \text{при } x=0. \quad (5.13)$$

Використовуючи рівність (5.12) та другу умову (5.8), одержимо:

$$\alpha C_1 - \beta C_2 = 0,8P / K_x. \quad (5.14)$$

Підставивши в умову (5.14) значення сталих C_1, C_2 із співвідношень (5.11), отримаємо величину згинального моменту M_0 в перерізі $x = 0$

$$M_0 = P(1 - \tilde{\nu}_{12}\lambda^2 h^2 / 3) / 4\alpha. \quad (5.15)$$

Таким чином, переміщення серединної поверхні оболонки, навантаженої кільцевими зосередженими зусиллями P , можна записати у вигляді:

$$w = \frac{Pe^{-\alpha x}}{4D_1\alpha\lambda^4} \left(\lambda^2 (1 + \tilde{\nu}_{12}\lambda^2 h^2 / 3) + 2g_0^2 \right) \cos \beta x + \frac{Pe^{-\alpha x}}{4\beta D_1\lambda^4} \left(\lambda^2 (1 - \tilde{\nu}_{12}\lambda^2 h^2 / 3) - 2g_0^2 \right) \sin \beta x. \quad (5.16)$$

Поклавши у формулі (5.16) $g_0^2 = \tilde{\nu}_{12} = 0$; $\alpha = \beta = \lambda / \sqrt{2}$, одержимо результат С.П.Тимошенка [147] для класичної теорії оболонок. Випадок $g_0^2 \neq 0$ відповідає некласичній теорії типу Тимошенка [31,98]. Максимальний прогин серединної поверхні в оболонці w_0 припадає уздовж лінії дії зосереджених зусиль P . Його значення визначається з формули (5.16)

$$w_0 = \frac{PR^2}{8E_2\alpha h} \left(\lambda^2 (1 + \tilde{\nu}_{12}\lambda^2 h^2 / 3) + 2g_0^2 \right). \quad (5.17)$$

Формули (5.16), (5.17) визначають переміщення серединної поверхні оболонки. Разом з тим, на основі рівнянь даної моделі існує можливість визначення переміщень зовнішніх поверхонь оболонки $W(\pm h)$. Знайти переміщення безпосередньо у місці прикладання навантаження можна, якщо представити зусилля P через дельта- функцію, яка є невизначеною у точці прикладання. Переміщення внутрішньої поверхні оболонки $W(-h)$ на основі формул (2.13) буде дорівнювати

$$W(-h) = w(x) + (A_1 \varepsilon_x + A_2 \varepsilon_\varphi) h - 0.5 A_1 \kappa_x^T h^2, \quad (5.18)$$

$$\text{де } \varepsilon_x = -\nu_{12} \frac{w}{R}; \varepsilon_\varphi = \frac{w}{R}; \kappa_x^T = -\left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{6 E_2}{5 G_{13}} \frac{w}{R^2} \right).$$

Підставивши у формулу (5.18) значення відповідних параметрів, одержимо вираз для переміщення внутрішньої поверхні оболонки $W(-h)$ через переміщення серединної поверхні оболонки $w(x)$

$$W(x, -h) = \left(1 + \tilde{A}_2 \frac{h}{R} - \frac{3 A_1 E_2}{5 G_{13}} \frac{h^2}{R^2} \right) w(x) + \frac{1}{2} A_1 h^2 \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (5.19)$$

Застосовуючи до формули (5.19) розв'язок (5.16), шляхом нескладних перетворень, запишемо розрахункову формулу для переміщення внутрішньої поверхні оболонки в перерізі $x = 0$

$$W(-h) = \frac{PR^2}{8E_2\alpha h} \left(\lambda^2 \left(1 + \frac{1}{3} \tilde{\nu}_{12} \lambda^2 h^2 \right) + 2g_0^2 \right) \left(1 + \tilde{A}_2 \frac{h}{R} - \frac{3A_1}{10} \frac{E_2}{G_{13}} \frac{h^2}{R^2} \right) - \frac{A_1 PR^2}{16E_2 \beta h} \left(\lambda^2 (1 - \tilde{\nu}_{12} \lambda^2 h^2 / 3) - 2g_0^2 \right) \sqrt{\lambda^4 h^4 - g_0^4 h^4}. \quad (5.20)$$

Для дослідження впливу ефекту поперечного зсуву та ефекту Пуассона обчислимо за формулами (5.17) та (5.20) значення відносного переміщення $\tilde{w} = w / w_{кл.}$, $W(-h) / w_{кл.}$ на серединній та внутрішній поверхнях циліндричної оболонки залежно від відносної товщини оболонки (h/R) та відношення модулів пружності E_2 / G_{13} , при $\nu_{12} = \nu'' = 0.3$. Дані розрахунків наведені в таблиці 5.1, де числа у знаменнику відповідають значенням переміщень внутрішньої поверхні оболонки. Прочерки в таблиці відносяться до розв'язку (5.3), де $\lambda^2 > g_0^2$. У другій колонці табл. 5.1 розміщені результати класичної теорії Кірхгофа-Лява, де $E_2 / G_{13} = 0$, $\tilde{\nu}_{12} = 0$.

З аналізу даних табл. 5.1 видно, що на переміщення в оболонці (у порівнянні із класичною теорією оболонок) дуже сильно впливає ефект деформації поперечного зсуву (E_2 / G_{13}). Особливо це стосується композитного ($E_2 / G_{13} = 40$) товстостінного циліндра ($h/R = 1/5$), де радіальні переміщення збільшуються майже у 3,5 рази. Вплив ефекту Пуассона (параметр $\tilde{\nu}_{12}$) та поперечного обтиснення на радіальні переміщення у даній задачі незначний, про що свідчать майже

однакові значення радіальних переміщень на серединній та внутрішній поверхнях оболонки.

Таблиця 5.1

Значення відносних переміщень \tilde{w} у перерізі за дії кільцевого навантаження

E_2 / G_{13}	0	2.6	10	20	40
$\frac{h}{R} = \frac{1}{5}$	1	$\frac{1,272}{1,284}$	$\frac{1,876}{1,934}$	$\frac{2,503}{-}$	$\frac{3,455}{-}$
$\frac{h}{R} = \frac{1}{10}$	1	$\frac{1,141}{1,141}$	$\frac{1,483}{1,497}$	$\frac{1,871}{1,900}$	$\frac{2,498}{-}$
$\frac{h}{R} = \frac{1}{20}$	1	$\frac{1,071}{1,070}$	$\frac{1,256}{1,259}$	$\frac{1,481}{1,488}$	$\frac{1,869}{1,884}$

5.2. Контактна взаємодія циліндричної оболонки з жорстким бандажем із параболічною основою

При розрахунку тонкостінних конструкцій від дії зосереджених навантажень виникають серйозні труднощі у визначенні напруженого стану в околі цих навантажень. Проблема може бути досліджена якісніше (зокрема і в циліндричній оболонці), якщо це навантаження представлене як результат контактної взаємодії пружного чи жорсткого штампа (бандажа) з параболічною формою основи. Але у цьому випадку

виникає проблема визначення контактної тиску (напруження), що діє між бандажем та оболонкою.

У роботах С.П.Тимошенка [147] розглядалась задача визначення напруженого стану в бандажі, що був насаджений з певним натягом на циліндричну трубу. Бандаж вважався пружним, а розподіл контактних напружень таким, як для смуги на пружній основі та визначався із рівняння сумісності деформацій бандажа та труби. У роботі В.С. Гудрамовича та В.І. Моссаковського [56] пружне кільце (шпангоут), що підкріплювало оболонку, хоча й вважалось пружним, але набагато жорсткішим у порівнянні з жорсткістю оболонки (деформації кільця з боку оболонки вважалися відсутніми). Приймалося, що при взаємодії кільця із абсолютно жорсткою основою на нього діють невідомі зосереджені зусилля та рівномірно розподілений контактний тиск. Було знайдено напружений стан у кільці залежно від величини області контакту з основою.

В аналогічних задачах про контактну взаємодію, що розглядалися у постановці класичної теорії оболонок Кірхгофа-Лява, а також некласичних моделей типу Тимошенка [31,98,99], не було можливості (без попереднього прийняття гіпотези про розподіл) одержати аналітичну формулу розподілу контактних напружень в області контакту [9,44,63,96,108,114,154,171]. Така можливість з'являється тільки у випадку, коли модель

розрахункових рівнянь оболонки враховує ефект поперечного обтиснення. Даний ефект був урахований в контактних задачах для пластин та оболонок, що взаємодіяли з жорсткими штампами (огляд у роботах [61,63,114]). Одержані у цих випадках результати не тільки якісно, а й кількісно були дуже близькими до результатів тривимірної задачі теорії пружності. Для циліндричної оболонки контактна задача про її взаємодію з жорстким бандажем, з відомою областю контакту, розв’язана у роботі [75], де показано, що неврахування деформації поперечного обтиснення призводить до результатів, що суперечать граничним умовам на межі контакту.

Розглядається довга циліндрична оболонка, посередині якої з відомим натягом δ насаджено абсолютно жорсткий бандаж із параболічною формою основи контакту (рис. 5.3).

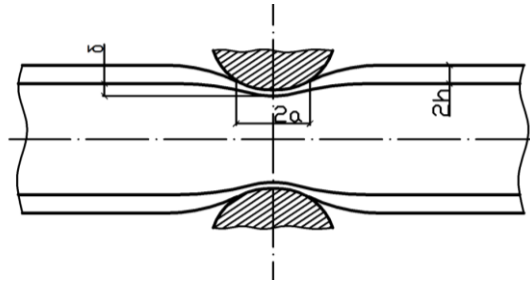


Рис. 5.3. Навантаження оболонки кільцевим бандажем

Граничні умови на краях оболонки не впливають на напружено-деформований стан оболонки в області контактної взаємодії. Для розв’язування даної задачі вибирається система

диференціальних рівнянь (2.39) із такими значеннями параметрів навантаження:

$$q_1(x) = -0.5q(x); \quad q_2(x) = -q(x); \quad q_z(x) = -\left(1 + \frac{h}{R}\right)q(x),$$

де величина $q(x)$ - наперед невідомий контактний тиск між основою бандажа та зовнішньою поверхнею циліндричної оболонки у межах області контакту ($-a \leq x \leq a$); $2a$ – величина області контакту.

Враховуючи наведені зауваження, система розрахункових рівнянь задачі може бути записана у вигляді:

$$\begin{aligned} A_0 w^{IV} - \tilde{\varepsilon} \lambda^4 w'' + \lambda^4 w = -\left(1 + \frac{h}{R}\right) (1 - \varepsilon_1 \frac{d^2}{dx^2}) \frac{q}{D_1} + \lambda_q q^{IV} - \frac{\tilde{A}_1}{2R} \frac{q''}{\tilde{E}_1}; \\ K_x \frac{d^2 \tilde{w}_\tau}{dx^2} - \frac{2E_2 h}{R^2} w = q \left(1 + \frac{h}{R}\right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Тут

$$A_0 = 1 + 0,1 A_1 h^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1,2}{R^2} \frac{E_2}{G_{13}}\right); \quad \lambda^4 = \frac{2E_2 h}{D_1 R^2}; \quad \varepsilon = \frac{4}{5} \frac{D_1}{K_x};$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{5} \left(\frac{\tilde{E}_1}{G_{13}} - A_1\right) h^2; \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon (1 - \nu^*); \quad \nu^* = \frac{5}{6} \tilde{\nu}_{12} G_{13} / E_2;$$

$$\lambda_q = \frac{3}{40} \left(1 + 0,8 \frac{A_1 E_3}{G_{13}}\right) \frac{h}{E_3}; \quad \tilde{A}_1 = A_1 + \nu_{12} \frac{\tilde{E}_1}{E_3}$$

$$\tilde{\nu}_{12} = \nu_{12} (1 + \tilde{A}_2); \quad \tilde{A}_2 = A_2 - \nu_{12} A_1; \quad \tilde{w}_\tau = w_\tau - h^2 w_2; .$$

У наведеній системі рівнянь з обох боків знаходяться невідомі функції переміщень $w(x)$ і контактного тиску $q(x)$. Для вирішення цієї проблеми в неklasичних моделях оболонок типу Тимошенка переміщенню $w(x)$ надавали вигляду функції, що описувала форму основи штампа. У результаті отримували диференціальне рівняння другого порядку відносно контактної тиску $q(x)$. Але у цьому випадку розподіл контактної тиску вздовж самої області контакту залишався таким, що не відповідав реальному закону розподілу. Наприклад, у випадку гладкого штампа, основа якого описується рівнянням $z = \omega f(x)$, контактний тиск на межі області контакту має бути нульовим, а рівняннями моделі типу Тимошенка (як і класичної теорії Кірхгофа-Лява) забезпечити цю умову неможливо.

У моделях оболонок і пластин, де враховується поперечне обтиснення, з'являється ще одна залежність, яка виводиться з умови, що тільки зовнішня поверхня оболонки мусить повторювати форму штампа. Ця умова для даної моделі оболонок має вигляд:

$$W(x, h) = \delta - \omega f(x), \quad (5.22)$$

де $f(x)$ - гладка парна функція; ω - сталий параметр.

На основі залежностей (2.13), умову (5.22) можна замінити такою:

$$\alpha_w w - \frac{13}{16} \frac{q}{E_3} h + \frac{1}{2} A_1 h^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \delta - \omega f(x). \quad (5.23)$$

Тут $\alpha_w = 1 - \tilde{A}_2 \frac{h}{R} - 0.6 A_1 \frac{E_2}{G_{13}} \frac{h^2}{R^2}$.

Залежність (5.23) можна записати у вигляді, запропонованому Б.Я. Кантором [61] при розв'язуванні плоскої контактної задачі теорії пружності для ізотропного матеріалу

$$q(x) = \frac{13}{16} \frac{E_3}{h} (\alpha_w w - \delta + \omega f(x)) + \frac{8}{13} A_1 E_3 h w'' . \quad (5.24)$$

Отримана залежність відповідає моделі пружної основи з двома коефіцієнтами основи, функцію якої в даному випадку виконує зовнішня поверхня циліндричної оболонки. З іншого боку, формули (5.23), (5.24) можна вважати виразами для визначення переміщення w , коли відома реакція q , або навпаки.

Дослідження, проведені авторами [9,44] при розв'язуванні подібних контактних задач для оболонок і пластин доводять, що у виразах (5.23), (5.24) впливом члена з другою похідною від w можна знехтувати. Тоді, з урахуванням цього зауваження, залежність переміщення серединної поверхні оболонки w від контактної навантаження q та форми штампа буде мати вигляд

$$w = \left[\frac{13}{16} \frac{q}{E_3} h + \delta - \omega f(x) \right] / \alpha_w . \quad (5.25)$$

Підставивши цю залежність у перше рівняння системи (5.21), одержимо розрахункове рівняння для визначення контактного тиску на оболонку під гладким абсолютно жорстким штампом ($|x| \leq a$):

$$q^{IV} - 2\tilde{g}^2 q'' + \tilde{\lambda}^4 q = \omega \tilde{f}(x) - \tilde{\delta} \tilde{\lambda}^4, \quad (5.26)$$

$$\text{де } 2\tilde{g}^2 = \left[k\tilde{\varepsilon}\tilde{\lambda}^4 + \alpha_w \varepsilon_1 \left(1 + \frac{h}{R} \right) / D_1 - \alpha_w \tilde{A}_1 h^3 / (3RD_1) \right] / \tilde{A}_0;$$

$$\tilde{A}_0 = \frac{13}{16} \frac{h}{E_3} A^* - \alpha_w \lambda_q; \quad A^* = 1 - 0.12A_1 \frac{E_2}{G_{13}} \frac{h^2}{R^2}; \quad k = \frac{13}{16} \frac{h}{E_3};$$

$$\lambda^4 = \frac{2E_2 h}{D_1 R^2}; \quad \tilde{\delta} = \delta / \tilde{A}_0; \quad \tilde{\lambda}^4 = \left[k\lambda^4 + \alpha_w \left(1 + \frac{h}{R} \right) / D_1 \right] / \tilde{A}_0;$$

$$\tilde{f}(x) = (A^* f^{IV} - \tilde{\varepsilon}\tilde{\lambda}^4 f'' + \lambda^4 f) / \tilde{A}_0.$$

Таким чином, диференціальне рівняння (5.26) для визначення контактної тиску під бандажем має четвертий порядок, тоді як у теоріях типу Тимошенка [98] відповідне розрахункове рівняння має тільки другий порядок. Останнє не дозволить надалі задовольнити всі умови спряження граничних умов на лінії переходу до ненавантаженої частини оболонки.

Не зменшуючи загальності розв'язку диференціального рівняння (5.26), прийемо, що $f(x) = x^2$, $\tilde{g}^2 < \tilde{\lambda}^2$. Тоді розв'язок рівняння (5.26), із врахуванням симетричності задачі, матиме вигляд

$$q(x) = C_1 \Phi_1(x) + C_2 \Phi_2(x) + q^*(x). \quad (5.27)$$

$$q^* = \frac{2\omega E_2 h}{\beta_w R^2} (x^2 + 2r / \beta_w);$$

$$\beta_w = 1 + (1 - \tilde{A}_2) \frac{h}{R} + \left(\frac{13 E_2}{8 E_3} - \frac{3 E_2}{5 G_{13}} A_1 - \tilde{A}_2 \right) \frac{h^2}{R^2};$$

$$r = \left(\frac{13 E_2}{8 E_3} \frac{h^2}{R^2} - \beta_w \right) \tilde{\varepsilon} + \alpha_w [\varepsilon_1 \left(1 + \frac{h}{R} \right) - \tilde{A}_1 \frac{h^3}{3R}] - \frac{\beta_w \delta}{2\omega};$$

$$\Phi_1(x) = ch\alpha x \cos \beta x, \quad \Phi_2(x) = sh\alpha x \sin \beta x, \quad \Phi_3(x) = sh\alpha x \cos \beta x,$$

$$\Phi_4(x) = ch\alpha x \sin \beta x - \text{фундаментальні функції О.М. Крилова -}$$

$$\text{В.З. Власова [36]}; \quad \alpha = \sqrt{(\tilde{\lambda}^2 + \tilde{g}^2)/2}; \quad \beta = \sqrt{(\tilde{\lambda}^2 - \tilde{g}^2)/2}.$$

Похідні та невизначені інтеграли цих функцій визначаються за такими рекурентними формулами:

$$\Phi_1'(x) = \alpha \Phi_3(x) - \beta \Phi_4(x), \quad \Phi_2'(x) = \alpha \Phi_4(x) + \beta \Phi_3(x),$$

$$\Phi_3'(x) = \alpha \Phi_1(x) - \beta \Phi_2(x), \quad \Phi_4'(x) = \alpha \Phi_2(x) + \beta \Phi_1(x),$$

$$\Phi_1''(x) = (\alpha^2 - \beta^2) \Phi_1(x) - 2\alpha\beta \Phi_2(x),$$

$$\Phi_2''(x) = (\alpha^2 - \beta^2) \Phi_2(x) + 2\alpha\beta \Phi_1(x), \quad (5.28)$$

$$\Phi_3''(x) = (\alpha^2 - \beta^2) \Phi_3(x) - 2\alpha\beta \Phi_4(x),$$

$$\Phi_4''(x) = (\alpha^2 - \beta^2) \Phi_4(x) + 2\alpha\beta \Phi_3(x),$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) \int \Phi_1(x) dx = \alpha \Phi_3(x) + \beta \Phi_4(x) + c,$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) \int \Phi_2(x) dx = \alpha \Phi_4(x) - \beta \Phi_3(x) + c,$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) \int \Phi_3(x) dx = \beta \Phi_2(x) + \alpha \Phi_1(x) + c,$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) \int \Phi_4(x) dx = \alpha \Phi_2(x) - \beta \Phi_1(x) + c.$$

Симетричність та гладкість межі області контакту повинна забезпечувати виконання умови рівності нулю контактних напружень (5.27) на межі області контакту

$$q(a) = q(-a) = 0. \quad (5.29)$$

Виходячи з цієї умови, знаходимо залежність між коефіцієнтами C_1, C_2 :

$$C_1 = -\frac{\Phi_2(a)}{\Phi_1(a)} C_2 - \frac{q^*(a)}{\Phi_1(a)}; \quad q^*(a) = \frac{2\omega E_2 h}{\beta_w R^2} (a^2 + 2r / \beta_w). \quad (5.30)$$

Для повного розв'язання поставленої задачі необхідно отримати ще й розв'язок диференціального рівняння (5.21) для області, вільної від навантаження ($|x| > 0$), коли $q(x) \equiv 0$. У цьому випадку це рівняння має вигляд:

$$w^{IV} - 2g_1^2 w'' + \lambda_1^4 w = 0, \quad (5.31)$$

де $2g_1^2 = \tilde{\varepsilon} \lambda^4 / A_0$; $\lambda_1^4 = \lambda^4 / A_0$.

Розв'язок даного рівняння у випадку $q_1^2 < \lambda_1^2$ буде мати вигляд (5.5):

$$w = C_3 K_1(x) + C_4 K_2(x). \quad (5.32)$$

Тут $K_1(x) = e^{-\alpha_1 x} \cos \beta_1 x$, $K_2(x) = e^{-\alpha_1 x} \sin \beta_1 x$;

$$\alpha_1 = \sqrt{(\lambda^2 + g^2) / 2}; \quad \beta_1 = \sqrt{(\lambda^2 - g^2) / 2}.$$

Для визначення трьох невідомих коефіцієнтів C_2 , C_3 , C_4 та величини області контакту $2a$ необхідно задовольнити чотирьом умовам спряження деформаційних і силових факторів на межі контакту $x = a$

$$W^{(i)}(a, h) = W^{(e)}(a, h); \quad \gamma_x^{(i)} = \gamma_x^{(e)};$$

$$M_x^{(i)} = M_x^{(e)}; \quad Q_x^{(i)} = Q_x^{(e)}. \quad (5.33)$$

Тут позначення з буквою “ i ” відповідають області контакту, а з буквою “ e ” – області, вільній від навантаження.

Необхідно також зауважити, що в некласичних теоріях оболонки [98] перша умова (5.33) записується у вигляді рівності переміщень серединної поверхні оболонки: $w^{(i)}(a) = w^{(e)}(a)$. Крім цього, розв’язки рівнянь «зсувних» теорій оболонки не допускають виконання умови (5.29).

Підставивши в умови (5.33) замість відповідних величин їхні вирази, записані через розв’язки задачі, одержимо систему рівнянь:

$$F_1 C_1 + F_2 C_2 - F_3 C_3 + F_4 C_4 = -\frac{2E_2 h a}{R^2 \alpha_w} (\delta^* - \frac{1}{3} \omega^* a^2) -$$

$$-(1 + \frac{h}{R}) (\frac{a^2}{3} + \frac{2r}{\beta_w}) \cdot \frac{2a \omega E_2 h}{\beta_w R^2}; \quad (5.34)$$

$$\Pi_1 C_1 + \Pi_2 C_2 + \Pi_3 C_3 - \Pi_4 C_4 = \frac{2\omega^* a}{\alpha_w} + \frac{4}{5} \frac{a \tilde{\lambda}^4}{\alpha_w K_x} (\delta^* - \frac{1}{3} \omega^* a^2);$$

$$R_1 C_1 + R_2 C_2 - R_3 C_3 - R_4 C_4 = \frac{2\omega^*}{\alpha_w} + \frac{3q^*(a)}{5\tilde{E}_1 h} \left(\frac{\tilde{E}_1}{G_{13}} - A_1 \right) \left(1 + \frac{h}{R} \right) +$$

$$+ \frac{E^*}{\alpha_w R^2} (\delta^* - \omega^* a^2); \quad \tilde{K}_1 C_3 + \tilde{K}_2 C_4 = \delta - \omega a^2,$$

$$\text{де } F_1 = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} \left(1 + \frac{h}{R} + \frac{13}{8\alpha_w} \frac{E_2}{E_3} \frac{h^2}{R^2} \right) (\alpha \tilde{\Phi}_3 + \beta \tilde{\Phi}_4);$$

$$\tilde{K}_1 = e^{-\alpha_1 a} \cos \beta_1 a;$$

$$F_2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} \left(1 + \frac{h}{R} + \frac{13}{8\alpha_w} \frac{E_2}{E_3} \frac{h^2}{R^2} \right) (\alpha \tilde{\Phi}_4 - \beta \tilde{\Phi}_3); \quad \tilde{K}_2 = e^{-\alpha_1 a} \sin \beta_1 a;$$

$$F_3 = \frac{2E_2 h}{\lambda_1^2 R^2} (\beta_1 \tilde{K}_2 - \alpha_1 \tilde{K}_1); \quad k = \frac{13}{16} \frac{h}{E_3}; \quad \delta^* = \delta + \frac{13}{4} \frac{E_2}{E_3} \frac{h^2}{R^2} \frac{\omega \cdot r}{\beta_w^2};$$

$$E^* = \frac{6}{5} \frac{E_2}{G_{13}} - \tilde{\nu}_{12}; \quad F_4 = \frac{2E_2 h}{\lambda_1^2 R^2} (\alpha_1 \tilde{K}_2 + \beta_1 \tilde{K}_1);$$

$$\lambda_1^2 = \lambda^2 / \sqrt{A_0}; \quad \omega^* = \omega \left(1 - \frac{13}{8} \frac{E_2}{E_3} \frac{h^2}{R^2 \beta_w} \right);$$

$$\Pi_1 = \left(\frac{7h}{8E_3 \alpha_w} - \frac{3h}{8E_3} \right) (\alpha \tilde{\Phi}_3 - \beta \tilde{\Phi}_4) - \frac{4}{5K_x \tilde{\lambda}^2} \left(1 + \frac{h}{R} + \frac{k \tilde{\lambda}^4}{\alpha_w} \right) (\alpha \tilde{\Phi}_3 + \beta \tilde{\Phi}_4);$$

$$\Pi_2 = \left(\frac{k}{\alpha_w} - \frac{3h}{8E_3} \right) (\alpha \tilde{\Phi}_4 + \beta \tilde{\Phi}_3) - \frac{4}{5K_x \tilde{\lambda}^2} \left(1 + \frac{h}{R} + \frac{k \tilde{\lambda}^4}{\alpha_w} \right) (\alpha \tilde{\Phi}_4 - \beta \tilde{\Phi}_3);$$

$$\Pi_3 = (\alpha_1 \tilde{K}_1 + \beta_1 \tilde{K}_2) - \frac{6}{5} \frac{E_2}{G_{13}} \frac{1}{R^2 \lambda_1^2} (\alpha_1 \tilde{K}_1 - \beta_1 \tilde{K}_2);$$

$$\tilde{\Phi}_1 = ch\alpha a \cos \beta a; \quad \tilde{\Phi}_3 = sh\alpha a \cos \beta a;$$

$$\Pi_4 = (\alpha_1 \tilde{K}_1 - \beta_1 \tilde{K}_2) - \frac{6}{5} \frac{E_2}{G_{13}} \frac{1}{R^2 \lambda_1^2} (\alpha_1 \tilde{K}_1 + \beta_1 \tilde{K}_2); \quad \tilde{\Phi}_2 = sh\alpha a \sin \beta a;$$

$$\tilde{\Phi}_4 = ch\alpha a \sin \beta a; \quad \alpha_w = 1 - \tilde{A}_2 \frac{h}{R} - 0.6A_1 \frac{E_2}{G_{13}} \frac{h^2}{R^2};$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{k}{\alpha_w} (\tilde{g}^2 \tilde{\Phi}_1 - 2\alpha\beta \tilde{\Phi}_2) - \frac{k}{\alpha_w} \frac{E^*}{R^2} \tilde{\Phi}_1 - \frac{3}{5} \frac{1}{\tilde{E}_1 h} \left(\frac{\tilde{E}_1}{G_{13}} - A_1 \right) \left(1 + \frac{h}{R} \right) \tilde{\Phi}_1; \\
R_2 &= \frac{k}{\alpha_w} (\tilde{g}^2 \tilde{\Phi}_2 + 2\alpha\beta \tilde{\Phi}_1) - \frac{k}{\alpha_w} \frac{E^*}{R^2} \tilde{\Phi}_2 - \frac{3}{5} \frac{1}{\tilde{E}_1 h} \left(\frac{\tilde{E}_1}{G_{13}} - A_1 \right) \left(1 + \frac{h}{R} \right) \tilde{\Phi}_2; \\
R_3 &= g_1^2 \tilde{K}_1 + 2\alpha_1 \beta_1 \tilde{K}_2 - \frac{E^*}{R^2} \tilde{K}_1; \quad R_4 = g_1^2 \tilde{K}_2 - 2\alpha_1 \beta_1 \tilde{K}_1 - \frac{E^*}{R^2} \tilde{K}_2.
\end{aligned}$$

Система рівнянь (5.34), разом із рівнянням (5.30), складають повну систему рівнянь для визначення коефіцієнтів C_i та величини області контакту $2a$.

Для спрощення розрахунків знехтуємо ефектами поперечного зсуву та Пуассона, поклавши у рівняннях (5.21):

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 = A_1 = \nu_{12} = \tilde{q}^2 = 0.$$

У цьому випадку параметри $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$, що входять до розв'язків (5.27) та (5.32)

$$\begin{aligned}
\alpha = \beta &= \frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{h}{R} + \frac{13}{8} \frac{E_2}{\tilde{E}_1} \frac{h^2}{R^2}}{k D_1}}; \quad (5.35) \\
\alpha_1 = \beta_1 &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{2 E_2 h}{R^2 D_1}}; \quad k = \frac{13}{16} \frac{h}{E_3}.
\end{aligned}$$

Система рівнянь (5.30), (5.34) для визначення коефіцієнтів C_i та величини області контакту $2a$ буде мати вигляд:

$$C_1 = -\alpha_c C_2 - \tilde{q}^*(a); \quad C_3 = -tg(\alpha_1 a) C_4 + (\delta - \omega a^2) / \tilde{K}_1;$$

$$\begin{aligned}
(F_2 - \alpha_c F_1)C_2 + (F_3 \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1 a) + F_4)C_4 &= L_F; \\
(\Pi_2 - \alpha_c \Pi_1)C_2 - (\Pi_3 \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1 a) + \Pi_4)C_4 &= 2\omega^* a; \\
(R_2 - \alpha_c R_1)C_2 + (R_3 \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1 a) - R_4)C_4 &= 2\omega^*,
\end{aligned} \tag{5.36}$$

де $\alpha_c = \tilde{\Phi}_2 / \tilde{\Phi}_1$; $\tilde{\Phi}_1 = ch\alpha a \cdot \cos \alpha a$; $\tilde{\Phi}_2 = sh\alpha a \cdot \sin \alpha a$;

$$\tilde{\Phi}_3 = sh\alpha a \cdot \cos \alpha a; \quad \tilde{\Phi}_4 = ch\alpha a \cdot \sin \alpha a;$$

$$\tilde{K}_1 = e^{-\alpha_1 a} \cos(\alpha_1 a); \quad \tilde{K}_2 = e^{-\alpha_1 a} \sin(\alpha_1 a);$$

$$\tilde{q}^*(a) = q^*(a) / \tilde{\Phi}_1(a); \quad \beta_w = 1 + \frac{h}{R} + \frac{13 E_2}{8 E_3} \frac{h^2}{R^2};$$

$$F_1 = \frac{k}{\sqrt{2}} D_1 \tilde{\lambda}^3 (\tilde{\Phi}_3 + \tilde{\Phi}_4); \quad F_2 = \frac{k}{\sqrt{2}} D_1 \tilde{\lambda}^3 (\tilde{\Phi}_4 - \tilde{\Phi}_3);$$

$$F_3 = \frac{D_1}{\sqrt{2}} \lambda_1^3 (\tilde{K}_2 - \tilde{K}_1); \quad F_4 = \frac{D_1}{\sqrt{2}} \lambda_1^3 (\tilde{K}_2 + \tilde{K}_1);$$

$$\Pi_1 = \frac{h}{2E_3} \frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{2}} (\tilde{\Phi}_3 - \tilde{\Phi}_4); \quad \Pi_2 = \frac{h}{2E_3} \frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{2}} (\tilde{\Phi}_3 + \tilde{\Phi}_4);$$

$$\Pi_3 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} (\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2); \quad \Pi_4 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} (\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2); \quad r = -\frac{\beta_w \delta}{2\omega};$$

$$R_1 = -\frac{13}{16} \frac{h}{E_3} \tilde{\lambda}^2 \tilde{\Phi}_2; \quad R_2 = \frac{13}{16} \frac{h}{E_3} \tilde{\lambda}^2 \tilde{\Phi}_1; \quad R_3 = \lambda_1^2 \tilde{K}_2; \quad R_4 = -\lambda_1^2 \tilde{K}_1;$$

$$L_F = \frac{2E_2 h a}{\beta_w R^2} \left[\left(1 + \frac{h}{R}\right) \left(\delta - \frac{1}{3} \omega a^2\right) - \beta_w \left(\delta^* - \frac{1}{3} \omega^* a^2\right) \right].$$

Використавши четверте та п'яте рівняння системи (5.36),

знайдемо вирази для коефіцієнтів C_2, C_4

$$C_2 = \frac{2\omega^*(\chi_2 + a\chi_4)}{\chi_1\chi_4 + \chi_2\chi_3}; \quad C_4 = \frac{2\omega^*(\chi_1 - a\chi_3)}{\chi_1\chi_4 + \chi_2\chi_3}, \tag{5.37}$$

де $\chi_1 = \Pi_2 - \alpha_c \Pi_1$; $\chi_2 = \Pi_3 \operatorname{tg}(\alpha_1 a) + \Pi_4$;

$$\chi_3 = R_2 - \alpha_c R_1; \quad \chi_4 = R_3 \operatorname{tg}(\alpha_1 a) - R_4.$$

Для остаточного розв'язання даної контактної задачі необхідно визначити ще величину області контакту $2a$. Теоретично цю задачу можна розв'язати на основі третього рівняння системи (5.36). Разом з тим, реалізація цієї задачі веде до надзвичайно складного трансцендентного рівняння, що допускає тільки числові розв'язки. Тому для спрощення задачі довелось знехтувати ще й ефектом поперечного обтиснення. У результаті було отримано просту квадратичну залежність між осадкою бандажа δ та величиною зони контакту $2a$

$$\omega h \left[\frac{a}{h} + \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\tilde{E}_1}{E_2} \frac{R^2}{h^2}} \right]^2 = \frac{\delta}{h}. \quad (5.38)$$

Дана залежність є асимптотичною до реальної, яку можна отримати з урахуванням ефектів поперечного зсуву та обтиснення. За характером вона повністю відповідає аналогічній залежності між переміщенням δ , яке отримує параболічний штамп, що втискається у пластину, та розміром області контакту, отриманій на базі рівнянь Кірхгофа-Лява для пластин. Там так само заперечується точковий контакт між параболічним штампом і пластиною, як і у випадку одержаної формули (5.38), що означає збільшення області контакту, тільки починаючи з деякої величини осадки штампа δ . Зрозуміло, що врахування ефектів поперечного зсуву та обтиснення ліквідує цю фізичну невідповідність.

Остаточно розрахункова формула для визначення контактної тиску під бандажем має вигляд

$$q(x) = \frac{2E_2h}{\beta_w R^2} \left[\frac{\Phi_1(x)}{\Phi_1(a)} (\delta - \omega a^2) + \omega x^2 - \delta \right] + C_2 [\Phi_2(x) - th(\alpha a) tg(\alpha a) \Phi_1(x)]. \quad (5.39)$$

Знехтувавши у рівняннях (5.34) параметрами, що враховують ефекти поперечного обтиснення, отримаємо формули, що враховують тільки деформацію поперечного зсуву. Зокрема, формула для контактної тиску під штампом у цьому випадку буде мати вигляд

$$q(x) = 2.5\omega K_x \left[1 + \frac{\lambda^2 (\delta - \omega x^2) - 2\omega s_0 th(a/\sqrt{\varepsilon_x})}{2\omega (1 + s_0 th(a/\sqrt{\varepsilon_x}))} \right] \frac{ch(x/\sqrt{\varepsilon_x})}{ch(a/\sqrt{\varepsilon_x})} + \frac{2E_2h}{R^2} (\delta - \omega x^2), \quad (5.40)$$

$$\text{де } s_0 = \sqrt{\left(1 + \frac{g^2}{\lambda^2}\right) \frac{2}{\varepsilon_x \lambda^2}}; \quad \varepsilon_x = 0.4h^2 \frac{\tilde{E}_1}{G_{13}}; \quad \lambda^2 = \sqrt{\frac{2E_2h}{D_1 R^2}}.$$

Використання формул (5.37)-(5.39) дозволяє знайти розподіл контактної тиску під бандажем. На рис. 5.4 показано графіки розподілу контактної тиску $\bar{q} = q / (\tilde{E}_1 \omega h)$ вздовж зони контакту залежно від величин $\xi = x/h$ та $\theta = a/h$. Криві 1,2,3 побудовані для $\theta = 1; 2; 4$, відповідно.

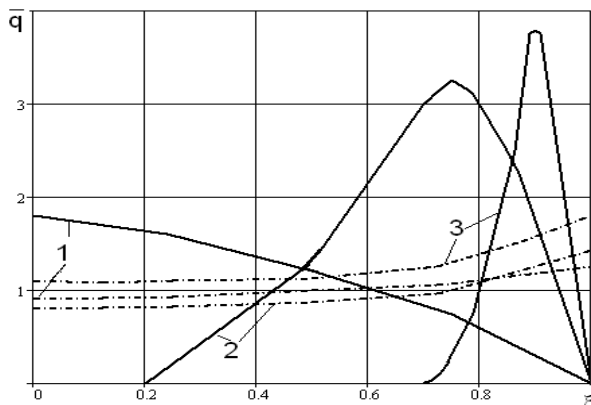


Рис. 5.4. Залежність розподілу контактного тиску під бандажем із параболічною формою основи контакту від величини області контакту

Суцільні криві побудовані за формулою (5.39), а штрих-пунктирні – за формулою (5.40), що відповідає моделі оболонок типу Тимошенка.

Аналіз характеру кривих розподілу тиску під бандажем дозволяє зробити висновок, що зі збільшенням зони контакту пік контактного тиску зміщується у бік границі зони контакту, що узгоджується із фізичним змістом задачі. Разом з тим, характер кривих, побудованих за допомогою рівняння (5.40), що відповідає моделі типу Тимошенка, підтверджує тезу про неможливість використання рівнянь моделей оболонок типу Тимошенка в задачах про контактну взаємодію з жорсткими штампами та бандажами.

Необхідно також зауважити, що для коректного розв'язання аналогічної задачі за допомогою рівнянь Кірхгофа -

Лява необхідно задаватися законом розподілу контактного тиску під бандажем. Інакше цей тиск вироджується у зосереджені зусилля на межі зони контакту.

Подібна контактна задача для короткого ($L/R = 4/3$) ізотропного циліндра, що обтискується жорстким бандажем з параболічною основою, розв'язана В.А. Салом [135] і його колегами методом R -функцій у теорії пружності на основі змішаного варіаційного варіаційного принципу Рейсснера. Четверта ітерація цього методу призводить до закону розподілу контактного тиску під бандажем у вигляді кривої 1 на рис. 5.4 .

5.3. Контактна взаємодія циліндричної оболонки з жорстким кільцевим бандажем

Математична проблема гарячої посадки жорсткого бандажа на циліндричну оболонку розглядалася багатьма авторами як у постановці змішаних крайових задач теорії пружності з циліндричною симетрією [156], так і в постановці оболонок Кірхгофа-Лява [56, 150] та оболонок типу С. Тимошенка [102]. У цих роботах досліджувався характер контактного тиску під бандажем, а також зміна нормальних і дотичних напружень у перерізах оболонки. Разом з тим, порівняння між точними та прикладними дослідженнями виявилися можливими тільки в якісному відношенні. Кількісні порівняння не мали сенсу у зв'язку з досить наближеними

постановками задач, які реалізувались за допомогою рівнянь прикладних теорій оболонок. У процесі розв’язку таких рівнянь виникали фізичні та математичні особливості, які були пов’язані з неможливістю повного задоволення умов неперервності напружень і переміщень на границі контакту.

Різницю між згаданими розв’язками можна зменшити, якщо скористатись системою рівнянь (3.2), (3.16) уточненої теорії оболонок, що враховує поперечний зсув та обтиснення, як це було показано в роботах [24, 99, 171].

Нехай на циліндричну трансверсально-ізотропну оболонку насаджено кільцевий бандаж шириною $2a$ з натягом δ (рис. 5.5).

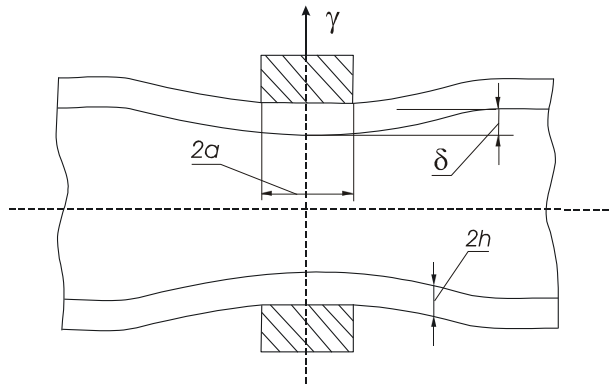


Рис. 5.5. Схема навантаження оболонки

Будемо вважати, що бандаж абсолютно жорсткий, а його контакт з оболонкою здійснюється в умовах вільного ковзання ($\tau_{xy} = 0$) по всій ширині $2a$. Необхідно знайти нормальний

контактний тиск під бандажем, а також напружено-деформований стан в оболонці. Для отримання розв'язку цієї задачі будемо виходити з рівнянь (3.8), коли

$$v = \gamma_y = N_x^0 = 0, \quad q_1(x) = -0,5q(x), \quad q_2(x) = -q(x).$$

За таких умов система рівнянь (5.21) зводиться до одного, яке в області контакту ($|x| \leq a$) набуде вигляду:

$$w^{IV} - 2g^2 w'' + \lambda^4 w = -\frac{1}{D}(q - \varepsilon \cdot q'') \times \quad (5.41)$$

$$\times \left(1 + (1 - \nu'') \frac{h}{R} - \frac{9}{40} \cdot \frac{E}{E'} \cdot \frac{h^2}{R^2}\right) - \left(\frac{\nu}{2RE'} + \frac{3}{5} \cdot \frac{A'}{h\tilde{E}}\right) \cdot q''.$$

Тут $2g^2 = \varepsilon\lambda^4$, $\varepsilon = 0,4h^2\tilde{E}/G'$, $\lambda^4 = 3(1 - \nu^2)h^{-2} \cdot R^{-2}$,

$q(x)$ – невідомий тиск під бандажем.

Поза областю контакту ($|x| > a$) тиск $q(x) \equiv 0$, тому з рівняння (5.41) отримаємо:

$$w^{IV} - 2g^2 w'' + \lambda^4 w = 0. \quad (5.42)$$

Прийmemo, що зовнішня поверхня оболонки $z = h$ в області контакту визначається натягом δ , тобто

$$W(x, h) = -\delta.$$

Враховуючи вираз (2.15) для W , одержимо

$$q(x) = k_1(\delta + w(1 - A'h/R)) + k_2 w'', \quad (5.43)$$

де $k_1 = \frac{16 E'}{13 h}$, $k_2 = \frac{8\nu' E'}{13(1-\nu)} h$ – коефіцієнтами, які можна трактувати коефіцієнтами фіктивної двопараметричної пружної основи.

Залежність (5.43) можна розглядати ще як формулу для визначення переміщення серединної поверхні оболонки, коли відомий тиск під бандажем. Визначивши з (5.43) переміщення w та підставивши його в рівняння (5.41), одержимо розрахункове рівняння для визначення невідомого тиску під бандажем

$$\frac{d^4 q}{d\zeta^4} - 2g_0^2 \cdot \frac{d^2 q}{d\zeta^2} + \lambda_0^4 \cdot q = \delta(R\lambda)^4 / A_0. \quad (5.44)$$

Тут $2g_0^2 = \frac{\varepsilon R^2}{DA_0} (1 - A' \cdot \frac{G'}{\tilde{E}} + (1 - \nu'' - \nu \cdot \frac{5 G'}{3 E'}) \frac{h}{R} + 1,4 \frac{h^2}{R^2} \frac{E}{E'})$;

$$\zeta = \frac{x}{R}; \quad \lambda_0^4 = \frac{R^4}{DA_0} (1 + (1 - \nu'') \frac{h}{R} + 1,4 \frac{h^2}{R^2} \frac{E}{E'}).$$

Порівнюючи рівняння (5.44) для визначення тиску під бандажем з аналогічними рівняннями, одержаними за допомогою теорії типу Тимошенка [98], бачимо, що воно на два порядки вище.

Розв'язок цього рівняння, з урахуванням симетричності задачі, має вигляд (для $g_0^2 > \lambda_0^2$):

$$q(\zeta) = C_1' ch \alpha_1 \zeta \cos \alpha_2 \zeta + C_2' sh \alpha_1 \zeta \cdot \sin \alpha_2 \zeta + q^* \quad (5.45)$$

$$\text{де } \alpha_1 = \sqrt{\frac{g_0^2 + \lambda_0^2}{2}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\lambda_0^2 - g_0^2}{2}}, \quad DA_0 = \frac{13}{24} h^4 \frac{E}{E'},$$

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}, \quad q^* = \frac{2Eh}{R^2} \cdot \delta(1 + (1 - \nu'') \frac{h}{R} + 1,4 \frac{h^2}{R^2} \frac{E}{E'})^{-1}.$$

На відміну від “зсувних” теорій типу Тимошенка, вираз для тиску під бандажем має на один коефіцієнт більше. В результаті це дасть нам можливість надалі збільшити кількість умов спряження при переході через границю області контакту.

Зовні бандажа при $|x| > a$ маємо $q \equiv 0$, і з рівняння (5.42) одержимо (для $g^2 < \lambda^2$)

$$w = C_3 e^{-\beta_1 \zeta} \cos \beta_2 \zeta + C_4 e^{-\beta_1 \zeta} \cdot \sin \beta_2 \zeta, \quad (5.46)$$

$$\text{Тут } \beta_1 = R \sqrt{\frac{g^2 + \lambda^2}{2}}, \quad \beta_2 = R \sqrt{\frac{\lambda^2 - g^2}{2}}, \quad \lambda^2 = \frac{\sqrt{3(1 - \nu^2)}}{Rh}.$$

Для визначення чотирьох коефіцієнтів C_i необхідно задовольнити чотирьом умовам неперервності при переході через межу контакту:

$$w(a-0) = w(a+0); \quad \gamma_x(a-0) = \gamma_x(a+0); \quad (5.47)$$

$$M_x(a-0) = M_x(a+0); \quad Q_x(a-0) = Q_x(a+0).$$

Тобто, даний варіант теорії оболонок, котрий враховує поперечне обтиснення, дозволяє водночас забезпечити неперервність як поперечної сили, так і узагальненого кута

повороту. За допомогою “зсувних” теорій [31,98] таких умов дотриматись неможливо.

Разом з тим, реалізація умов (5.47) призводить до появи складних залежностей, які практично неможливо записати у “замкненому” вигляді. Тому розв’язування такого типу задач необхідно проводити за допомогою ЕОМ.

У випадку, коли $E/E' = 0$, $\nu'' = 0$ задача розв’язується тільки з урахуванням деформації поперечного зсуву. Характерною особливістю цього розв’язку є те, що рівняння (5.44) для тиску під бандажем вироджується у диференціальне рівняння другого порядку [99]:

$$\frac{d^2 q}{dx^2} - \eta^2 \cdot q = D\eta^2 \lambda^4 \delta, \quad (5.48)$$

де $\eta^2 = 1/\varepsilon$.

З урахуванням симетричності задачі, умов (5.47) (без умови неперервності для кутів повороту γ_x), запишемо розв’язок рівняння (5.48), а також вирази для Q_x, M_x і N_φ в області контакту

$$q(x) = \frac{2Eh\delta}{R^2} (1 + C_1 ch\eta x), Q_x = -\frac{2Eh\delta}{\eta R^2} \cdot C_1 \cdot sh\eta x, \quad (5.49)$$

$$M_x = -\frac{2Eh\delta}{\eta^2 R^2} \cdot C_1 \cdot ch\eta x, N_\varphi = \frac{2Eh\delta}{R}.$$

$$\text{Тут } C_1 = \frac{\eta^2}{\lambda^2 ch\eta a (1 + \sqrt{1 + 2\eta^2 / \lambda^2 \cdot th\eta a})}.$$

Якщо ж допустити неперервність кутів повороту γ_x і існування, в зв'язку з цим, на границі області контакту зосереджених сил, то вираз для тиску під бандажем буде дещо іншим [171]:

$$q(x) = \frac{2Eh\delta}{R^2} \left(1 - \frac{\eta^2}{\lambda^2} C'_1 ch\eta x\right), \quad (5.50)$$

де
$$C'_1 = \frac{\eta^2}{(\lambda^2 + \eta^2) ch\eta a + \lambda^2 \cdot \sqrt{1 + 2\eta^2 / \lambda^2 \cdot sh\eta a}}.$$

Іншими, порівняно з (3.33), будуть також і вирази для Q_x і M_x . Тому, у зв'язку з названими недоліками, розв'язки (3.33) і (3.34) не можуть дати достовірної картини розподілу тиску під бандажем. Вони є тільки частковими випадками розв'язку (5.45).

Окремим випадком розв'язку (5.45) буде випадок, коли $E/G' = 0$; $\nu = \nu'' = 0$. Тобто, тоді в рівнянні (5.44) знехтуємо впливом поперечного зсуву і ефектом Пуассона. В результаті, в розв'язку (5.45) параметри

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \frac{R}{h} \sqrt[4]{\frac{6 E'}{13 E} \left(1 + \frac{h}{R} + 1,4 \frac{h^2}{R^2} \frac{E}{E'}\right)}$$

і його вигляд дещо спрощується:

$$q(\zeta) = C'_1 ch\alpha\zeta \cdot \cos \alpha\zeta + C'_2 sh\alpha\zeta \sin \alpha\zeta + q^* \quad (5.51)$$

Враховуючи залежність (3.27), вираз для переміщення w в області контакту бандажа з оболонкою матиме вигляд

$$w = C_1 ch\alpha\zeta \cdot \cos \alpha\zeta + C_2 sha\alpha\zeta \cdot \sin \alpha\zeta - \delta', \quad (5.52)$$

де
$$\delta' = \delta \cdot \left(1 + \frac{h}{R} - \frac{9}{40} \frac{h^2}{R^2} \cdot \frac{E}{E'}\right) \cdot \left(1 + \frac{h}{R} + 1,4 \frac{h^2}{R^2} \cdot \frac{E}{E'}\right)^{-1},$$

$$C_i = A_0 \cdot C'_i, \quad (i=1,2).$$

Вираз (3.30) для w зовні бандажа при таких фізичних характеристиках ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$) набуде вигляду

$$w = C_3 e^{-\beta\zeta} \cdot \cos \beta\zeta + C_4 e^{-\beta\zeta} \cdot \sin \beta\zeta. \quad (5.53)$$

Тут
$$\beta = 0,931 \cdot \sqrt{R/h}.$$

Неврахування ефекту поперечного зсуву значно спрощує вирази для γ_x, M_x і Q_x , які в даному випадку виражаються через похідні від переміщення w таким чином:

$$\gamma_x = -\frac{dw}{dx}, M_x = -D \frac{d^2w}{dx^2}, Q_x = -D \frac{d^3w}{dx^3}. \quad (5.54)$$

Задовольняючи вирази (3.36) - (3.38) умовам неперервності (3.31), одержимо систему чотирьох рівнянь для визначення чотирьох невідомих коефіцієнтів C_i

$$\left[K_{ij} \right] \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4). \quad (5.55)$$

де $K_{11} = Z_1$, $K_{12} = Z_2$, $K_{13} = -\Phi_1$, $K_{14} = -\Phi_2$, $K_{21} = \alpha(Z_3 - Z_4)$,

$$K_{22} = \alpha(Z_3 + Z_4), \quad K_{23} = \beta(\Phi_1 + \Phi_2),$$

$$K_{24} = \beta(\Phi_2 - \Phi_1), \quad K_{31} = -\alpha^2 Z_2, \quad K_{32} = \alpha^2 Z_1, \quad K_{33} = -\beta^2 \Phi_2,$$

$$K_{34} = \beta^2 \Phi_1, \quad K_{41} = -\alpha^3 (Z_3 + Z_4),$$

$$K_{42} = \alpha^3 (Z_3 - Z_4), \quad K_{43} = -\beta^3 (\Phi_1 - \Phi_2), \quad K_{44} = -\beta^3 (\Phi_1 - \Phi_2),$$

$$\alpha_0 = \alpha \cdot a / R, \quad \beta_0 = \beta a / R; \quad Z_1 = ch\alpha_0 \cos \alpha_0,$$

$$Z_2 = sh\alpha_0 \cdot \sin \alpha_0, \quad Z_3 = sh\alpha_0 \cos \alpha_0, \quad Z_4 = sh\alpha_0 \cos \alpha_0,$$

$$Z_4 = ch\alpha_0 \cdot \sin \alpha_0, \quad \Phi_1 = e^{-\beta_0} \cos \beta_0, \quad \Phi_2 = e^{-\beta_0} \sin \beta_0.$$

Вирази для згинального моменту та поперечної сили в області контакту можна записати, користуючись формулами (5.52), (5.53), у вигляді:

$$M_x = 2D \frac{\alpha^2}{R^2} (C_1 sh\alpha\zeta \cdot \sin \alpha\zeta - C_2 ch\alpha\zeta \cos \alpha\zeta); \quad (5.56)$$

$$Q_x = 2D \frac{\alpha^3}{R^3} [(C_1 - C_2) sh\alpha\zeta \cos \alpha\zeta + (C_1 + C_2) ch\alpha\zeta \sin \alpha\zeta].$$

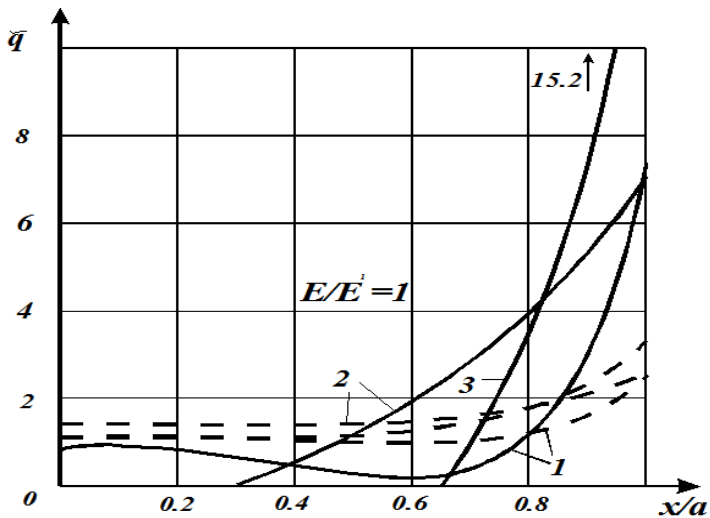


Рис. 5.6. Графік розподілу контактного тиску під бандажем із плоскою основою, що має кутові точки

На рис.5.6, 5.7 показані графіки розподілу безрозмірного контактного тиску під бандажем $\tilde{q} = qR^2 / (2Eh\delta)$ залежно від відношень $E/E' = 1; 10$ для $h/R = 0,2; 0,1; 0,05$; $a/R = 0,2; 0,5$. Криві 1, 2 відповідають товщині $h/R = 0,1$ для $a/R = 0,5$ і $a/R = 0,2$ відповідно. Крива 3 побудована для $h/R = 0,05$, $a/R = 0,2$. Криві 1' і 2' побудовані для трансверсально-ізотропного матеріалу ($E/E' = 10$) для тих самих відношень a/R і h/R , що і криві 1, 2. Штрих-пунктирні криві 1', 2' побудовані для товщини $h/R = 0,2$ при відношеннях $a/R = 0,5; 0,2$.

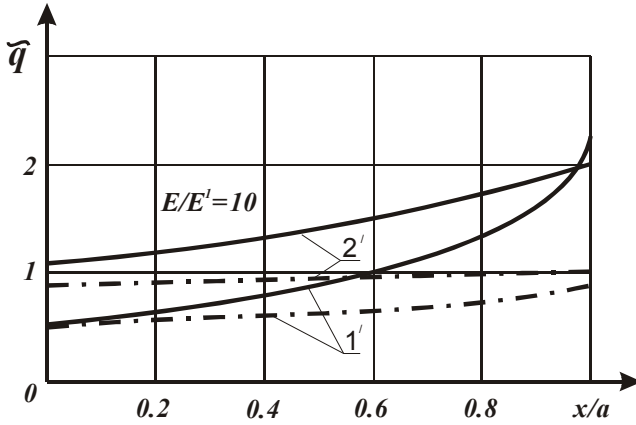


Рис. 5.7. Розподіл контактної тиску в трансверсально-ізоотропній оболонці

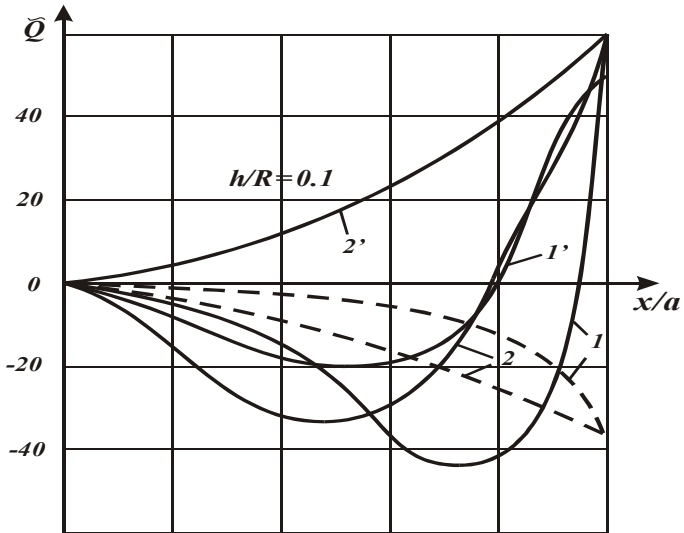


Рис. 5.8. Епюри поперечних сил під бандажем в оболонці

Аналіз графіків розподілу контактної тиску під бандажем, наведених на рис. 5.6, 5.7 показує, що цей розподіл сильно

залежить як від товщини оболонки, так і від величини області контакту, а також – від матеріалу оболонки. Чим тонша оболонка, тим більше цей тиск зміщується до країв бандажа. Разом з тим, ізотропія значно перерозподіляє його по всій ширині бандажа. Штрихові лінії на рис.5.6 показують, що зсувні теорії оболонок значно слабше реагують як на зміну товщини оболонки, так і на величину області контакту.

Згідно цих теорій тиск завжди додатній, тобто виконується гіпотеза про безвідривний контакт бандажа з оболонкою. А за умови неперервності узагальненого кута повороту γ_x на границі контакту виникає протилежна умова – про неможливість безвідривного контакту.

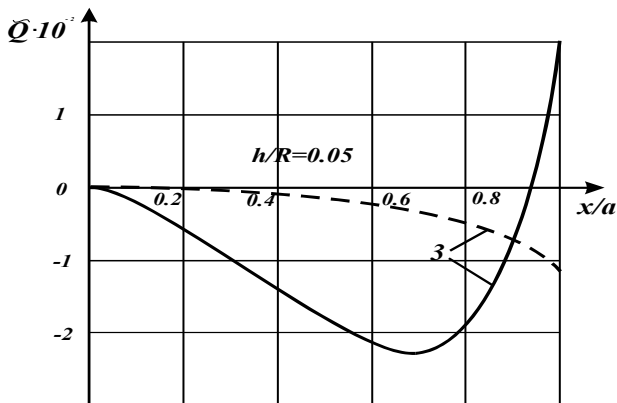


Рис. 5.9. Епюри поперечних сил у тонкій оболонці.

На рис. 5.8 - 5.9 показано зміну безрозмірної поперечної сили $\tilde{Q} = Q / (D\delta)R^{-3}$ при попередніх відношеннях пружних

постійних і товщин. Штрихові лінії відповідають аналогічним величинам, порохованим за формулами “зсувної” теорії типу С. Тимошенка для ізотропного матеріалу.

З аналізу графіків на рис. 5.8 - 5.9 видно, що поперечна сила, яка виникає у поперечних перерізах оболонки, може міняти знак. Цей факт підтверджується точним розв’язком змішаної осесиметричної задачі теорії пружності для нескінченного порожнистого циліндра [153].

Відповідно до цього розв’язку міняють знак не тільки дотичні напруження, а й нормальні σ_x . Разом з тим, теорії типу Тимошенка (штрихові лінії) дають строго від’ємні значення для поперечної сили. Епюри цих сил подібні до епюр контактних дотичних напружень, які можуть виникнути між бандажем і циліндричною оболонкою.

З рис. 5.8 видно, що поперечна анізотропія у деяких випадках (крива 2’) може призвести тільки до додатних значень для поперечної сили Q_x . Але при цьому зауважимо, що закон розподілу дотичних напружень у поперечних перерізах оболонки, а також значення перерізувальної сили будуть значно залежати від умови врахування чи неврахування дотичних напружень на поверхні контакту оболонки з бандажем. У даній задачі ці напруження вважались рівними нулю (вільне ковзання).

Дослідження, наведені у точній постановці задачі теорії пружності [153], показують, що наявність контактних зусиль не впливає на розподіл радіальних напружень, при значному впливі в сторону збільшення на осьові нормальні напруження σ_x .

У випадку дії кільцевих зосереджених зусиль на циліндричну оболонку одержано формули для радіальних переміщень серединної і внутрішньої поверхонь циліндричної оболонки. Досліджено вплив деформацій поперечного зсуву та обтиснення на величину цих переміщень залежно від поперечної анізотропії оболонки.

Показано, що вплив поперечного обтиснення в цьому випадку є незначним, тоді як вплив поперечного зсуву призводить до збільшення переміщень у 2-3 рази при $\frac{h}{R} = \frac{1}{10} \div \frac{1}{20}$ для $E_2 / G_{13} = 20 \div 40$.

Розв'язки задач про контактну взаємодію жорсткого бандажа з оболонкою на основі наведеної моделі, а також на основі методів теорії пружності, доводять, що в задачах такого типу необхідно враховувати ефект поперечного обтиснення. У моделях оболонок і пластин, де враховується поперечне обтиснення, з'являється ще одна залежність, яка виводиться з умови, що тільки зовнішня поверхня оболонки мусить повторювати форму штампа. Аналіз характеру кривих розподілу тиску під бандажем дозволяє зробити висновок, що зі

збільшенням зони контакту під контактного тиску зміщується у бік границі зони контакту, що узгоджується із фізичним змістом задачі.

Врахування лише ефектів поперечного зсуву призводить до фізично некоректних результатів про розподіл контактного тиску під бандажем. Так, згідно таких розв'язків тиск розподіляється майже рівномірно і терпить розрив першого роду на межі контакту для випадку гладкої основи параболічного бандажа.

Для коректного розв'язання аналогічної задачі за допомогою рівнянь Кірхгофа - Лява необхідно задаватися законом розподілу контактного тиску під бандажем. Інакше цей тиск вироджується у зосереджені зусилля на межі зони контакту.

5.4. Контактна задача для кільця, обмеженого жорсткими плитами

У попередніх задачах розділу розглядалися випадки локалізованого навантаження циліндричної оболонки вздовж кутової координати. Разом з тим, циліндричні оболонки у вигляді довгих трубопроводів можуть бути піддані локалізованим навантаженням і вздовж її твірної. Якщо це випадок плоскої деформації, то тоді можна використовувати виведені вище диференціальні рівняння для циліндричних

оболонки. Для випадку плоского напруженого стану необхідно використовувати рівняння для криволінійних стрижнів і кільця.

Контактна задача стиску кругового композитного кільця діаметрально направленими силами, коли його бокові переміщення обмежуються жорсткими плитами, розглядалася у роботі [167]. При цьому, розподілена реакція жорстких плит на кільце замінювалась зосередженими силами. В даній задачі приймається, що контактний тиск змінюється у рамках гіпотези Герца [40], а радіальне переміщення задовольняє умові контакту зовнішньої поверхні кільця з жорсткими плитами.

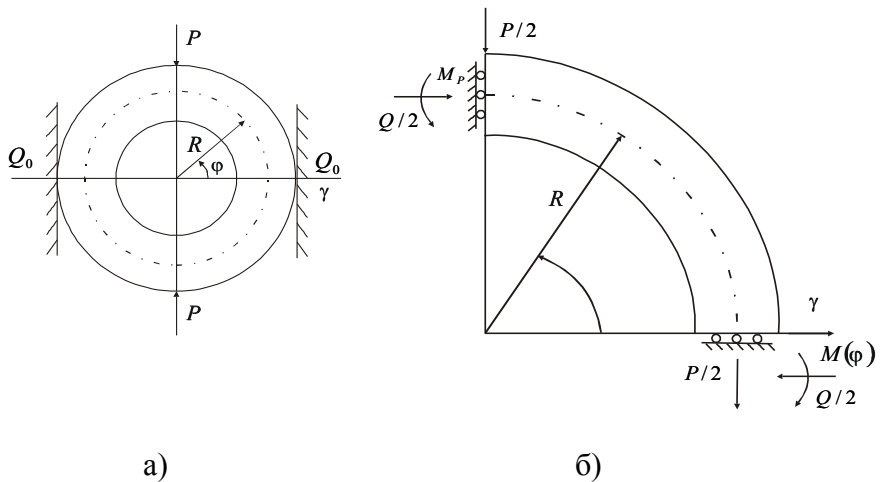


Рис. 5.10. Схема навантаження кільця

Прийmemo, що переміщення кільця у напрямку діаметра, перпендикулярного до лінії дії сил, обмежуються жорсткими плитами (рис. 5.10,а). В області їх взаємодії із кільцем

виникають контактні напруження $\sigma_z = -q^+ = -q(\varphi)$.

Для розв'язання цієї задачі використаємо рівняння рівноваги (4.7) та вирази для зусиль (4.8) у композитних кільцях, які враховують поперечний зсув та обтиснення:

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{d\varphi^2} + w &= -\frac{MR^2}{EI'} + \frac{6}{5} \cdot \frac{R}{G'} \left(\frac{N}{A} + \frac{qR}{A} \right) \cdot \left(1 - 0,7 \frac{h^2}{R^2} \right) - \frac{qR}{2E'} \left(1 - \frac{6}{5} \cdot \frac{E'}{G'} \right); \\ \frac{dv}{d\varphi} + w &= \frac{M + NR}{EA} - \left(\frac{N}{A} + \frac{q}{2} \right) \frac{h^2}{6RG'} - \frac{qh}{12E'} \left(\frac{E'}{G'} - 1,35 \right), \quad (5.57) \end{aligned}$$

де нормальний тиск $q(\varphi)$ не дорівнює нулю тільки на ділянці контакту кільця із жорсткою площиною, коли $|\varphi| \leq \varphi_0$.

Внаслідок симетрії задачі розглянемо тільки один квадрант кільця (рис. 5.10б), який навантажений відповідно системою сил і має на кінцях ($\varphi = 0, \varphi = \pi/2$) граничні умови, які можна записати у вигляді (4.12). Крім того, на ділянці контакту радіальне переміщення кільця повинно задовольняти умові:

$$W(\varphi, h) = \frac{1}{2} R \varphi^2 \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_0. \quad (5.58)$$

Внутрішні силові фактори в цьому квадранті:

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{2} P \cos \varphi - \frac{1}{2} Q_0 \sin \varphi, \\ Q &= -\frac{1}{2} P \sin \varphi + \frac{1}{2} Q_0 \cos \varphi; \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$M(\varphi) = M_P + \frac{1}{2} PR \cos \varphi - \frac{1}{2} Q_0 R (1 - \sin \varphi),$$

тут M_P – невідомий момент в перерізі, де діє прикладена сила; Q_0 – рівнодійна нормального тиску $q(\varphi)$.

При інтегруванні рівняння (5.57) будемо вважати, що область контакту кільця з обмежуючою плитою достатньо мала ($\varphi_0 R / h \leq 1$) і тому дію нормального тиску $q(\varphi)$ можна замінити його рівнодійною, прикладеною уздовж лінії $\varphi = 0$:

$$Q_0 = 2R \int_0^{\varphi_0} q \cdot \cos \varphi d\varphi. \quad (5.60)$$

Рівняння (5.60) пов'язує між собою кут контакту φ_0 і реакцію Q_0 . Якщо при цьому прийняти, що зміна контактного тиску відбувається в рамках гіпотези Герца, то вираз для $q(\varphi)$ може бути записаний у формі

$$q(\varphi) = \frac{2Q_0}{\pi R \sin^2 \varphi_0} \sqrt{\sin^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi}, \quad (5.61)$$

де $R \sin \varphi_0 \cong R\varphi_0$ – величина області контакту.

Враховуючи вище сказане, а також умови (4.12), (5.58), розв'язок системи рівнянь (5.57) матиме вигляд:

$$w(\varphi) = -\frac{M'_P R^2}{EI'} (1 - \cos \varphi) - \frac{a}{2} (P \sin \varphi - Q_0 \cos \varphi) \varphi + \\ + A_1 \sin \varphi + A_2 \cos \varphi; \quad (5.62)$$

$$v(\varphi) = \frac{M'_P R^2}{EI'} (\varphi(1 + \varphi_0) - \sin \varphi) - \frac{a}{2} (P \cos \varphi + Q_0 \sin \varphi) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{a}{2} + b \right) (P \sin \varphi - Q_0 \cos \varphi) + A_1 \cos \varphi - A_2 \sin \varphi + A_3; \\
\frac{M_P}{PR} &= \frac{Q_0}{2P} - \frac{1 + Q_0/P}{\pi(1 + I_0)} \left(1 + \frac{6}{5} \frac{E}{G'} I_0 (1 - 0,42\alpha(z_0) - 0,56 \frac{h^2}{R^2}) \right); \\
\frac{Q_0}{P} &= \frac{8 - 2\pi(1 + I_0) + I_0 \frac{E}{G'} \delta_1(z_0)}{\pi^2(1 + I_0) - 8 + I_0 \frac{E}{G'} \delta_2(z_0)}, \tag{5.63}
\end{aligned}$$

$$\text{де } A_1 = -\frac{1}{2} a Q_0 + \frac{Q_0 R}{4AG'} \alpha(z_0), \quad A_2 = \frac{13 Q_0}{8} \frac{h}{E' \pi R \varphi_0},$$

$$A_3 = (a + b) Q_0 - \frac{Q_0 R}{4AG'} \alpha(z_0), \quad M'_P = M_P - 0,5 Q_0 R,$$

$$a = \frac{R^3}{2EI'} \left(1 + \frac{6}{5} \frac{E}{G'} I_0 \left(1 - 0,7 \frac{h^2}{R^2} \right) \right), \quad b = \frac{h^2}{12ARG'},$$

$$\alpha(z_0) = 3 \left(1 - \frac{z_0^2}{h^2} \right) + 2 \frac{z_0}{R} - \frac{h^2}{R^2}, \quad I_0 = I' / AR^2,$$

$$\delta_1(z_0) = 2,06 + (2,3 + 2\pi I_0) \alpha(z_0) - 2,6 \frac{h^2}{R^2},$$

$$\delta_2(z_0) = 2,24 + 4\alpha(z_0) + \frac{h^2}{R^2} + 26 \frac{G'}{E'} \cdot \frac{h^2}{\varphi_0 R^2} (1 + I_0).$$

Напруження σ_φ і $\tau_{\varphi z}$ у поперечних перерізах кільця будемо визначати за формулами (4.11):

$$\sigma_{\varphi} = \frac{N}{A} + \frac{M}{RA} + \frac{M}{I'} \cdot \frac{Rz}{R+z} - \frac{N}{A} \cdot \frac{E}{2G'} \cdot \frac{z}{R+z} \times$$

$$\times \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{h^2}{3Rz} \left(3 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) - 0,35 \frac{h^2}{R^2} - 0,6 \right); \quad (5.64)$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \left(1 - \frac{z}{3R} \right).$$

Числовий аналіз формул (5.63), (5.64) наведений у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Значення безрозмірної реакції, згинального моменту та напружень у кільці за різних товщин і матеріалів

	Гіпотеза плоских перерізів	Уточнена модель	
		$\frac{E}{G'} = 2,6,$ $\frac{E}{E'} = 1$	$\frac{E}{G'} = 10,$ $\frac{E}{E'} = 5$
$\frac{Q_0}{P}$	$\frac{0,649}{0,891}$	$\frac{0,569(0,660)}{0,888(0,892)}$	$\frac{0,369(0,690)}{0,877(0,893)}$
$\frac{-M_p}{PR}$	$\frac{0,180}{0,154}$	$\frac{0,232(0,257)}{0,162(0,161)}$	$\frac{0,398(0,426)}{0,183(0,186)}$
$\frac{-\sigma(h)}{P/A}$	$\frac{1,637}{4,772}$	$\frac{1,965(2,190)}{4,981(4,943)}$	$\frac{2,732(3,452)}{5,517(5,437)}$
$\frac{\sigma(-h)}{P/A}$	$\frac{1,761}{4,501}$	$\frac{2,298(2,523)}{4,731(4,695)}$	$\frac{4,013(4,592)}{5,327(5,220)}$

Величини, що в дужках, відповідають випадку $E/E' = 0$, коли область контакту вироджується у лінію. При цьому в чисельнику розміщені величини, пораховані для $h/R = 1/3$, а в знаменнику – для $h/R = 0,1$, $z_0 = -h$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi_0 = h/R$.

Для порівняння запишемо результати, що відповідають гіпотезі лінійного розподілу напружень:

$$Q_0 = 0,918P, M_p = -0,152PR; \sigma(\pm h) = \mp 1,368 \frac{P}{A} \text{ при } \frac{h}{R} = \frac{1}{3};$$

$$\sigma(\pm h) = \mp 4,560P/A \text{ при } h/R = 0,1.$$

На рис. 5.11 показано залежність реакції Q_0 (криві 1,2,3) та згинального моменту M_p (криві $1^0, 2^0, 3^0$) від поперечної анізотропії кільця та його товщини.

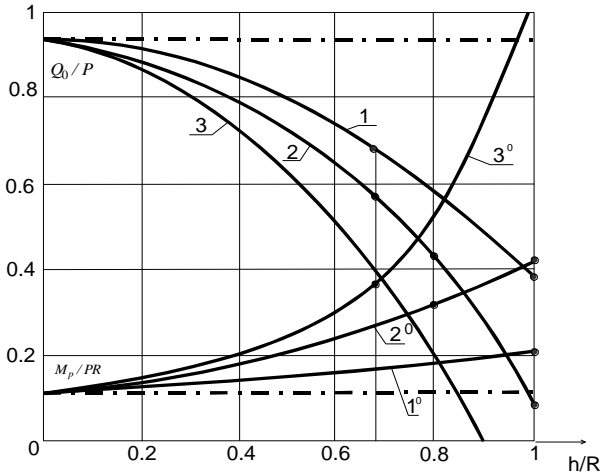


Рис. 5.11. Графіки зміни реакції Q_0 / P згинального моменту M_p / PR в кільця різної товщини

Криві 1, 1^0 побудовані згідно гіпотези плоских перерізів ($E/G' = E/E' = 0$), а криві 2, 2^0 відповідають випадку ізотропного матеріалу ($E/G' = 2,6, E/E' = 1$). Вплив трансверсальної ізотропії матеріалу ($E/G' = 10, E/E' = 5$)

ілюструють криві 3, 3⁰. Шрихпунктирні лінії проведені згідно гіпотези лінійності нормальних напружень: верхня лінія фіксує граничне значення величини Q_0/P , а нижня $-M_P/PR$.

Аналіз числових і графічних даних дозволяє зробити висновок, що вплив товщини кільця і його анізотропії на величини реакції Q_0 , згинального моменту M_P і напруження σ_φ досить значний. Особливо це відчутно при визначенні моментів і нормальних напружень у товстих кільцях ($h/R \geq 1/3$), коли гіпотеза плоских перерізів дає похибки, які можуть перевищувати 200-230%%. Як і в інших задачах, використання гіпотези лінійності нормальних напружень у цій задачі не дозволяє одержати достовірну картину розподілу в кільцях як напруг, так і деформацій.

Аналіз кривих на рис. 5.11 і табличних даних показує, що неврахування впливу поперечного обтиснення в області контакту кільця з жорсткими плитами дає якісно інші результати, особливо для товстих кілець. Це призводить до значного зростання величини реакції Q_0 у той час, коли вона насправді спадає за врахування величини області контакту. Разом з тим, відбувається деяке зменшення величин згинального моменту і напружень для товстих кілець і відповідне їх збільшення – для тонких.

РОЗДІЛ 6

РОЗРАХУНОК НА СТІЙКІСТЬ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК І КРУГОВИХ КОМПОЗИТНИХ КІЛЕЦЬ

Проблема розрахунку на стійкість ортотропних тонких оболонок і стрижнів, що слабо опираються поперечному зсувові, на базі розрахункових рівнянь теорій типу Тимошенка досліджувалася авторами [11,12,17,18,31,98] та багатьма іншими, про що йшлося у попередніх розділах. Ними була визначена величина верхнього критичного тиску для замкнутої кругової циліндричної оболонки середньої товщини у всіх випадках дії стискувальних навантажень. Вплив поперечного обтиснення на величину критичного тиску досліджувався О.М. Гузем, І.Ю. Бабичем та їх учнями на основі тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл [12,51]. Величина похибки прикладних моделей оболонок, пластин і стрижнів, що не враховували поперечного обтиснення, залежала від величини відношення модулів пружності в поздовжньому та поперечному напрямках і значень коефіцієнтів Пуассона у різних напрямках.

У даному розділі для розв'язання задач стійкості циліндричних ортотропних оболонок і композитних кілець застосовуються диференціальні рівняння уточненої моделі [166],

що враховує як деформацію поперечного зсуву, так і деформацію поперечного обтиснення.

6.1. Стійкість ортотропної циліндричної оболонки за осьового стиску

Розглянемо ортотропну циліндричну оболонку довжиною ℓ , яка стискується вздовж твірної зусиллями $N_x = -P$, що рівномірно розподілені на торцях (рис.6.1).

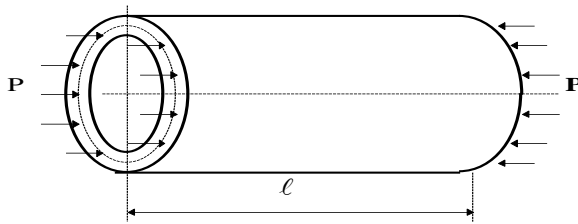


Рис. 6.1. Ортотропна циліндрична оболонка

Будемо вважати, що зігнута поверхня оболонки після випинання є осесиметричною і її деформації залежать тільки від координати x . Тому для розв'язання задачі стійкості скористаємося розрахунковим рівнянням (3.16) осесиметричної задачі для ортотропної циліндричної оболонки

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \lambda^4 \left(1 - \varepsilon_x \frac{d^2}{dx^2} \right) w = - \frac{\lambda_x}{D_x} \left(1 - \varepsilon_x \frac{d^2}{dx^2} \right) q - \frac{3 A_{01}}{5 h \tilde{E}_1} \frac{d^2 q}{dx^2}, \quad (6.1)$$

$$\text{де } \tilde{E}_3 = \frac{40}{9} E_3; \quad \lambda^4 = \frac{2E_2 h}{D_x R^2}; \quad A_{01} = A_1 + \nu_{12} \frac{5\tilde{E}_1 h}{6E_3 R};$$

$$\lambda_x = 1 + \left(1 - \tilde{A}_2\right) \frac{h}{R} - \frac{E_2 h^2}{\tilde{E}_3 R^2}; \quad \varepsilon_x = 4D_x / 5K_x.$$

У цьому випадку лінеаризоване рівняння стійкості можна формально отримати з лінійного рівняння статки (6.1), якщо в останньому розподілене навантаження $q(x)$, формально замінити залежністю $q(x) = P \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}$.

У результаті одержуємо основне рівняння стійкості для ортотропної оболонки

$$\left(D_x - \tilde{\varepsilon}_x \tilde{P}\right) \frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\tilde{P} - \frac{2E_2 \varepsilon_x h}{R^2}\right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{2E_2 h}{R^2} w = 0, \quad (6.2)$$

$$\text{де } \tilde{P} = \lambda_x P, \quad \tilde{\varepsilon}_x = \varepsilon_x - 0,4A_{01} h^2 / \lambda_x,$$

$$A_1 = (\nu_{13} + \nu_{23}\nu_{21}) \tilde{E}_1 / E_3, \quad (1 \rightarrow 2).$$

Як частковий випадок, із рівняння (6.2) можна отримати відповідне розрахункове рівняння теорій типу С. Тимошенка [50], якщо в параметрах λ_x і $\tilde{\varepsilon}_x$ покласти відношення $E_1 / E_3 = 0$.

При інтегруванні цього рівняння будемо вважати, що на краях оболонки $x=0, \ell$ задовольняються умови шарнірного обпирання (3.13), які для даної задачі вироджуються в умови

$$N_x = -P, \quad w = M_x = 0. \quad (6.3)$$

Розв'язок рівняння (6.2) при шарнірному закріпленні країв оболонки (6.3) може бути представлений у вигляді

$$w = \phi \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x, \quad (6.4)$$

що відповідає осесиметричній формі втрати стійкості.

Підставивши (6.4) в (6.2), будемо мати

$$\tilde{P} = \frac{D_x \lambda_m^2 + \tilde{D}_2}{R^2 + \tilde{\varepsilon}_x \lambda_m^2} + \frac{2E_2 h}{\lambda_m^2}, \quad (6.5)$$

де $\tilde{D}_2 = \frac{4}{5} A_{01} E_2 h^3 / \lambda_x$; $\lambda_m = m\pi R / \ell$.

Критичне зусилля визначиться як результат мінімізації виразу (6.5) за λ_m шляхом перебору m від 1 до значення, при якому P досягає мінімуму.

Для прискорення цієї процедури в більшості випадків замінюють дискретний параметр λ_m деяким неперервним аргументом функції $\tilde{P}(\lambda_m)$. Тоді, використовуючи умову мінімуму $d\tilde{P}/d\lambda_m = 0$, одержимо

$$\frac{\tilde{D}_x R^2}{(R^2 + \tilde{\varepsilon}_x \lambda_m^2)^2} - \frac{2E_2 h}{\lambda_m^4} = 0, \quad (6.6)$$

де $\tilde{D}_x = D_x - \tilde{D}_2 \tilde{\varepsilon}_x / R^2$.

Звідки будемо мати

$$\lambda_m^2 = \frac{R\sqrt{t}}{1 - \tilde{\varepsilon}_x \sqrt{t} / R}. \quad (6.7)$$

Тут $t = 2E_2h / \tilde{D}_x$.

Підставивши вираз (6.7) в (6.5), отримаємо формулу для верхньої межі критичного значення стискувальної сили $P_{кр}$ для ортотропної циліндричної оболонки

$$P_{кр} = \frac{E_1}{\sqrt{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}} \cdot \frac{(2h)^2}{\lambda_x R} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \left(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_x \sqrt{t}}{2R} \right) + \frac{\tilde{D}_2}{\lambda_x R^2}, \quad (6.8)$$

де $\tilde{D}_2 = \frac{4}{5} A_{01} E_2 h^3 / \lambda_x$; $\lambda_x = 1 + (1 - \tilde{A}_2) \frac{h}{R} - \frac{E_2}{\tilde{E}_3} \frac{h^2}{R^2}$;

$$\tilde{D}_x = D_x - \tilde{D}_2 \tilde{\varepsilon}_x / R^2.$$

Формули (6.7), (6.8) будуть співпадати з відповідними формулами, одержаними за допомогою теорії оболонок типу С. Тимошенка [98], якщо в останніх покласти параметри

$$\lambda_x = 1, \quad \tilde{D}_2 = E_1 / E_3 = 0, \quad \tilde{D}_x \equiv D_x, \quad \tilde{\varepsilon}_x \equiv \varepsilon_x:$$

$$P_{кр} = \frac{E_1}{\sqrt{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}} \cdot \frac{(2h)^2}{R} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \left(1 - \frac{0.6}{\sqrt{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}} \frac{E_1}{G_{13}} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{h}{R} \right). \quad (6.9)$$

Поклавши в формулах (6.7), (6.8) додатково ще й величину $\varepsilon_x = 0$ (або $E_1 / G_{13} = 0$), одержимо відповідні значення величин λ_m , $P_{кр}$ для тонкостінних ортотропних оболонок Кірхгофа-

Лява:

$$\lambda_m^2 = \frac{R}{h} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \cdot \sqrt{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}; \quad (6.10)$$

$$P_{kp} = \frac{E_1}{\sqrt{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}} \cdot \frac{(2h)^2}{R} \cdot \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}. \quad (6.11)$$

Зауважимо, що у випадку неосесиметричної форми втрати стійкості ортотропної оболонки вираз (6.11) для P_{kp} необхідно домножити на поправочний коефіцієнт [12,28]

$$k_{kp} = \sqrt{\frac{2 \frac{G_{21}}{E_2} (1-\nu_{12}\nu_{21}) + \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \nu_{21}}{\frac{E_1}{2G_{21}} + \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - \nu_{21}}}, \text{ який дорівнює одиниці}$$

для випадку ізотропного матеріалу.

У випадку трансверсально-ізотропного матеріалу формула (6.8) значно спроститься, якщо в деяких параметрах відкинемо величини із множниками h^2 / R^2 і запишемо їх таким чином:

$$\lambda_x = 1 + (1-\nu'')h / R; \quad \tilde{\varepsilon}_x = 0,4(\tilde{E} / G' - A' / \lambda_x)h^2,$$

$$\tilde{D}_2 = 0,8A'Eh^3 / \lambda_x, \quad \tilde{D}_x = D_x.$$

$$P_{kp} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{(2h)^2}{\lambda_x R} \left(1 - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{5(1-\nu)} \left(\frac{E}{G'} - \frac{2\nu''}{\lambda_x} \right) \cdot \frac{h}{R} \right). \quad (6.12)$$

Тоді стискувальна сила P_{kp} для ізотропного матеріалу за формулою (6.12) запишеться у вигляді

$$P_{kp} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{(2h)^2}{\lambda_x R} \left(1 - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{5(1-\nu)} \frac{2h}{R} \left(1 + \nu - \frac{\nu}{\lambda_x} \right) \right). \quad (6.13)$$

Відповідний результат тривимірної лінеаризованої теорії стійкості, розробленої О.М. Гузем та І.Ю. Бабичем [51], буде

$$P_{кр} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{(2h)^2}{R} \left(1 - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{5(1-\nu)} \frac{2h}{R} (1+0,67\nu)\right). \quad (6.14)$$

Тобто, формула (6.13), яка одержана за розробленою моделлю оболонки, практично співпадає з точним розв'язком, отриманим у рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості пружних тіл.

Як приклад ортотропної оболонки розглянемо оболонку зі склопластика [31]: $E_1 = 19,6 ГПа$; $E_2 = 30,5 ГПа$;

$$G_{12} = 4,75 ГПа; \quad G_{13} = G_{23} = 2,06 ГПа; \quad \nu_{12} = 0,14; \quad \nu_{21} = 0,09;$$

$$\nu_{31} = 0,21; \quad \nu_{32} = 0,31; \quad \nu_{13} = \nu_{23} = 0,1; \quad 2h/R = 0,03156; \quad l/R = 2,37.$$

Користуючись формулами (6.7), (6.8), знаходимо інтервал чисел m , за яких критичне напруження $\sigma_{кр} = P_{кр} / 2h$ приймає найменші значення. Дані заносимо в таблицю 6.1.

Аналіз табл. 6.1 показує, що класична теорія дає дещо завищені значення критичного навантаження $\bar{P}_{кр}$. У даному випадку похибка досягає 8%. При відношеннях $E_i / G_{i3} > 20$ ця похибка може зростати до 40-60%. Цей факт підтверджується також висновками авторів [50,51] на основі розрахунків у рамках тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності, а також формулою (6.12).

Таблиця 6.1

Значення критичного навантаження $\bar{P}_{кр}$

m	Модель МЗ (формула (6.8))	Модель типу С. Тимошенка	Класична теорія
8,00	0,438	0,459	0,459
8,76	0,423	0,426	0,448
9,00	0,421	0,427	0,452
9,44	0,419	0,428	0,453
10,0	0,421	0,430	0,463

Так, для $2h/R = 0,05$; $\nu = 0,3$ та $E/G' = 20; 40$ похибки класичної теорії складають відповідно 22,2 і 57%.

6.2. Стійкість трансверсально-ізотропної оболонки від дії зовнішнього тиску

Розглянемо стійкість кругової циліндричної оболонки, що навантажена радіальним тиском p (рис. 6.2), прикладеним до зовнішньої поверхні ($z = h$). Будемо вважати, що оболонка довжиною l , радіусом серединної поверхні R та товщиною $2h$ шарнірно обперта на краях ($x = 0$; $x = l$), відповідно до умов (4.16).

За основні розрахункові рівняння такої задачі візьмемо систему диференціальних рівнянь для трансверсально-ізотропної оболонки (3.17), без рівняння Гельмгольца, відкинувши в них деякі доданки, що кратні множнику h^2 / R^2 .

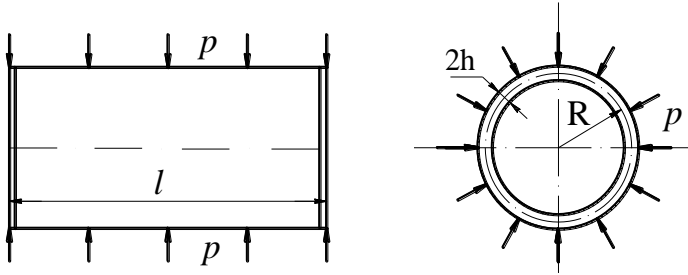


Рис. 6.2. Схема навантаження оболонки

Підставивши у праві частини рівнянь цієї системи замість функцій навантаження q_1, q_2, q_z відповідні значення параметрів $q^+ = q$ та $q^- = 0$, одержимо

$$\Delta^2 F - 2Eh\Delta_k w = 0; \quad K_x \Delta \tilde{w}_r - \Delta_k F = q(1 + h/R); \quad (6.16)$$

$$D\Delta^2 \bar{w} + \frac{D}{R^2} \Delta_0 w + ((1 + 0,4A'h^2\Delta)\Delta_k)F =$$

$$= -q(1 + h/R) - 0,4A'h^2\Delta q - \frac{D}{2\tilde{E}R} \Delta_B q;$$

де $\bar{w} = w + h^2 w_2 - 0,8w_r$; $\tilde{w}_r = w_r - h^2 w_2$;

$$h^2 w_2 = -\frac{3}{8} \frac{hq_2}{E'} + \frac{1}{2} A' \Delta w; \quad D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2}; \quad D_{66} = \frac{2}{3} Gh^3;$$

$$K_x = \frac{4}{3} G'h; \quad A' = \frac{\nu''}{1-\nu}; \quad \tilde{D} = D(1-\nu^2); \quad \Delta_k = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2};$$

$$k_0^2 = \frac{5}{2} \frac{K_x}{(1-\nu_{12})D}; \quad k = \tilde{D}_3 / D; \quad \tilde{D}_3 = 2D_{66} + D_3 = D(2-\nu);$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad \tilde{E} = E / (1-\nu^2); \quad \tilde{B} = 2Eh;$$

$$\Delta_0 = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad \Delta_B = (A' + \nu \frac{\tilde{E}}{E'}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\tilde{E}}{E'} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2};$$

E, E', G, G', ν, ν'' - модулі пружності, зсуву та коефіцієнти Пуассона у поздовжньому та поперечному напрямках, відповідно; $R, l, 2h$ - радіус серединної поверхні, довжина та товщина оболонки.

Застосувавши до другого і третього рівнянь системи (3.15) оператор Δ^2 та виключивши з останнього функції F та \tilde{w}_τ , її можна звести до одного рівняння відносно переміщення w , а інші невідомі виразити через останнє:

$$\begin{aligned} D\Delta^4 w + \frac{D}{R^2} \Delta^2 \Delta_0 w + 2Eh \left[(1 - \varepsilon_1 \Delta) \Delta_k \right] \Delta_k w = \\ = -\Delta^2 (1 - \varepsilon_1 \Delta) (1 + h/R) q - \frac{D}{2\tilde{E}R} \Delta^2 \bar{\Delta}_B q, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\Delta^2 F = 2Eh \Delta_k w; \quad K_x \Delta^3 \tilde{w}_\tau = 2Eh \Delta_k^2 w + \Delta^2 q (1 + h/R);$$

$$\text{де } \bar{\Delta}_B = \left(\nu \frac{\tilde{E}}{E'} - 0.2A' \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\tilde{E}}{E'} - 1.2A' \right) \frac{\partial^2}{R^2 \partial \varphi^2}$$

Основне розрахункове рівняння стійкості циліндричної оболонки одержимо, якщо в праву частину третього рівняння

системи (6.17) введемо «фіктивне» поперечне навантаження

$$q = \frac{p}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} :$$

$$\left[D\Delta^2 + \frac{D}{R^2} \Delta_0 + \frac{p}{R} \left((1 - \varepsilon_1 \Delta)(1 + h/R) + \frac{h^3}{3R} \bar{\Delta}_B \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] w + 2Eh(1 - \varepsilon_1 \Delta) \Delta_k^2 w = 0, \quad (6.18)$$

В отриманому рівнянні доданки з множниками A' та \tilde{E}/E' враховують вплив ефекту Пуассона, що найповніше враховується у побудованій моделі циліндричних оболонок.

Невідомі переміщення w, w_τ , а також функцію напружень F подамо у вигляді: $w = w_0 \sin \lambda_m x \sin n\varphi$;

$$w_\tau = \tau \sin \lambda_m x \sin n\varphi; \quad F = f \sin \lambda_m x \sin n\varphi, \quad (6.19)$$

де $\lambda_m = \frac{\pi m}{l}$; m - число півхвиль уздовж твірної оболонки,

n - число повних хвиль уздовж колової координати.

Підставивши у систему рівнянь (6.17),(6.18) відповідні величини (6.19), одержимо вираз, з якого, при певних значеннях чисел m, n , можна буде знайти величину критичного тиску p

$$p = \frac{DR\tilde{\lambda}^2 - D(k\lambda_m^2 + n^2/R^2)/R}{n^2(1 + \varepsilon_1\tilde{\lambda})(1 + h/R)} + \frac{2Eh\lambda_m^4(1 + \varepsilon_1\tilde{\lambda})}{n^2\tilde{\lambda}^2 R(1 + \varepsilon_1\tilde{\lambda})(1 + h/R)}, \quad (6.20)$$

де $\tilde{\lambda} = \lambda_m^2 + n^2/R^2$; $\tilde{m} = \pi m R / nl$.

Із формули (6.20) легко отримати формулу [18], одержану на основі рівнянь теорії типу Тимошенка, якщо в ній покласти параметри $A', \tilde{E}/E'$, що врахують поперечне обтиснення та ефект Пуассона, рівними нулю.

Перетворимо формулу (3.18), виразивши тиск p через безрозмірний параметр

$$\hat{p} = \frac{p}{E} \left(\frac{R}{2h} \right)^2, \quad (6.21)$$

а також параметри: $d_{mn} = 1 + (m\pi R)^2 / (nl)^2$, $d_k = 1 + k(m\pi R)^2 / (nl)^2$, що дозволить здійснювати якісніший аналіз критичного тиску як для оболонок середньої товщини, так і для довгих оболонок ($l/R \gg 1$). У результаті цього одержимо:

$$\begin{aligned} \hat{p} = & \frac{h}{6R} \frac{n^2}{(1-\nu^2)} \frac{d_{mn}^2 - d_k / n^2}{(1 + \varepsilon_1 n^2 d_{mn} / R^2)(1 + h / R)} + \\ & + \frac{(\pi m)^4}{n^6} \left(\frac{R}{l} \right)^4 \frac{R}{2h} \frac{(1 + \varepsilon_1 n^2 d_{mn} / R^2)}{(1 + \varepsilon_1 n^2 d_{mn} / R^2)(1 + h / R)}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

У роботах [16-18,37] на основі експериментальних та теоретичних досліджень рекомендується при визначенні величини критичного тиску для оболонки з шарнірно закріпленими краями покласти параметр $m=1$, а параметр n шукати шляхом перебору від 1 до ∞ або шляхом мінімізації

функції (3.20) за n^2 . Разом з тим, для практичних розрахунків на стійкість можна використати умову [17,98]

$$\left(\frac{m\pi R}{nl}\right)^2 \ll 1, \quad (6.23)$$

з якої випливає, що параметри d_{mn} , $d_k \approx 1$. У результаті одержимо формулу

$$\begin{aligned} \hat{p} = & \frac{h}{6R} \frac{n^2 - 1}{(1 - \nu^2)} \frac{1}{(1 + \varepsilon_1 n^2 / R^2)(1 + h/R)} + \\ & + \frac{(m\pi)^4}{n^6} \left(\frac{R}{l}\right)^4 \frac{R}{2h} \frac{1 + \varepsilon_1 n^2 / R^2}{(1 + \varepsilon_1 n^2 / R^2)(1 + h/R)}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Поклавши рівними нулю параметри $\varepsilon_1, A', E/E'$, а також замінивши у другій частині формули у знаменнику величину n^6 на $n^4(n^2 - 1)$, одержимо формулу С.П. Тимошенка [148] для критичного тиску \hat{p} у постановці рівнянь класичної теорії оболонок Кірхгофа – Лява

$$\hat{p}_{кл} = \frac{n^2 - 1}{12(1 - \nu^2)} \frac{2h}{R} + \frac{(m\pi)^4 R^4}{n^4(n^2 - 1)l^4} \frac{R}{2h}. \quad (6.25)$$

Оптимізація формули (6.25) за параметром n^2 при $m = 1$ призводить до відомої формули Саутсвелла - Папковича [17,148]

$$\hat{p}_{кл} = \frac{0,856}{(1 - \nu^2)^{0.75}} \frac{R}{l} \sqrt{\frac{2h}{R}}. \quad (6.26)$$

Для дуже довгої оболонки друга частина формули (6.25) буде нескінченно малою і вираз для критичного тиску зведеться

до вигляду:
$$p_{кр} = \frac{n^2 - 1}{R^3} D.$$

Поклавши в (6.25) $n=2$, отримаємо формулу, яку в літературі називають формулою Ф. Грасгофа - Ж. Бресса

[95,148]:
$$p_{кр} = \frac{3D}{R^3}.$$
 Зміна критичного тиску $\tilde{p} = 10^3 p / E$

залежно від відносної довжини оболонки L/R ($1 \leq L/R \leq 5$)

зображена на рис. 6.3.

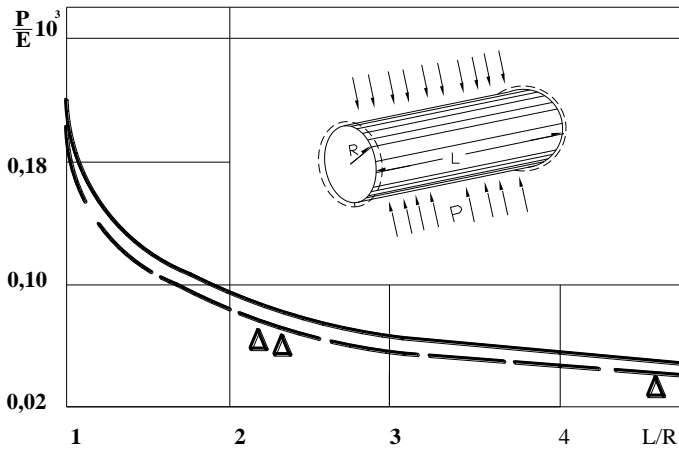


Рис. 6.3. Зміна критичного радіального тиску залежно від довжини оболонки

Суцільною кривою тут позначені результати для склопластикової циліндричної оболонки ($2h/R = 0.0314$) з

такими механічними параметрами: $E/E' = 5$; $E/G' = 10$;
 $\nu = 0,3$; $\nu'' = 0,35$.

Штрих-пунктирна крива побудована авторами [51] на основі рівнянь тривимірної лінеаризованої теорії для ортотропної оболонки, коли відношення модулів пружності $E_2/E_1 = 1.27$, а інші характеристики такі ж, як у попередній оболонці. Експериментальні точки на малюнку запозичені з роботи [54]. Аналіз наведених кривих свідчить, що вони майже співпадають, тобто формули для критичного тиску побудованої моделі оболонок є досить точними.

Результати розрахунків для відносного критичного тиску

$$\hat{p}_{кр} = \frac{P_{кр}}{E} \left(\frac{R}{2h} \right)^2, \quad \text{коли параметри оболонки:}$$

$\frac{h}{R} = \frac{1}{10}; \frac{1}{20}$, $\frac{L}{R} = 10$; $\frac{E}{G'} = 2, 6; 10; 20$, $\nu = 0,3$ та $\frac{E}{E'} = 1; 10$ (при $m = 1$ та $n = 2$) наведені в таблиці 6.2.

Дані в дужках відповідають параметру $E/E' = 10$. Результати, одержані на базі рівнянь класичної теорії Кірхгофа-Лява (3.24), наведені в останньому рядку таблиці.

Аналіз даних таблиці показує, що критичний тиск майже не залежить від відношення E/E' (при $h/R \leq 1/20$). Разом з тим, величина критичного тиску значно залежить від характеристики поперечного зсуву оболонки – величини відношення E/G' .

Таблиця 6.2

Значення відносного критичного тиску $\hat{p}_{кр}$

$\frac{E}{G'}$	$\frac{h}{R} = \frac{1}{10}$	$\frac{h}{R} = \frac{1}{20}$
2,6	0,0396 (0,0401)	0,0220 (0,0220)
10	0,0342 (0,0346)	0,0212 (0,0212)
20	0,0297 (0,0301)	0,0204 (0,0204)
40	0,0236(0,0238)	0,0189(0,0189)
$\bar{p}_{кр}^{кл}$	0,0550	0,0276

Так, для $h/R=0,1$ критичний тиск для транслопної оболонки ($E/G' = 40$) знижується порівняно з ізотропною на 40%. Класична теорія тонких оболонок дає завищені результати для $\hat{p}_{кр}$ для всіх товщин, а її похибка у цьому випадку становить 57%.

6.3. Розрахунок на стійкість композитних кілець

Так само, як і в циліндричній оболонці, при переході радіального навантаження $q^+ = q$ за його критичне значення, кільце деформується і також втрачає свою кругову форму. Для вирішення задачі стійкості кругової форми кільця будемо виходити з диференціальних рівнянь для переміщень $w(\varphi)$, $v(\varphi)$ його пружної лінії, які одержуємо із залежностей (4.8), (4.9):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{w}}{d\varphi^2} + w &= -\frac{MR^2}{E_2 I'} + \left[q_1(1-\nu') - \frac{\nu' N}{2h} \right] \frac{R}{E_3} + \frac{2\nu'' q_2 h^2}{5E_2 I'} R^2; \\ \frac{dv}{d\varphi} + w &= \frac{M + NR}{2E_2 h} - \frac{h}{40} \frac{q_2}{E_3} - \frac{\nu'' q_1}{E_2} R. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Тут $q_z = -q(1+h/R)$. Між поздовжньою силою $N(\varphi)$ та згинальним моментом $M(\varphi)$ існує залежність, яка впливає з рівнянь рівноваги для композитного кільця (4.9):

$$N(\varphi) = \frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 M}{d\varphi^2} + q_z R. \quad (6.28)$$

Для знаходження критичного навантаження $p_{кр}$, у результаті дії якого кільце втрачає свою початкову кругову форму, у диференціальному рівнянні (6.27), із врахуванням залежності (6.28), зробимо формальні заміни, що використовувалися С.Тимошенком [148] та В.Болотінім [25]:

$$M(\varphi) = pRw(\varphi), \quad q^+ = -\frac{p}{R} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right). \quad (6.29)$$

Підставивши їх у (6.27), отримаємо диференціальне рівняння для радіальних переміщень w середньої лінії кільця

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + a^2 w = 0, \quad (6.30)$$

$$\text{де } a^2 = \frac{1 + \alpha_1 p R^3 / (E_2 I')}{1 - 0.6 \alpha_2 p R / (h G')} ; \alpha_1 = 1 - \frac{E_2 I'}{2 E_3 R^3} (1 - 2\nu') ;$$

$$\alpha_2 = 1 - \frac{2 \nu' G'}{3 E_3} + \frac{5 h G'}{6 R E_3} (1 - 2\nu').$$

Розв'язком рівняння (6.30) буде залежність

$$w(\varphi) = C_1 \sin a\varphi + C_2 \cos a\varphi, \quad (6.31)$$

де коефіцієнти C_1 та C_2 залишаються довільними, але нескінченно малими.

У зв'язку із замкненістю кільця граничні умови замінюються умовою, що функція $w(\varphi)$ має бути періодичною функцією від φ з періодом $2\pi n$, де $n=1,2,3,\dots$. Тобто, $w(\varphi + 2\pi) = w(\varphi)$, або $a = n$.

Рівняння (6.31) буде задовольнятися тоді, коли виконуватиметься рівність

$$p = (n^2 - 1) \frac{E_2 I'}{R^3} \cdot k. \quad (6.32)$$

де k – коефіцієнт, що враховує вплив деформацій поперечного зсуву та обтиснення:

$$k = (\alpha_1 + 0.4\alpha_2 n^2 h^2 E_2 / (R^2 \cdot G'))^{-1}. \quad (6.33)$$

Поклавши у формулі (6.33) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $I' = I$, одержимо відомий результат Ю.М.Тарнопольского та А.В.Розе [146].

Покладаючи тепер $n = 2$, одержимо вираз для критичного навантаження, який можна записати у формі

$$P_{кр} = P_{кр}^{кл} \cdot k, \quad (6.34)$$

де $p_{кр}^{кл} = \frac{3E_2 I}{R^3}$ - критичний тиск, отриманий Морісом Леві

[148] за формулами класичної теорії кривих стрижнів без урахування деформацій поперечного зсуву та обтиснення.

Викривлена форма кільця, що відповідає критичному навантаженню (6.44), описується рівнянням

$$w = C_1 \cos 2\varphi + C_2 \sin 2\varphi. \quad (6.35)$$

Із рівняння (6.35) видно, що при втраті стійкості кільце приймає овальну форму. Аналіз формул (6.34), (6.35) призводить до висновку, що поперечний зсув та обтиснення значно понижують величину критичного тиску для композитного кільця. Так, для ізотропного кільця, коли відношення $E_2 / E_3 = 1$; $E_2 / G' = 2.6$; $\nu = 0.3$; $h / R = 0.1$, коефіцієнт $k = 0.96$, а для композитного кільця з відношеннями модулів $E_2 / E_3 = 10$; $E_2 / G' = 20$; $\nu'' = 0.3$; $\nu' = 0.03$ коефіцієнт $k = 0.75$. Тобто, у цьому випадку критичне навантаження знизилося на 25%.

6.4. Стійкість шарнірно обпертої кругової арки

Для розв'язування задачі стійкості шарнірно обпертої кругової арки скористаємося диференціальними рівняннями (6.27)-(6.31) для кругового кільця. Вважаючи, що арка навантажена рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 6.4), будемо розглядати випадок, коли крива прогинів середньої лінії

здеформованої арки є несиметричною відносно осі $\varphi = 0$. П.Ф. Папковичем [95] показано, що при таких навантаженнях арка втрачає стійкість скоріше, ніж за симетричних (відносно цієї осі) деформацій.

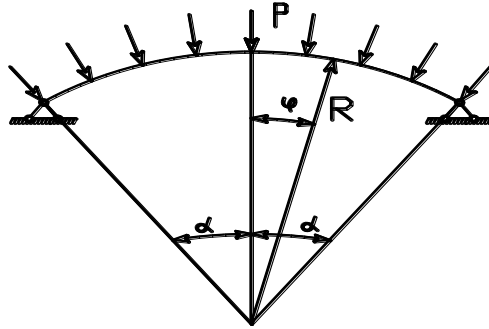


Рис.6.4. Схема навантаження арки

Будемо вважати, що на краях арки $\varphi = \pm\alpha$ виконуються умови шарнірного обпирання, які мають вигляд

$$w = v = M = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \pm\alpha. \quad (6.36)$$

Для задоволення цих умов у розв'язку (6.35) необхідно покласти

$$C_2 = 0; \quad C_1 \sin a\alpha = 0 \quad \text{або} \quad \sin a\alpha = 0. \quad (6.37)$$

Умови (6.37) будуть виконуватися, якщо покласти $a\alpha = n\pi$, де $n = 1, 2, 3, \dots$ - цілі числа. Найменшим із них є число $n = 1$. Йому буде відповідати параметр $a = \pi / \alpha$. Тоді, виходячи з формули (6.30) для a^2 , вираз для критичного тиску буде мати вигляд

$$P_{кр} = \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{E_2 I'}{R^3} \cdot k. \quad (6.38)$$

Тут $k = (\alpha_1 + 0.4\alpha_2 n^2 h^2 E_2 / (R^2 \cdot G'))^{-1}$.

Поклавши у формулі (6.38) параметр $k = 1$, одержимо результат, який був отриманий раніше Е. Гурльбрінком [178] без урахування деформацій поперечного зсуву та обтиснення. При малих α , для дуже положистих арок, відношення $\pi^2 / \alpha^2 \gg 1$, тому в дужках формули (6.38) одиницею можна знехтувати, а саму формулу записати у вигляді

$$P_{кр} = p_{кр} R = \frac{\pi^2 EI}{(\alpha R)^2}. \quad (6.39)$$

Критична сила, визначена за формулою (6.39), співпадає з величиною критичного навантаження для прямого вільно обпертого стрижня довжиною $l = \alpha R$, яка дорівнює половині повної довжини арки. Останнє пояснюється тим, що за антисиметричної деформації арка згинається так, ніби посередині її прольоту знаходиться шарнір.

Для кута $\alpha = \pi/2$ маємо формулу (6.34) для кругового кільця, що є природним, бо деформація останнього за умови втрати стійкості має вузлові діаметри. Вплив деформацій поперечного зсуву та обтиснення такий самий, як і для кільця.

Таким чином, для випадку дії бокового навантаження одержано формули для критичного тиску, які у певних часткових випадках можуть співпадати із відповідними

результатами, одержаними С.П. Тимошенко, а також відомою формулою Саутсвелла-Папковича. Досліджено, що критичний тиск для трансропної оболонки ($E/G' = 20$) знижується порівняно з ізотропною на 22%. Вплив поперечного обтиснення ($E/E' \neq 0$) на величину критичного тиску є незначним у порівнянні з впливом поперечного зсуву ($E/G' \neq 0$). Показано, що класична теорія тонких оболонок дає значно завищені результати для критичного тиску для всього діапазону товщини.

З одержаних формул, як часткові випадки, легко одержуються формули Ю.М. Тарнопольського та А.В. Розе, що враховують деформацію поперечного зсуву, а також формули Моріса Леві та Гульбрінка, що одержані на базі рівнянь класичної теорії криволінійних стрижнів. Показано, що врахування впливу поперечного зсуву та обтиснення значно понижують величину критичного тиску для композитного кільця. Разом із тим, поперечне обтиснення впливає на величину критичної сили у напрямку, протилежному до дії ефекту поперечного зсуву.

РОЗДІЛ 7

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ РІВНЯНЬ ПРИКЛАДНИХ ТЕОРІЙ ТА МЕТОДУ НЕОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Розрахунок тонких оболонок за локальних і температурних навантажень із використанням прикладних теорій Кірхгофа-Лява та типу Тимошенка, що враховують деформації поперечного зсуву, призводить до значних похибок. Разом з тим, при безпосередньому інтегруванні рівнянь теорії пружності отримати замкнуті розв'язки також практично неможливо. Чисельна реалізація останніх потребує значних витрат часу на ПЕОМ і ускладнюється при зменшенні параметра $\varepsilon = h/R$ ($2h$, R – товщина та середній радіус оболонки). Для випадку нерівномірно нагрітих і навантажених пластин В.М. Максимовичем [74], шляхом синтезу методів А.І.Лур'є [73] та М.Є. Ващенко-Захарченка [33], проведено покращення збіжності рядів і побудовано на цій основі співвідношення, що уточнюють прикладні рівняння тонких пластинок. Нехтуючи величинами порядку ε^2 порівняно з одиницею, у роботі [76] отримано загальний розв'язок осесиметричної задачі теорії пружності для циліндричної оболонки та ізотропного шару методом неоднорідних розв'язків. Розв'язки знайдено з використанням формул розвинення М.Є. Ващенко-Захарченка [33] до символічного

розв'язку А.І. Лур'є [73], які записуються у вигляді суми трьох складових: перші – близькі за видом до рівнянь теорії оболонок Кірхгофа-Лява; другі – розв'язки теорії пружності для шару (“виродженого” порожнистого циліндра при $R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$); треті – корегуючі розв'язки, що мають простий вигляд. Запропонований метод дозволяє отримати прості рівняння та співвідношення для визначення напружень і переміщень у поперечних перерізах циліндричної оболонки та ізотропного шару [76]. Близькими до результатів запропонованого методу є розв'язки, одержані за допомогою уточнених рівнянь побудованих моделей оболонок та пластин середньої товщини. Подальші дослідження дозволяють також проводити для циліндричної оболонки та ізотропного шару розрахунок напружень в області дії як розподіленого, так і локально прикладеного навантажень і порівняти їх із результатами уточнених моделей оболонок та пластин середньої товщини.

7.1. Рівняння осесиметричної задачі теорії пружності для нескінченного порожнистого циліндра (оболонки)

Розглянемо осесиметричну задачу теорії пружності для нескінченного порожнистого циліндра $R-h < r < R+h$ при заданих на границі напруженнях

$$\sigma_r /_{r=R\pm h} = q \pm p; \tau_{rz} /_{r=R\pm h} = 0, \quad (7.1)$$

де $q = \frac{q^+ + q^-}{2}$, $p = \frac{q^+ - q^-}{2}$, q^\pm – відомі функції нормально прикладених до границь зусиль.

Будемо виходити з рівнянь теорії пружності в переміщеннях [73]:

$$\Delta W + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} = 0, \quad \Delta U + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0, \quad (7.2)$$

$$\text{де } \Theta = \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{h}{r} W, \quad \rho = \frac{r-R}{h}, \quad \xi = \frac{x}{h}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{h}{r} \frac{\partial}{\partial \rho},$$

U, W – переміщення циліндра в напрямку осей x і r ;

ν – коефіцієнт Пуассона.

Напруження на площинках із нормаллями r, θ знаходяться за формулами узагальненого закону Гука:

$$\begin{aligned} h\sigma_r &= \lambda\Theta + 2G \frac{\partial W}{\partial \rho}, & h\sigma_\theta &= \lambda\Theta + \frac{2G\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} W, \\ h\tau_{rx} &= G \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial W}{\partial \xi} \right), \end{aligned} \quad (7.3)$$

де $\lambda = 2\nu G / (1-2\nu)$ – стала Ляме; G – модуль зсуву.

Розв'язки системи рівнянь (7.2) будемо шукати у символічному вигляді А.І. Лур'є [73]. Для цього введемо позначення для похідної $\frac{\partial}{\partial \xi} = d$ і запишемо утворену при цьому систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$U'' + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} U' + \nu^* d^2 U = \frac{d \cdot d_0^2}{2(1-\nu)} \cdot \tilde{w};$$

$$W'' + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\rho} W' + \frac{d^2}{1 + \nu_0} W = -\frac{d}{2(1 - \nu)} \cdot U', \quad (7.4)$$

де $(U)'$ – оператор диференціювання за змінною ρ ;

$$\tilde{w} = \int_0^{\rho} W d\rho + C; \quad d_0^2 = d^2 + \varepsilon^2(1 + \nu_0); \quad \nu_0 = \frac{1}{1 - 2\nu};$$

$$\nu^* = (3 - 2\nu) / (2 - 2\nu).$$

Відповідна система рівнянь уточненої моделі трансверсально-ізотропних оболонок середньої товщини має вигляд (4.1):

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - 2g_0^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda^4 w = \frac{\tilde{q}}{D_1}; \quad (7.5)$$

$$K_1 \frac{d^2 \tilde{w}_\tau}{dx^2} = 2 \frac{E_2 h}{R^2} w - \tilde{q}; \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\nu_{12}}{R} \frac{dw}{dx} = 0,$$

$$\text{де } D_1 = \frac{2}{3} \tilde{E}_1 h^3; \quad \tilde{E}_1 = E_1 / (1 - \nu^2); \quad \lambda^4 = \frac{2Eh}{DR^2} \equiv \frac{3(1 - \nu^2)}{h^2 R^2};$$

$$2g_0^2 = \frac{6}{5} \frac{E_2}{G'} R^2 = \varepsilon \lambda^4; \quad q = q \left[1 - (1 - A') \frac{h}{R} - \frac{9}{40} \frac{h^2}{R^2} \frac{E_2}{E_3} \right]; \quad K_1 = \frac{4}{3} G' h;$$

$\varepsilon_x = 0, 4h^2 \tilde{E}_1 / G'$; u, w, R – переміщення та радіус серединної поверхні оболонки, E_i, ν_{ij} – модулі пружності та коефіцієнти Пуассона у напрямках x, θ, r ; G' – модуль поперечного зсуву; w_τ – складова переміщення w , що відповідає деформації поперечного зсуву.

Основним недоліком системи рівнянь (7.5), порівняно із системою (7.4), є те, що вона описує тільки характер зміни

переміщень уздовж осі x , а характер зміни переміщень у поперечному напрямку (вісь r) задається наперед тією чи іншою моделлю оболонок. Тому, чим точніше модель описує розподіл напружень і переміщень за товщиною оболонки, тим ближчими будуть розв'язки цих систем рівнянь. У даному випадку будемо користуватися розробленою вище моделлю для циліндричних оболонок, що враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення.

Для спрощення розв'язків поставленої задачі розділимо її (за видом навантаження) на дві: кососиметричну та симетричну.

7.2. Розв'язок системи рівнянь теорії пружності для випадку кососиметричного навантаження

Розглянемо спочатку випадок $q=0$ (кососиметричне навантаження). Тоді розв'язок системи рівнянь (7.4) можна записати у символічному вигляді [76]:

$$W = \frac{f(\rho, d)}{g(\varepsilon, d)} p; \quad U = \frac{u(\rho, d)}{g(\varepsilon, d)} p; \quad \sigma_i = \frac{S_i(\rho, d)}{g(\varepsilon, d)} p, \quad (7.6)$$

де u, f, g, S_i – цілі функції відносно змінної d та d^2 (дані функції мають складний вигляд, тому виписувати їх у роботі не будемо). Зазначимо лише, що $S_i(\rho, 0) \neq 0$, $g(\varepsilon, 0) \equiv g(0) \neq 0$.

До розв'язків (7.6) застосуємо формулу розвинення М.Є. Ващенко-Захарченка [33], яку, помноживши чисельник і знаменник на d^2 , можна записати у вигляді:

$$\sigma_i = d^2 \left\{ 2 \sum_m \frac{S_i(\rho, \alpha_m)}{\alpha_m g'(\alpha_m)} p_m + \frac{S_i(\rho, 0)}{g(0)} p_0 \right\}, \quad (7.7)$$

де α_m – корені рівняння $g(\alpha) = 0$, що задовольняють умову $\operatorname{Re} \alpha_m \geq 0$, p_m – розв’язки рівнянь $(d^2 - \alpha_m^2) p_m = p$ при $m \neq 0$ і $d^4 p_0 = p$. Відзначимо, що функції p_m для нескінченних оболонки визначаються з умови на нескінченності: $p \rightarrow 0$ для $(m \neq 0)$.

7.2.1. Випадок ізотропного шару. Розглянемо допоміжну задачу теорії пружності для шару, як виродженого циліндра, де $R \rightarrow \infty$; $U_y \equiv U_\theta = 0$, а $-h < z < h$. На лицевих поверхнях шару задані напруження:

$$\sigma_{z/z=\pm h} = \pm p(x); \quad \tau_{zx/z=\pm h} = 0.$$

Введемо тут також безрозмірну систему координат $\zeta = \frac{z}{h}$ і $\xi = \frac{x}{h}$. Тоді переміщення та нормальні напруження для шару у

символічному вигляді можна записати так [76]:

$$U = \frac{u_0(\zeta, d)}{g_0(d)} p; \quad W = \frac{f_0(\zeta, d)}{g_0(d)} p; \quad \sigma_i = \frac{S_i^0(\zeta, d)}{g_0(d)} p, \quad (7.8)$$

Тут $g_0(d) = 1 - \sin 2d / 2d$, а вирази для функцій u_0, f_0, S_i^0 наведені в [73]. Отримані із застосуванням формул М.Є. Ващенко-Захарченка залежності (7.8) зводяться до вигляду [74,76]:

$$U = -\frac{hd}{2G}(P_1 + \omega_1); \quad W = \frac{h}{2G}(P_2 + \omega_2); \quad (7.9)$$

$$\sigma_x = d^2(2\nu P_0 - P_1) + \Omega_1; \quad \sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z); \quad \sigma_z = d^2 P_3 + \Omega_3,$$

$$\text{де } P_j = \sum_i \frac{\varphi_j(\beta_i, \zeta)}{\sin^2 \beta_i} \frac{p}{d^2 - \beta_i^2}, \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad \Omega_j = (a_j d^{-2} + b_j) \cdot p;$$

$$a_1 = -3\zeta; \quad b_1 = \zeta(\zeta^2 - 0,6); \quad a_2 = -3\nu\zeta; \quad b_2 = \nu\zeta(0,5\zeta^2 + 0,9);$$

$$b_3 = 0,5\zeta(3 - \zeta^2); \quad a_3 = 0; \quad d \cdot \varphi_0(d, \zeta) = -\cos d \sin d \zeta;$$

$$\omega_1 = 3(1 - \nu)\zeta p_0 + [(0,5(\nu - 2))\zeta^3 + 0,3(2 + 3\nu)\zeta] p / d^2;$$

$$\omega_2 = 3(1 - \nu) p_0 + [1,5\nu\zeta^2 - 0,3(8 - 3\nu)] p / d^2;$$

$$\varphi_1(d, \zeta) = (1 - 2\nu)\varphi_0(d, \zeta) + \psi(d, \zeta);$$

$$\varphi_2(d, \zeta) = 2(1 - \nu)\cos d \zeta \cdot \cos d + d \zeta \sin d \zeta \cdot \cos d - d \sin d \cdot \cos d \zeta;$$

$$\varphi_3(d, \zeta) = \psi(d, \zeta) + \varphi_0(d, \zeta);$$

$$\psi(d, \zeta) = \zeta \cos d \zeta \cdot \cos d + \sin d \zeta \cdot \sin d; \quad \beta_i - \text{корені рівняння}$$

$$1 - \sin 2\beta / 2\beta = 0, \quad \text{де } \operatorname{Re} \beta_i > 0.$$

Якщо навантаження на оболонку чи шар є повільно змінною функцією за змінною ζ , то $p_i \approx -p / \beta_i^2$. Тоді вирази для P_j можуть бути записані у вигляді:

$$P_0 = P_0^* - \frac{3}{2}\zeta \left(-\frac{157}{4200} + \frac{\zeta^2}{20} + \frac{\zeta^4}{120} \right) p; \quad P_3 = P_3^* + \frac{1}{20}\zeta(1 - \zeta^2)^2 p;$$

$$P_1 = P_1^* + \frac{3}{2}\zeta \left(\frac{22}{21 \cdot 25}(1-\nu) + \frac{7\nu-5}{60} + \zeta^2 \left(-\frac{\nu}{10} + \frac{1}{30} \right) + \zeta^4 \frac{3-\nu}{60} \right) p;$$

$$P_2 = P_2^* + \frac{3}{2} \left(\frac{22}{21 \cdot 25}(1-\nu) + \frac{7\nu-9}{60} + \zeta^2 \left(-\frac{3\nu}{10} + \frac{1}{2} \right) - \zeta^4 \frac{1+\nu}{12} \right) p;$$

$$P_j^* = \sum_i (p_i + p \cdot \beta_i^{-2}) \frac{\varphi_j(\beta_i, \zeta)}{2 \sin^2 \beta_i}.$$

Для дуже повільно змінних функцій можна прийняти $P_j^* \approx 0$. Це дозволяє порівняти отримані рівняння із відповідними рівняннями прикладних теорій. Наприклад, записавши переміщення $W = W^* + W^{**}$, де

$$W^* = \frac{h}{2G} \omega_2, \quad W^{**} = \frac{h}{2G} P_2, \quad \text{отримаємо:}$$

$$d^4 W^* = \frac{h}{2G} (3(1-\nu)p - 0,3((8-3\nu) - 5\nu\zeta^2)d^2 p). \quad (7.10)$$

$$d^4 W^{**} = \frac{3h}{2G} \left(\frac{22}{21 \cdot 25}(1-\nu) + \frac{7\nu-9}{60} + \zeta^2 \left(-\frac{3\nu}{10} + \frac{1}{2} \right) - \zeta^4 \frac{1+\nu}{12} \right) d^4 p.$$

Просумувавши ці рівняння, одержимо диференціальне рівняння прогинів серединної поверхні ($\zeta = 0$) для ізотропного шару за його циліндричного згину :

$$d^4 W = \frac{3h}{2G} (1-\nu) \left(p - \frac{(8-3\nu)}{10(1-\nu)} d^2 p - \frac{(0,72-0,5\nu)}{20(1-\nu)} d^4 p \right). \quad (7.11)$$

Відповідне рівняння уточненої теорії [162], що враховує ефекти поперечного зсуву та обтиснення, за циліндричного

згину серединної поверхні ізотропної пластини для навантаження $q_2 = 2p$, має вигляд:

$$d^4 w = \frac{3h}{2G}(1-\nu) \left(p - \frac{(8-3\nu)}{10(1-\nu)} d^2 p - \frac{(1-0,5\nu)}{20(1-\nu^2)} d^4 p \right). \quad (7.12)$$

Аналіз рівнянь (7.11), (7.12) показує, що, з точністю до третього члена у правих частинах (за умови $P_j^* \approx 0$), рівняння для визначення вертикальних серединних переміщень шару і пластини практично співпадають. Ураховуючи формули (7.9) для знаходження напружень та вирази для поліномів P_i , напруження у шарі можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -3\zeta d^{-2} p + \zeta(\zeta^2 - 0,6)p + \frac{1}{20}\zeta(1,243 - \zeta^2 - 1,5\zeta^4)d^2 p; \\ \sigma_z &= 0,5\zeta(3 - \zeta^2)p + 0,05\zeta(1 - \zeta^2)^2 d^2 p; \quad \sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Значення відповідних напружень на основі рівнянь уточненої теорії [162], що враховують ефекти поперечного зсуву та обтиснення, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\zeta(\tilde{E}d^2 w / h + 3\varepsilon_1 p) + \zeta(\zeta^2 - 0,6)(1 - 0,5(1 + \nu)^{-1}d^2)p; \\ \sigma_z &= 0,5\zeta(3 - \zeta^2) \cdot p. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Тут $\varepsilon_1 = \frac{h^2(8-3\nu)}{10(1-\nu)}$, $\varepsilon_2 = \frac{(1-0,5\nu)}{20(1-\nu^2)}$, $\tilde{E} = \frac{2G}{1-\nu}$,

$$d^2 w = \frac{3h}{2G}(1-\nu)(d^{-2} p - \varepsilon_1 p - \varepsilon_2 d^2 p).$$

Підставивши у вираз для σ_x значення величини $d^2 w$, одержимо

$$\sigma_x = -3\zeta(d^{-2}p - \varepsilon_2 d^2 p) + \zeta \left(\zeta^2 - \frac{3}{5} \right) \left(1 - \frac{0,5}{(1+\nu)} d^2 \right) p. \quad (7.15)$$

Аналіз формул (7.13) - (7.15) для напружень, одержаних методом неоднорідних розв'язків за рівняннями теорії пружності та за допомогою уточнених рівнянь для пластин середньої товщини, показує, що вони повністю співпадають із доданками, які мають множниками вантажні члени $d^{-2} p$ і p , але не співпадають із доданками з множниками $d^2 p$. Ці доданки є величинами вищого порядку малості порівняно з попередніми для гладко змінюваних навантажень, але можуть стати суттєвими для локалізованих навантажень.

На границі шару $\xi = 1$ формули (7.13) для знаходження напружень спрощуються до залежностей:

$$\sigma_x = -3pd^{-2} + 0,4p - 0,063d^2 p; \quad (7.16)$$

$$\sigma_z = p; \quad \sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z).$$

За уточненою теорією [162] вони записуються у вигляді:

$$\sigma_x = -3pd^{-2} + 0,4p - 0,5(1+\nu)^{-1} d^2 p; \quad \sigma_z = p.$$

У формулах (7.9) для $\xi = 1$ вирази P_i дорівнюють:

$$P_0 = P_0^* - 0,0314p, \quad P_1 = P_1^* + 0,0628(1-\nu)p,$$

$$P_2 = P_2^* + 0,463(1-\nu)p.$$

7.2.2. Випадок циліндричної оболонки. Отримані результати можна використати для розрахунку циліндричної оболонки, якщо відповідні функції у формулах (7.6) записати у вигляді [76]:

$$\begin{aligned}
 f(\zeta, d) &= f_0(\zeta, d) + \varepsilon f_1(\zeta, d) + 0(\varepsilon^2); \\
 S_i &= S_i^0(\zeta, d) + \varepsilon S_i'(\zeta, d) + 0(\varepsilon^2); \\
 u(\zeta, d) &= u_0(\zeta, d) + \varepsilon u_1(\zeta, d) + 0(\varepsilon^2); \\
 g(\varepsilon, d) &= g_0(d) + \varepsilon q_1(d) + 0(\varepsilon^2),
 \end{aligned}$$

де перші члени цих розкладів відповідають формулам (7.9) для шару.

Оскільки $\beta_i = 0(1)$, то для коренів α_i можна записати $\alpha_i = \beta_i + \varepsilon \beta_{1i} + 0(\varepsilon^2)$. Разом з тим, з аналізу рівнянь теорії оболонок [76,166] можна показати, що рівняння $g(\alpha) = 0$ має ще корені:

$$\alpha_{1,2}^2 = \pm m\varepsilon + 0(\varepsilon^2), \quad m = i\sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad (7.17)$$

які в першому наближенні однакові для всіх теорій оболонок.

Порівнюючи тепер розв'язки (7.6) і (7.8) і враховуючи формули (7.9) - (7.13), з точністю до $0(\varepsilon^2)$ вирази для напружень σ_x , σ_θ , σ_r у циліндрі можна знайти з формул (7.9) для відповідних напружень σ_x , σ_y , σ_z у пластині, якщо в останніх покласти

$$\Omega_j = A_j \frac{P}{d^2 - m\varepsilon} + \bar{A}_j \frac{P}{d^2 + m\varepsilon} + B_j \cdot p, \quad j=1,2,3, \quad (7.18)$$

де $A_j = A_j(\zeta)$ – комплексні та $B_j = B_j(\zeta)$ – дійсні невідомі функції.

Дані функції визначимо, не виписуючи вирази для функцій f_i, S_i . Для цього використаємо умови:

- а) отриманий розв'язок має співпадати з розв'язком для шару при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- б) при $p = \text{const}$ можна отримати просте рішення для циліндра.

Перший розв'язок (для шару) представлено формулами (7.9), а другий (для циліндра) має вигляд:

$$\sigma_r = p \left[\frac{z}{h} - \frac{3}{2} \left(\left(\frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right) \frac{h}{R} \right]; \quad \sigma_\theta = p \left[\frac{R}{h} - \frac{z}{h} + \frac{3}{2} \left(\left(\frac{z}{h} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) \frac{h}{R} \right] + 0(\varepsilon^2);$$

$$\sigma_x = \nu p \left(\frac{R}{h} + \frac{h}{R} \right) + 0(\varepsilon^2); \quad (\varepsilon_x = 0; \quad \sigma_x = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)). \quad (7.19)$$

Задовольняючи обидві умови для визначення функцій A_j, B_j , отримаємо систему рівнянь:

$$A_j + \bar{A}_j = a_j; \quad B_j = b_j; \quad j=1,2,3; \quad A_1 - \bar{A}_1 - B_1 m\varepsilon = -\nu m(1 + \varepsilon^2);$$

$$A_2 - \bar{A}_2 - B_2 m\varepsilon = -m \left(1 - \varepsilon\zeta + 1,5 \left(\zeta^2 - \frac{1}{3} \right) \varepsilon^2 \right);$$

$$A_3 - \bar{A}_3 - B_3 m\varepsilon = -m \left(1 - \varepsilon\zeta - 1,5(\zeta^2 - 1) \varepsilon^2 \right).$$

Тобто, для циліндричної оболонки у формулах (7.18) маємо:

$$\begin{aligned}\Omega_1^\varepsilon &= \frac{P}{d^4 - m^2 \varepsilon^2} \left[a_1 d^2 + b_1 m^2 \varepsilon^2 - \nu m^2 \varepsilon (1 + \varepsilon^2) \right] + b_1 \cdot p; \\ \Omega_2^\varepsilon &= \frac{P}{d^4 - m^2 \varepsilon^2} a_2 d^2 + m^2 \varepsilon \left[(b_2 + \zeta) \varepsilon - 1 - 1,5 \left(\zeta^2 - \frac{1}{3} \right) \varepsilon^2 \right] \zeta + b_2 \cdot p; \\ \Omega_3^\varepsilon &= \frac{P}{d^4 - m^2 \varepsilon^2} \left[a_3 d^2 + m^2 \varepsilon^2 (b_3 - \zeta + 1,5 (\zeta^2 - 1) \varepsilon) \right] + b_3 \cdot p.\end{aligned}$$

Після цього загальні формули для напружень у циліндричній оболонці можна записати таким чином:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^* + 3\zeta \frac{P}{d^2} + \frac{P}{d^4 + 3(1-\nu^2)\varepsilon^2} \left[a_1 d^2 - 3b_1 (1-\nu^2) \varepsilon (1 + \varepsilon^2) \right]; \\ \sigma_\theta &= \sigma_y^* + 3\nu\zeta \frac{P}{d^2} + \frac{P}{d^4 + 3(1-\nu^2)\varepsilon^2} \times \\ &\times \left[a_2 d^2 - 3(1-\nu^2) \left((b_2 + \zeta) \varepsilon - 1 - 1,5 \left(\zeta^2 - \frac{1}{3} \right) \varepsilon^2 \right) \right]; \\ \sigma_r &= \sigma_z^* - \frac{P}{d^4 + 3(1-\nu^2)\varepsilon_2} \left[1,5(1-\nu^2) \zeta (1-\zeta^2) \varepsilon + 1 + 1,5 \left(\zeta^2 - \frac{1}{3} \right) \varepsilon^2 \right],\end{aligned}\tag{7.20}$$

де σ_x^* , σ_y^* , σ_z^* – відповідні напруження в ізотропному шарі.

7.3. Симетричне навантаження циліндричної оболонки

У випадку, коли напруження на зовнішніх поверхнях оболонки дорівнюють

$$\sigma_{r/r=a} = \sigma_{r/r=b} = q, \quad \text{де } (a = R - h; b = R + h),$$

тобто діють симетрично відносно серединної поверхні оболонки, то напруження в такій оболонці можна подати у вигляді [76]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d^2 (2\nu Q_0 - Q_1) + \psi_1; \quad \sigma_r = d^2 Q_3 + \psi_3; \\ \sigma_\theta &= \nu(\sigma_x + \sigma_r); \end{aligned} \quad (7.21)$$

Тут функції f_j , Q_j , ψ_j мають вигляд [74,76]:

$$f_0(d, \xi) = \frac{\cos d\xi \cdot \sin d}{d}, \quad \chi = \frac{q}{2d^2(1 + \sin 2d / 2d)},$$

$$f_1(d, \xi) = \cos d\xi \cdot \cos d + \xi \sin d\xi \cdot \sin d - (1 - 2\nu) f_0(d, \xi);$$

$$d^2 f_2(d, \xi) = 2(1 - \nu) \cdot \sin d \cdot \sin d\xi + d \cos d \sin d\xi - d\xi \cos d\xi \cdot \sin d;$$

$$f_3(d, \xi) = \cos d\xi \cdot \cos d + \xi \sin d\xi \cdot \sin d + f_0(d, \xi);$$

$$Q_j = \sum_i \frac{f_j(\alpha_i, \rho)}{\cos^2 \alpha_i} \cdot \frac{q}{d^2 - \alpha_i^2}; \quad \psi_j = \frac{C_j}{d^2 - m\varepsilon} q + \frac{\bar{C}_j}{d^2 + m\varepsilon} q + D_j.$$

Невідомі функції C_j, D_j знаходимо описаним вище шляхом, як і функції A_j, B_j .

У даному випадку напруження у пластині (при $\varepsilon = 0$) $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ визначаються за формулами (7.21) для напружень $\sigma_x, \sigma_r, \sigma_\theta$ відповідно при $\psi_1 = 0, \psi_2 = \nu q, \psi_3 = q$.

Наведемо необхідні у подальшому формули для напружень у циліндрі для випадків, коли на граничних поверхнях:

$$a) \quad \sigma_{r/r=a} = \sigma_{r/r=b} = q, \quad \tau_{rz/ra} = \tau_{rz/rb} = 0; \quad (7.22)$$

$$б) \sigma_{r/r=a} = \sigma_{r/r=b} = q_0 \zeta^2, \tau_{rz/r a} = \tau_{rz/r b} = 0.$$

У першому випадку маємо:

$$\sigma_r = q_0; \sigma_\theta = q_0; \sigma_x = 2\nu q_0,$$

а в другому випадку:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{(1+\nu)} \frac{q_0}{\varepsilon} \rho + 0(1); \quad \sigma_\theta = q \zeta^2 - \frac{2}{(1+\nu)} \frac{q_0}{\varepsilon} \rho + 0(1); \\ \sigma_r &= \frac{q_0}{2(1+\nu)} (1 - \rho^2) + q_0 \zeta^2. \end{aligned} \quad (7.23)$$

З умови порівняння формул (7.20), при $\varepsilon \rightarrow 0$, з формулами для пластини та умови справедливості формул (7.21) при $q = const$, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{C_x + \bar{C}_x}{d^2} q + D_x \rightarrow 0; \quad \frac{C_\theta + \bar{C}_\theta}{d^2} q + D_\theta \rightarrow \nu q; \quad \frac{C_r + \bar{C}_r}{d^2} q + D_r \rightarrow q; \\ \frac{C_x - \bar{C}_x}{-m\varepsilon} + D_x \rightarrow 0; \quad \frac{C_\theta - \bar{C}_\theta}{d^2} + D_\theta \rightarrow \nu q; \quad \frac{C_r - \bar{C}_r}{d^2} + D_r \rightarrow q. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Звідси випливає, що функції C_i , D_{xi} потрібно представити у вигляді:

$$\operatorname{Re} C_j = \varepsilon C; \quad D_x = \varepsilon q; \quad D_r = q; \quad D_\theta = \nu q. \quad (7.25)$$

$$\operatorname{Im} C_x = \varepsilon^2 \tilde{C}_x; \quad \operatorname{Im} C_r = \varepsilon^2 \tilde{C}_r; \quad \frac{C_\theta - \bar{C}_\theta}{-m\varepsilon} \cdot q = (1 - \nu) q,$$

де \tilde{C}_x , \tilde{C}_r – нові невідомі дійсні функції.

Використавши умови, що формули (7.21) справедливі при

$\sigma_r|_{r=a,b} = \zeta^2 q_0$, отримаємо умови, де враховані напруження у

пластині від навантаження $q_0 \zeta^2$:

$$\begin{aligned} \frac{C_x}{-m\varepsilon} q_0 \xi^2 - \frac{2C_x}{m^2 \varepsilon^2} q_0 + \frac{\bar{C}_x}{m\varepsilon} q_0 \xi^2 - \frac{2\bar{C}_x}{m^2 \varepsilon^2} q_0 + D_x &= -\frac{2}{1+\nu} \frac{q_0}{\varepsilon} \rho; \\ -\frac{\nu}{3} q + \frac{C_\Theta}{-m\varepsilon} q_0 \xi^2 - \frac{2C_\Theta}{m^2 \varepsilon^2} q_0 + \frac{\bar{C}_\Theta}{m\varepsilon} q_0 \xi^2 - \frac{2\bar{C}_\Theta}{m^2 \varepsilon^2} q_0 + D_\Theta &= q_0 \xi^2 - \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{q_0}{\varepsilon} \rho; \\ \frac{C_r}{-m\varepsilon} q_0 \xi^2 - \frac{2C_r}{m^2 \varepsilon^2} q_0 + \frac{\bar{C}_r}{m\varepsilon} q_0 \xi^2 - \frac{2\bar{C}_r}{m^2 \varepsilon^2} q_0 + D_r &= q_0 \xi^2 + \frac{q_0}{2(1+\nu)} (1-\rho^2). \end{aligned}$$

Прирівнявши зліва та справа коефіцієнти при однакових степенях ξ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{C_x - \bar{C}_x}{m\varepsilon} = 0, \quad -\frac{2(C_x + \bar{C}_x)}{m^2 \varepsilon} = -\frac{2}{1+\nu} \rho, \quad \frac{C_\Theta - \bar{C}_\Theta}{m\varepsilon} = -(1-\nu), \\ -\frac{2(C_\Theta - \bar{C}_\Theta)}{m^2 \varepsilon^2} = -\frac{2\nu}{1+\nu} \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad C_r = 0. \end{aligned}$$

Тоді

$$C_x = \frac{m^2 \varepsilon}{2(1+\nu)} \rho + 0(\varepsilon^2), \quad C_\Theta = \frac{\nu m^2 \varepsilon}{2(1+\nu)} \rho - \frac{1}{2}(1-\nu)m\varepsilon + 0(\varepsilon^2).$$

Величинами D_x можна знехтувати, порівняно з напруженнями в шарі. Отже, матимемо:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{(1+\nu)} \frac{m^2 \varepsilon \cdot d^2}{(d^4 - m^2 \varepsilon^2)} \cdot q_0; \\ \psi_2 &= \frac{(\nu m^2 \varepsilon / 1 + \nu) \rho d^2 - (1-\nu) m^2 \varepsilon^2}{d^4 - m^2 \varepsilon^2} \cdot q_0 + \nu q_0; \quad \psi_3 = q_0. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Звідси

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^* - \frac{3(1-\nu)\varepsilon\rho d^2}{d^4 + 3(1-\nu^2)\varepsilon^2} \cdot q_0; \quad \sigma_r = \sigma_z^*; \\ \sigma_\theta &= \sigma_y^* + \frac{3(1-\nu)\varepsilon[-\nu\rho d^2 + (1-\nu^2)\varepsilon]}{d^4 + 3(1-\nu^2)\varepsilon^2} \cdot q_0.\end{aligned}\tag{7.27}$$

Таким чином, у роботі отримані вирази для напружень у циліндричній оболонці та ізотропного шару під дією довільного навантаження, куди входять складові від розв'язків теорії пружності для шару, рівнянь теорії оболонок і корегуючі розв'язки.

7.3.1. Симетрична задача для шару. За символічним методом А.І. Лур'є [73], розв'язки рівнянь Ляме можуть бути записані через спеціальні функції, які є цілими функціями лапласіана Δ . Через такі функції можна виразити як компоненти вектора переміщень, так і компоненти тензора напружень наступним чином:

$$\begin{aligned}2G(U, V) &= -h^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi_1, \quad 2GW = -h^3 \Delta \Phi_2; \\ \sigma_x, \sigma_y &= -h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi_1 + 2\nu h^2 \Delta \Phi_0, \quad \sigma_\gamma = h^2 \Delta \Phi_3,\end{aligned}\tag{7.28}$$

де Δ – оператор Лапласа, G – модуль зсуву матеріалу, U, V, W – проекції вектора переміщень на осі Ox, Oy, Oz ; Φ_j – відомі функції напружень А.І. Лур'є, які простіше записувати у

кожному окремому випадку симетричної та кососиметричної задач теорії пружності.

Пружно-деформований стан шару у симетричному випадку ($p=0$) на основі робіт [33,73,76] записується через функції напружень

$$\Phi_j^c(d, \xi) = f_j(d, \xi) \cdot \chi, \quad (7.29)$$

де $\xi = \frac{z}{h}$, $d^2 = h^2 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$; f_j — функції, які мають вигляд (7.21).

З формул (7.29) видно, що функції Φ_j^c — розв'язки диференціального рівняння безмежно високого порядку

$$d^2(1 + \sin 2d / 2d) \Phi_j^c = f_j(d) q, \quad (j = 0, 1, 2, 3).$$

Застосуємо до цього рівняння формулу розгортання М.Є. Ващенко-Захарченка [33]:

$$\Phi_j^c \equiv \frac{f_j(d) q}{d^2(1 + \sin 2d / 2d)} = \sum_i \frac{f_j(\alpha_i) q_i}{\cos^2 \alpha_i} + \frac{f_j(0) q_0}{2}. \quad (7.30)$$

Тут α_i — корені алгебраїчного рівняння $1 + \sin 2\alpha / 2\alpha = 0$, причому $\text{Re } \alpha_i > 0$; функції q_i — розв'язки рівняння другого порядку $(d^2 - \alpha_i^2) q_i = q$ при $i \neq 0$ і $d^2 q_0 = q$.

Розглянемо випадок необмеженої плити, коли функції $q_i (i=0,1,\dots)$ визначаються однозначно із додаткової умови, що $q_i \rightarrow 0 (i \neq 0)$, $\partial_{1,2}q_0 \rightarrow 0$ при $x, y \rightarrow \infty$. Тоді на основі формули (7.30) співвідношення (7.28) запишемо у вигляді:

$$U = -\frac{h}{2G} \partial_1(Q_1 + \nu q_0), \quad V = -\frac{h}{2G} \partial_2(Q_1 + \nu q_0),$$

$$W = -\frac{h}{2G} [d^2 Q_2 - (1-\nu) \xi q], \quad \sigma_z = d^2 Q_3 + q,$$

$$\sigma_{ij} = -\partial_1 \partial_2 (Q_1 + \nu q_0) + \delta_{ij} 2\nu d^2 (Q_0 + 0,5q), \quad (7.31)$$

де $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial \xi}$; $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial \zeta}$; $Q_j = \sum_i \frac{f_j(\alpha_i, \xi)}{\cos^2 \alpha_i} q_i$.

Для оцінки і покращення збіжності рядів, через які записано розв'язок, розглянемо рівняння вигляду

$$(\Delta - \alpha^2)G = q, \quad (7.32)$$

де $\Delta = d^2 / h^2$, $\alpha = \text{const}$, ($\text{Re } \alpha > 0$). Позначимо через S область, в якій існує $\Delta^n q (n > 0)$. Розв'язок рівняння (7.32) запишемо у вигляді

$$G = G_r + G_1, \quad (7.33)$$

$$\text{де } G_r = \begin{cases} -\alpha^{-2} (1 + \alpha^{-2} \Delta + \dots + \alpha^{-2n+2} \Delta^{n-1}) q, & (x, y) \in S. \\ 0, & (x, y) \in S_1. \end{cases}$$

$$G_1 = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[G_r \Big|_L \frac{\partial}{\partial n} K_0(\alpha r) - \frac{\partial G_r}{\partial n} \Big|_L K_0(\alpha r) \right] ds - \frac{1}{2\pi} \int_S g_1 K_0(\alpha r) dS.$$

Тут $g_1 = \alpha^{-2n} \Delta^n q$ при $(x, y) \in S$; $g_1 = q$, при $(x, y) \in S_1$;

$S + S_1$ – безмежна область $-\infty < x, y < \infty$; L – границя між областями S і S_1 ; $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$; інтегрування ведеться за змінними ξ, η .

Враховуючи, що $K_0(z) = 0(e^{-z})$ для $\text{Re } z \gg l$, отримаємо $G_1 = 0(\alpha^{-2n}) + 0(e^{-\alpha l})$. Тут l – віддаль від точки (x, y) до кривої L . Зазначимо, що якщо в області S має місце рівність $\Delta^n q = 0$, то $G_1 = 0(e^{-\alpha l})$.

Враховуючи, що $q_i = h^2 G|_{\alpha=\alpha_i h}$ та формули (7.33), отримаємо

$$Q_j = \sum_i \frac{f_j(\alpha_i, \xi)}{\cos^2 \alpha_i} q_{i,m} - \sum_i \frac{f_j(\alpha_i, \xi)}{\cos^2 \alpha_i} \left[\alpha_i^{-2} q_i + \dots + \alpha_i^{-2m} d^{2m-2} q \right],$$

$$\text{де } q_{i,m} = q_i + \left[\alpha_i^{-2} q_i + \dots + \alpha_i^{-2m} d^{2m-2} q \right].$$

Звідси

$$Q_j = Q_j^{(m)} + (a_0 + a_2 d^2 + \dots + a_{2m-2} d^{2v-2}) q, \quad (7.34)$$

де $Q_j^{(m)} = \sum_i \frac{f_j(\alpha_i, \xi)}{\cos^2 \alpha_i} q_{i,m}$, $a_{2k} = -\sum_i \frac{f_j(\alpha_i, \xi)}{\cos^2 \alpha_i \cdot \alpha_i^{2k+2}}$.

Для визначення коефіцієнтів a_{2k} використаємо формулу розгортання мероморфної функції в ряд за полюсами:

$$\frac{f(d, \xi)}{d^2(1 + \sin 2d / 2d)} = \sum_i \frac{f_j(\alpha_i, \xi)}{\cos^2 \alpha_i} \frac{1}{d^2 - \alpha_i^2} + \frac{f(0, \xi)}{2d^2}. \quad (7.35)$$

Позначимо

$$F(\phi) = \sum_i \frac{f_j(\alpha_i, \xi)}{\cos^2 \alpha_i} \frac{1}{\phi - \alpha_i^2}.$$

Легко побачити, що $F(\phi) = \frac{f(d, \xi)}{\phi(1 + \sin 2d / 2d)} - \frac{f(0, \xi)}{2\phi}$, $\phi = d^2$.

На основі цієї рівності знаходимо

$$a_{2k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\phi^k} F(\phi) \Big|_{\phi=0}.$$

Використовуючи наведені формули, при $m=2$ отримаємо

$$Q_1 = Q_1^* + \frac{1-\nu}{2} \left[-\frac{1}{3} + \xi^2 \right] q + \frac{1}{2} \left[\frac{4}{45} (1-\nu) - \frac{2-\nu}{12} (\xi^2 - 1)^2 \right] d^2 q,$$

$$Q_2 = Q_2^* + \frac{\nu}{6} (1 - \xi^2) \xi q + \frac{1}{2} \xi \left[\frac{1}{12} - \frac{\nu}{180} - \frac{1+\nu}{18} \xi^2 + \frac{1+\nu}{60} \xi^4 \right] d^2 q,$$

$$Q_3 = Q_3^* + \frac{1}{24} (1 - \xi^2)^2 d^2 q, \quad (7.36)$$

$$Q_0 = Q_0^* + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} - \xi^2 \right] q + \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{45} + \frac{(\xi^2 - 1)^2}{24} \right] d^2 q,$$

$$Q_j^* = \sum_i \frac{f_j(\alpha_i, \xi)}{\cos^2 \alpha_i} \left[q_i + \alpha_i^{-2} q + \alpha_i^{-4} d^2 q \right].$$

Значимо, що члени ряду $Q_j^{(m)}$ мають порядок $0(\alpha_k^{-2m})$

при великих k або $0[\exp(-\alpha_i l)]$, якщо $d^{2m-2} q \equiv 0$ в області S .

Наведені вище формули значно спрощуються для границі $\xi = 1$. Тоді напруження визначаються за формулами:

$$\sigma_{ij} = -2 \left[(1-\nu) \partial_i \partial_j + \nu \delta_{ij} d^2 \right] Q_1 - \nu (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} d^2) q_0, \quad (7.37)$$

де $Q_1 = Q_1^* + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{45} d^2 - \frac{1}{42 \cdot 45} d^4 - \frac{11}{21 \cdot 15 \cdot 45} d^6 \right) q,$

δ_{ij} – символ Кронекера.

7.3.2. Розв'язки задач для випадків гладко змінюваних навантажень. Розглянемо випадок, коли навантаження, що діє на зовнішніх поверхнях шару, є гладко змінюваним по відношенню до координат. Тоді, в наведених раніше розв'язках, функції $P_j^{(n)}, Q_j^{(n)}$ стають малими за величиною і ними в практичних розрахунках можна знехтувати. Зазначимо при цьому, що напруження і переміщення визначаються через розв'язки, які отримуються на основі теорії Кірхгофа та додаткових членів, що мають простий вигляд.

Для дослідження ефективності отриманого раніше розв'язку, визначимо напруження у пластині $-h < z < h$, зумовлені прикладеними до границі зусиллями

$$\sigma_z|_{z=\pm h} = q = \sigma_0 \exp(-kr^2), \text{ де } r^2 = x^2 + y^2, k = \text{const.}$$

Вирази для функцій, через які визначаються напруження σ_{ij} на границі пластини, при використанні формул (7.36), мають вигляд

$$\begin{aligned} \partial_1^2 q_0 &= \frac{\sigma_0}{2kr^4} \left\{ \left[2ky^2 r^2 - (x^2 - y^2) \right] \exp(-kr^2) + x^2 - y^2 \right\}, \\ \partial_2^2 q_0 &= \sigma_0 \exp(-kr^2) - \partial_1^2 q_0, \quad \partial^2 q = -4k\sigma_0 (1 - kr^2) \exp(-kr^2), \\ \partial^4 q &= 16\sigma_0 k^2 (2 - 4kr^2 + k^2 r^4) \exp(-kr^2), \end{aligned} \quad (7.38)$$

$$\partial^6 q = 64\sigma_0 k^3 \left(-6 + 18kr^2 - 9k^2 r^4 + k^3 r^6 \right) \exp(-kr^2).$$

Значимо, що в даному випадку функції, через які визначається розв'язки (7.33), (7.34) при $r = 0$ мають вигляд

$$q_i = -\frac{\sigma_0}{4k} \exp\left(\frac{a_i^2}{4k}\right) E_1\left(\frac{a_i^2}{4k}\right), \quad (7.39)$$

де $E_1(z)$ – інтегральна показникова функція. Використавши відомий асимптотичний розклад для функції $E_1(z)$ при великих z , отримаємо формули (7.33), які були знайдені для даного випадку раніше іншим шляхом. Точний розв'язок даної задачі в циліндричній системі координат має вигляд [74]:

$$\begin{aligned} 2Gw &= \int_0^\infty s(\eta) f_2(i\eta, \xi) \tilde{q} J_0(\eta r) d\eta, \\ 2Gu_r &= -\int_0^\infty s(\eta) f_1(i\eta, \xi) \tilde{q} J_1(\eta r) d\eta, \end{aligned} \quad (7.40)$$

де $s(\eta) = 1 / (1 + sh \ 2\eta / 2\eta)$, $\tilde{q} = \frac{\sigma_0}{2k} \exp(-\eta^2 / 4k)$,

$J_0(\eta r)$, $J_1(\eta r)$ – функції Бесселя I роду дійсного аргументу;

$(\sigma_x + \sigma_y)_{|\xi=1} / \sigma_0 = \sigma_T$, коли $\sigma_0 = 1$ для $r = 0, 375nh, (n = 0, 1, \dots)$

на основі точних формул (7.40) для σ_T та наближених σ_n , коли $m = 2$ і у формулах (7.37) знехтували величинами Q_j^* , подані в табл. 7.1 для $k = 0, 2$ і в табл. 7.2 – для $k = 0, 4$.

Таблиця 7.1

Порівняльна таблиця сумарних напружень σ_T ($k = 0,2$)

n	0	2	4	6	10
σ_T	0,578	0,495	0,302	0,120	-0,016
σ_H	0,573	0,491	0,333	0,121	-0,017

Таблиця 7.2

Порівняльна таблиця сумарних напружень σ_T ($k = 0,4$)

n	0	2	4	6	10
σ_T	0,759	0,551	0,181	-0,163	0,016
σ_H	0,697	0,532	0,198	-0,152	0,016

На основі наведених таблиць можна зробити висновок, що спрощена формула (7.37) є досить точною для повільно змінних за координатами (x, y) навантажень, коли ($k < 0,5$).

7.4. Аналіз точності розв'язків неklasичних теорій згину пластин за локалізованих навантажень

Дослідимо точний розв'язок задачі теорії пружності для ізотропного шару, що перебуває під дією локалізованих навантажень, які прикладені нормально до його зовнішньої поверхні. Розв'язок записано у вигляді суми двох складових. Перша подана в аналітичному вигляді, а друга – через швидкозбіжний інтеграл. Показано, що друга складова є достатньо малою, якою можна знехтувати.

На основі отриманого розв'язку для ізотропного шару проведено зіставлення результатів розрахунку переміщень за різними уточненими теоріями згину пластин та за теорією тонких пластинок Кірхгофа.

Розглянемо ізотропний шар $-h \leq z \leq h$, що перебуває під дією розподіленого навантаження $q(x, y)$:

$$\sigma_z(x, y, h) = q(x, y), \quad \sigma_z(x, y, -h) = 0, \quad (7.41)$$

$$\tau_{iz}(x, y, \pm h) = 0, \quad (i = x, y).$$

Вираз для переміщення границі шару $z = h$ у символічному вигляді записується із урахуванням симетричної та асиметричної складових навантаження [75, 165]:

$$\frac{G}{1-\nu} W = h \left[\frac{\sin^2 d}{d(2d + \sin 2d)} + \frac{\cos^2 d}{d(2d - \sin 2d)} \right] q(x, y), \quad (7.42)$$

$$\text{де } d^2 = h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Якщо до виразу (7.42) застосувати формулу розвинення М.Є. Ващенко-Захарченка, то він може спроститися до вигляду [165]:

$$W(x, y, h) = F(x, y) + \frac{h}{4G} (1-\nu) q + \frac{h}{2G} P_2 - \frac{h}{2G} \cdot d^2 \cdot Q_2, \quad (7.43)$$

де величини P_2 і Q_2 можуть бути записані в інтегральному вигляді:

$$P_2(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \iint_S q(\xi, \eta) \cdot F_a(x - \xi, y - \eta) \cdot d\xi d\eta, \quad (7.44)$$

$$Q_2(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \iint_S q(\xi, \eta) \cdot F_s(x - \xi, y - \eta) \cdot d\xi d\eta,$$

$$F_a = -\frac{1}{2\pi h^2} \sum_i \frac{\varphi_2(\beta_i, 1)}{\sin^2 \beta_i} K_0(\beta_i \cdot \rho),$$

$$F_s = -\frac{1}{2\pi h^2} \sum_i \frac{f_2(\alpha_i, 1)}{\cos^2 \alpha_i} K_0(\alpha_i \cdot \rho),$$

$\rho = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{h}$, S – область, в якій $q \neq 0$; $K_0(\rho)$ – функція

Макдональда; α_i, β_i – корені рівняння $\sin 2d \pm 2d = 0$, причому $\text{Re}(\alpha_i, \beta_i) > 0$; $F(x, y)$ – функція, яка визначається з рівняння:

$$D\Delta^2 F = (1 - 0,8 \cdot h^2 \Delta) q. \quad (7.45)$$

З [74] відомо, що $\operatorname{Re} \alpha_1 \approx 2,11$, $\operatorname{Re} \beta_1 \approx 3,75$, а в наступних коренях дійсна частина зростає приблизно на величину π .

Крім того, аналіз функцій $F_a(\rho)$ та $F_s(\rho)$ показує що при великих ρ їх можна записати у вигляді:

$$F_a(\rho) = O(\exp(-3,75\rho)), \quad F_s(\rho) = O(\exp(-2,11\rho)),$$

коли $\rho \rightarrow \infty$.

Тобто, названі функції можна вважати дельтаподібними і наближено прийняти, що:

$$F_j(x, y) \approx A_j \delta(x) \cdot \delta(y), \quad (j = a, s), \quad (7.46)$$

де A_j – деякі сталі.

У випадку, коли функція $q(x, y)$ є слабо змінною, та при умові збіжності інтегралів від правої і лівої частини виразу (7.37), після інтегрування отримуємо:

$$A_a = \sum_i \frac{\varphi_2(\beta_i, 1)}{\beta_i^2 \sin^2 \beta_i}, \quad A_s = \sum_i \frac{f_2(\alpha_i, 1)}{\alpha_i^2 \cos^2 \alpha_i}. \quad (7.47)$$

Таким чином, виходячи з формул (7.44)–(7.47), можна наближено записати, що:

$$P_2 = A_a \cdot q(x, y), \quad Q_2 = A_s \cdot q(x, y) \quad (7.48)$$

На основі дослідження збіжності рядів (7.47) показано [74], що суми, через які виражаються сталі A_j , збігаються до значень:

$$A_a = \frac{81}{700} \cdot (1 - \nu), \quad A_s = 0. \quad (7.49)$$

Виходячи зі співвідношень (7.48), (7.49), формула (7.43) набуває вигляду:

$$W(x, y, h) = F(x, y) + 0,308(1 - \nu) \cdot \frac{q}{G} \cdot h. \quad (7.50)$$

Використавши точний та наближений розв'язки рівнянь теорії пружності для ізотропного шару, дослідимо точність неklasичних теорій згину пластин середньої товщини та рівнянь згину тонких пластинок Кірхгофа при дії локалізованих навантажень.

Уточнені рівняння згину пластин середньої товщини, яка враховує поперечний зсув та обтиснення, мають вигляд [162]:

$$D\Delta^2 W = (1 - 0,8 \cdot h^2 \Delta)q + \delta_1 h^4 \Delta^2 q - \delta_2 h^6 \Delta^3 q; \quad (7.51)$$

$$W(x, y, h) = w(x, y) + \frac{A_0}{E} \cdot qh + \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu h^2}{1 - \nu} \cdot \Delta \bar{w},$$

де $\delta_1 = \frac{0,49}{1 - \nu^2} (1 + 0,09\nu - 1,75\nu^2 (1 + 0,8\nu)),$

$$\delta_2 = \frac{\nu(2 - \nu)}{80(1 - \nu^2)(1 - \nu)^2}, \quad A_0 = \frac{(1 + \nu)}{16(1 - \nu)} \cdot (13 - 16\nu + \nu^2),$$

$$\bar{w} = w + \frac{1}{32} \cdot \frac{q}{E} \cdot (2 - \nu)h;$$

$w(x, y)$ – переміщення серединної поверхні пластини, яке задовольняє відомому бігармонійному рівнянню (7.12), коли параметр $\varepsilon_2=0$.

Нескладно показати, що перше рівняння (7.51) зводиться до рівняння (7.45), якщо для нього виконати заміну змінних:

$$W(x, y, h) = F(x, y) + (\delta_1 - h^2 \delta_2 \Delta) \frac{qh^4}{D}. \quad (7.52)$$

Аналіз формули (7.52) показує, що при $\nu = 0,35$ і $\delta_2 \approx 0$ вона буде повністю співпадати з формулою (7.50), а при значенні коефіцієнта Пуассона $\nu = 1/3$ у формулі (7.50) число 0,308 необхідно замінити числом 0,325. Тобто, формули (7.50), (7.51) є асимптотично точними по відношенню до рівнянь теорії пружності для шару.

Розв'язок рівняння (7.45) для випадку дії самозрівноважених зосереджених сил можна записати у вигляді [165]:

$$F = \frac{1}{8\pi D} \sum_{j=1}^N P_j \left[r_j^2 - 3,2 \cdot \chi h^2 \right] \ln \frac{r_j}{h}, \quad (7.53)$$

де $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$; x_j, y_j – точки прикладання до плити самозрівноважених сил P_j (головний вектор і момент дорівнюють нулю):

$$\sum_{j=1}^N P_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N P_j x_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N P_j y_j = 0;$$

$\chi = 1$ у випадку рівняння (7.45) і $\chi = \frac{2-\nu}{2(1-\nu)}$ – для випадку рівняння теорії Рейсснера. Для теорії тонких пластинок Кірхгофа-Лява параметр $\chi = 0$.

При згині ізотропного шару розподілим навантаженням $q(x, y)$ повний розв'язок рівняння (7.45) може бути записаний таким чином:

$$F = \frac{1}{8\pi D} \iint_S q(\xi, \eta) \Phi(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (7.54)$$

де $\Phi(x_j, y_j) = \sum_{j=1}^N (r_j^2 - 3, 2\chi \cdot h^2) \ln\left(\frac{r_j}{h}\right)$.

Числові розрахунки для переміщень ізотропного шару виконаємо при його навантаженні у трьох кругових областях радіуса R із центрами в точках $(\pm 1, 0)$, $(0, 0)$. У кожній з областей приймається параболічний розподіл зусиль, тобто

$$q(x, y) = q_0 \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_{1,2}^2}{R^2} \right) & \text{нпу } r_{1,2} < R; \\ 1 - \frac{r_0^2}{R^2} & \text{нпу } r_0 < R, \end{cases} \quad (7.55)$$

де $r_{1,2}^2 = (x \pm 1)^2 + y^2$; $r_0^2 = x^2 + y^2$.

Так само, як і у випадку зосереджених сил, прикладене локалізоване навантаження $q(x, y)$ вважається самозрівноваженим. Для знаходження інтеграла (7.54) розроблено числовий алгоритм, який ґрунтується на кубатурних формулах від інтегралів, що мають інтегровані особливості.

Результати підрахунку переміщень $\tilde{w} = 2W / (\alpha \pi R^2 q_0)$,

$\alpha = (1 - \nu) / (4\pi hG)$ уздовж осі Ox наведені в табл.7.3.

Таблиця 7.3

Числові розрахунки для переміщень пластини

x/h	Точний розв'язок	Формула (7.52)	Теорія Кірхгофа
0	$\frac{198,96}{57,415}$	$\frac{198,18 (0,11)}{58,692 (2,22)}$	$\frac{171,54 (13,78)}{47,717 (22,64)}$
2	$\frac{167,08}{44,751}$	$\frac{166,78 (0,18)}{45,185 (0,97)}$	$\frac{149,64 (10,44)}{38,551 (13,85)}$
4	$\frac{110,45}{30,264}$	$\frac{110,52 (0,06)}{30,690 (1,41)}$	$\frac{99,580 (9,84)}{25,600 (15,4)}$
6	$\frac{44,868}{13,673}$	$\frac{44,869 (0,00)}{14,029 (2,60)}$	$\frac{40,481 (9,78)}{10,443 (23,6)}$
7,5	0	0	0

Дані, наведені в чисельнику кожної стрічки, пораховані при $R = 2h$, а в знаменнику — при $R = h$. Значення в дужках

дорівнюють відносним похибкам у відсотках відповідних формул. У даному випадку розв'язки побудовані таким чином, що на відстані $x = y = 7,5h$ усі переміщення у плиті дорівнюють нулю.

Аналіз даних табл. 7.3 показує, що запропонований варіант теорії згину пластин у випадку локалізованих навантажень дає результати, які практично співпадають із результатами теорії пружності для ізотропного шару для розмірів площинок навантажень, більших за півтовщину пластини ($R \geq h$). Що стосується теорії тонких пластинок Кірхгофа, то вона дає похибки, які можуть значно перевищувати 20 % для відношень x/h , що приведені в таблиці.

Таким чином, розроблений підхід (метод неоднорідних розв'язків) дозволяє узагальнити відомі однорідні розв'язки рівнянь нескінченно високого порядку, отриманих А.І. Лур'є символічним методом на прикладі задачі теорії пружності для циліндричної оболонки та ізотропного шару. Методом неоднорідних розв'язків у симетричній та антисиметричній постановках одержано розв'язки, які розбиваються на дві складові, що описують основний та корегувальний напружено-деформовані стани. Останній дозволяє точно задовольнити граничні умови на зовнішніх поверхнях шару. Виведені формули застосовуються для дослідження точності рівнянь уточненої теорії згину пластин середньої товщини, що враховує

деформації поперечного зсуву та обтиснення, побудованої у попередніх розділах. Одержано точний розв'язок задачі теорії пружності для пластини, що перебуває під дією системи довільним чином прикладених самозрівноважених зосереджених сил. На основі одержаного розв'язку та кубатурних формул побудовано розв'язок просторової задачі теорії пружності для системи локалізованих розподілених навантажень. При цьому основне рівняння згину лицевої поверхні пластини, яке знайдене на основі рівнянь теорії пружності у вигляді неоднорідних розв'язків, майже повністю збігається із відповідним рівнянням уточненої моделі пластин середньої товщини. Шляхом зіставлення результатів розрахунку переміщень згідно розв'язків теорії пружності, прикладних теорій згину пластин, а також теорії Кірхгофа-Лява, досліджується ступінь їх точності при дії зосереджених сил і локалізованих навантажень.

Значення лінійних операторів L_{ij} для ортотропної оболонки

$$L_{11} = \frac{n_1}{A_\alpha^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{A_\beta^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \left(\begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ \alpha \rightarrow \beta \end{array} \right);$$

$$L_{12} = (1 + n_1 \nu_{12}) \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} = L_{21}; \quad L_{13} = (k_\alpha + \nu_{12} k_\beta) \frac{n_1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} = L_{51};$$

$$L_{14} = \frac{h^2}{9} \left(\frac{k_\alpha}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial L_{11}}{\partial \alpha} + \frac{k_\beta}{A_\beta} \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial \beta} \right) + \frac{k_\alpha \tilde{K}_\alpha}{B_1} \cdot \frac{n_1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha};$$

$$L_{15} = \frac{h^2}{9} \left(\frac{k_\beta}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha} - \frac{k_\alpha}{A_\beta} \cdot \frac{\partial L_{11}}{\partial \beta} \right) - \frac{k_\alpha \tilde{K}_\alpha}{B_1} \cdot \frac{n_1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$L_{23} = (k_\beta + \nu_{21} k_\alpha) \frac{n_2}{A_\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} = L_{52}; \quad L_{31} = k_\alpha L_{11}; \quad L_{32} = k_\beta L_{12};$$

$$L_{24} = \frac{h^2}{9} \left(\frac{k_\alpha}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial L_{21}}{\partial \alpha} + \frac{k_\beta}{A_\beta} \cdot \frac{\partial L_{22}}{\partial \beta} \right) + \frac{k_\beta \tilde{K}_\beta}{B_2} \cdot \frac{n_2}{A_\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$L_{25} = \frac{h^2}{9} \left(\frac{k_\beta}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial L_{22}}{\partial \alpha} - \frac{k_\alpha}{A_\beta} \cdot \frac{\partial L_{21}}{\partial \beta} \right) + \frac{k_\beta \tilde{K}_\beta}{B_2} \cdot \frac{n_2}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha};$$

$$L_{33} = -\frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{n_1}{A_\alpha^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (2 + n_1 \nu_{12}) \frac{1}{A_\beta^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right);$$

$$L_{34} = \frac{4 \tilde{\lambda}_\alpha}{5 A_\alpha} \cdot \frac{\partial L_{11}}{\partial \alpha} + \frac{4 \tilde{\lambda}_\beta}{5 A_\beta} \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial \beta} - \frac{\tilde{K}_\alpha}{D_{66}} \cdot \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha};$$

$$L_{35} = -\frac{4 \tilde{\lambda}_\alpha}{5 A_\beta} \cdot \frac{\partial L_{11}}{\partial \beta} + \frac{4 \tilde{\lambda}_\beta}{5 A_\alpha} \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\tilde{K}_\alpha}{D_{66}} \cdot \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$L_{43} = -\frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{n_2}{A_\beta^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (2 + n_2 \nu_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right);$$

$$L_{44} = \frac{4}{5} \frac{\tilde{\lambda}_\alpha}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha} + \frac{4}{5} \frac{\tilde{\lambda}_\beta}{A_\beta} \cdot \frac{\partial L_{22}}{\partial \beta} - \frac{\tilde{K}_\beta}{D_{66}} \cdot \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta};$$

$$L_{45} = -\frac{4}{5} \frac{\tilde{\lambda}_\alpha}{A_\beta} \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial \beta} + \frac{4}{5} \frac{\tilde{\lambda}_\beta}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial L_{22}}{\partial \alpha} - \frac{\tilde{K}_\beta}{D_{66}} \cdot \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha};$$

$$L_{41} = k_\alpha L_{12}; L_{42} = k_\beta L_{22};$$

$$L_{53} = n_1 k_\alpha^2 + 2n_1 \nu_{12} k_\alpha k_\beta + n_2 k_\beta^2;$$

$$L_{54} = \left(\frac{h^2}{9} (k_\alpha^2 + \nu_{12} k_\alpha k_\beta) - \frac{\tilde{K}_\alpha}{B_1} \right) \frac{n_1}{A_\alpha^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} +$$

$$+ \left(\frac{h^2}{9} (k_\beta^2 + \nu_{21} k_\alpha k_\beta) - \frac{\tilde{K}_\beta}{B_2} \right) \frac{n_2}{A_\beta^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \beta^2};$$

$$L_{55} = \left[\frac{(\tilde{K}_\alpha - \tilde{K}_\beta)}{B_{\alpha\beta}} + \frac{h^2}{9} (n_2 k_\beta^2 - n_1 k_\alpha^2) \right] \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta};$$

$$L_{16} q = L_{13} \tilde{q}_2 - \frac{\tilde{A}_1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial \alpha}, \quad \tilde{A}_1 = \frac{n_1 A_1}{\tilde{E}_1};$$

$$L_{26} q = L_{23} \tilde{q}_2 - \frac{\tilde{A}_2}{A_\beta} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial \beta}, \quad \tilde{A}_2 = \frac{n_2 A_2}{\tilde{E}_2};$$

$$L_{36} q = L_{13} \tilde{q}_1 - \frac{3\tilde{A}_1}{5h \cdot A_\alpha} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \alpha}; \quad L_{46} q = L_{23} \tilde{q}_1 - \frac{3\tilde{A}_2}{5h \cdot A_\beta} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \beta};$$

$$L_{56} q = L_{53} \tilde{q}_2 + \tilde{q}_\gamma - (k_\alpha A_1 + k_\beta A_2) \frac{q_1}{G_{12}};$$

$$\tilde{K}_\alpha = \frac{K_\alpha}{\lambda_\alpha}; \quad \lambda_\alpha = 1 - \frac{5}{9} k_\alpha^2 h^2; \quad \tilde{\lambda}_\alpha = 1 - \frac{5}{12} k_\alpha^2 h^2;$$

$$n_1 = \frac{\tilde{E}_1}{G_{12}}; \quad n_2 = \frac{\tilde{E}_2}{G_{12}}; \quad \tilde{q}_\gamma = \frac{q_\gamma}{B_{\alpha\beta}};$$

$$\tilde{q}_1 = -\frac{q_1}{E_3}; \quad \tilde{q}_2 = -\frac{9hq_2}{80E_3}; \quad B_{\alpha\beta} = 2G_{12}h.$$

Значення коефіцієнтів L_{ij} для сферичної ортотропної оболонки, шарнірно обертої по контуру

$$\begin{aligned} \bar{L}_{11} &= n_1 \lambda^2 + \zeta^2; & \bar{L}_{12} &= \lambda \zeta (1 + n_1 \nu_{12}) = \bar{L}_{21}; \\ \bar{L}_{22} &= \lambda^2 + n_2 \zeta^2; & \bar{L}_{13} &= \lambda n_1 (k_\alpha + \nu_{12} k_\beta) = \bar{L}_{51}; \\ \bar{L}_{14} &= \lambda \frac{h^2}{9} (k_\alpha (n_1 \lambda^2 + \zeta^2) + k_\beta (1 + n_1 \nu_{12}) \zeta^2) - \lambda k_\alpha \tilde{K}_\alpha n_1 / B_1; \\ \bar{L}_{16} &= \lambda n_1 \left[\frac{A_1}{2\tilde{E}_1} - \frac{9h}{80E_3} (k_\alpha + \nu_{12} k_\beta) \right]; & \bar{L}_{36} &= \lambda n_1 \left[\frac{k_\alpha + \nu_{12} k_\beta}{2E_3} - \frac{0.6A_1}{\tilde{E}_1 h} \right]; \\ \bar{L}_{26} &= \zeta n_2 \left[\frac{A_2}{2\tilde{E}_2} - \frac{9h}{80E_3} (k_\beta + \nu_{21} k_\alpha) \right]; \\ \bar{L}_{23} &= \zeta n_2 (k_\beta + \nu_{21} k_\alpha) = \bar{L}_{52}; & \bar{L}_{31} &= k_\alpha (n_1 \lambda^2 + \zeta^2); \\ \bar{L}_{24} &= \zeta \frac{h^2}{9} (k_\alpha (1 + n_1 \nu_{12}) \lambda^2 + k_\beta (\lambda^2 + n_2 \zeta^2)) - \zeta k_\beta \tilde{K}_\beta n_2 / B_2; \\ \bar{L}_{32} &= k_\beta (1 + n_1 \nu_{12}) \lambda \zeta; & \bar{L}_{33} &= \lambda (n_1 \lambda^2 + (2 + n_1 \lambda_{12}) \zeta^2); \\ \bar{L}_{34} &= \frac{4}{5} \tilde{\lambda}_\alpha \lambda (n_1 \lambda^2 + \zeta^2) + \frac{4}{5} \tilde{\lambda}_\beta \lambda (1 + n_1 \nu_{12}) \zeta^2 + \frac{\lambda \tilde{K}_\alpha}{D_{66}}; \\ \bar{L}_{36} &= \lambda n_1 \left[\frac{k_\alpha + \nu_{12} k_\beta}{2E_3} - \frac{0.6A_1}{\tilde{E}_1 h} \right]; \\ \bar{L}_{41} &= k_\alpha (1 + n_1 \nu_{12}) \lambda \zeta; & \bar{L}_{42} &= k_\beta (\lambda^2 + n_2 \zeta^2); \\ \bar{L}_{43} &= \zeta (n_2 \zeta^2 + (2 + n_2 \nu_{21}) \lambda^2); \\ \bar{L}_{44} &= \frac{4}{5} \zeta [\tilde{\lambda}_\alpha \lambda^2 (1 + n_1 \nu_{12}) + \tilde{\lambda}_\beta (\lambda^2 + n_2 \zeta^2)] + \frac{\zeta \tilde{K}_\beta}{D_{66}}; \\ \bar{L}_{46} &= \zeta n_2 \left[(k_\beta + \nu_{21} k_\alpha) \frac{1}{2E_3} - \frac{0.6A_2}{h\tilde{E}_2} \right]; & \bar{L}_{53} &= L_{53}; \\ \bar{L}_{54} &= \left[(k_\alpha^2 + \nu_{12} k_\alpha k_\beta) \frac{h^2}{9} - \frac{\tilde{K}_\alpha}{B_1} \right] \lambda^2 n_1 + \left[(k_\beta^2 + \nu_{21} k_\alpha k_\beta) \frac{h^2}{9} - \frac{\tilde{K}_\beta}{B_2} \right] \zeta^2 n_2; \\ \bar{L}_{56} &= \left[1 + (A_1 - 1) k_\alpha h + (A_2 - 1) k_\beta h + k_\alpha k_\beta h^2 - \frac{9h^2}{40} \cdot \frac{G_{12}}{E_3} \cdot \bar{L}_{53} \right] \frac{1}{B_{\alpha\beta}}. \end{aligned}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абовский Н.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 287 с.
2. Агаловян Л.А. О приведении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и погрешностях некоторых прикладных теорий // Доклады АН Арм.ССР, 1979. – Т.69. В.3. С.151-156.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 488 с.
4. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1986.-176 с.
5. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.:Наука, 1974. –446 с.
6. Андрейкив А.Е. Пространственные задачи теории трещин. – К.: Наукова думка, 1982. - 345 с.
7. Андрейкив А.Е., Дарчук А.И. Усталостное разрушение и долговечность конструкций. – Київ: Наук. думка, 1992. – 184 с.
8. Андрейкив А.Е. Разрушение цилиндрических тел с трещинами при сложном напряженном состоянии. – К.: Наукова думка, 1979. – 141 с.
9. Артюхин Ю.П., Карасев С.Н. Действие жесткого штампа на пологую оболочку и пластинку // Исслед. по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1972, вып.9. – С. 211-219.
10. Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.

11. Бабич И.Ю., Гузь А.Н. Устойчивость трансверсально - изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии // Механика полимеров. – 1969. – № 6. – С.1064-1068.
12. Бабич И.Ю., Семенюк Н.П. О расчетных моделях в задачах устойчивости оболочек из композиционных материалов // Прикл. мех. – 1998. – № 10. – С.24-31.
13. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела, 2010. – 352с.
14. Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Гонор А.Е. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – Киев: НИИ-СМ, 1993. – 376 с.
15. Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
16. Белова О.А., Горохова И.А., Сухинин С.Н. Устойчивость при осевом сжатии многослойных композитных оболочек: теория и эксперимент // Механика твердого тела. – 1999. – № 1. – С. 163-169.
17. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
18. Билосевич Р.М., Мочернюк Д.Ю., Пелех Б.Л. Об устойчивости трансверсально-изотропных оболочек при действии внешнего давления // Вестник Львовского политехнического института: Вопросы современного строительства. – Львов: ЛПИ, 1972, №70. – С.127-133.
19. Блох М.В. К выбору модели в задачах о контакте тонкостенных тел // Прикл. механика, 1977, т.13, № 5. – С.34-42.

20. Блох М.В., Гинц А.А., Кантор Б.Я. Об одном методе решения контактной задачи для цилиндрических оболочек // Проблемы машиностроения. – 1977. – Вып. 5. – С. 38-41.
21. Божидарнік В.В., Максимович О.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 228 с.
22. Божидарнік В.В., Сулим Г.Т. Теорія пружності: підручн. для студ. ВНЗ: у трьох томах. Т.1: Загальні питання. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2012. – 552с
23. Божидарнік В.В., Андрейків О.Є., Сулим Г.Т. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів: Монографія // Т.1 Основи механіки руйнування неперервно армованих композитів. – Луцьк: Надстир'я, 2007. – 400 с. Т.2. Математичні методи в задачах механіки руйнування неперервно армованих композитів. – Луцьк: Надстир'я, 2007. – 424 с.
24. Божидарнік В.В., Шваб'юк В.І., Ротко С.В. Проблеми застосування неklasичних моделей оболонок для розв'язку контактних задач // Вісник Дніпропетровського університету (серія „Механіка”). – 2006. – № 2/2. – С.18-24.
25. Болотин В.В. Об уравнениях теории устойчивости тонких упругих оболочек // Механика твердого тела. – 1967. – № 4. – С. 12-16.
26. Брок Д. Основы механики разрушения. – М.: Высшая школа, 1980. – 368 с
27. Бурак Я.Й., Рудавський Ю.К., Сухорольський М.А., Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: «Інтелект-Захід». 2007. – 240 с.
28. Ванин Г.А., Семенюк Н.П. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. – Киев: Наукова думка, 1987. – 200 с.

29. Варвак П.М., Рябов А.Ф. Справочник по теории упругости. – К. 1971. – 420 с.
30. Василенко А.Т., Урусова Г.П. Исследование влияния локальности нагружения на распределение напряжений в анизотропных оболочках вращения // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 2. – С.114-119.
31. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
32. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек. // Механика твёрдого тела. – 1990. – № 6. – С.139-146.
33. Ващенко-Захарченко М.Е. Символическое исчисление и приложение его к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений. – Киев: 1862. – 102 с.
34. Векуа И.Н. Вариационные принципы построения теории оболочек. – Тбилиси: Изд-во Тбилисс. Ун-та, 1970. – 15с.
35. Власов Б.Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты // Вестник МГУ (серия физ.-мат.наук). – 1957. – № 2. – С.35-24.
36. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, пластины и оболочки на упругом основании. – М.: Госфизматлит, 1960. – 491 с.
37. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике. Избранные труды. – М.: Изд. АН СССР, 1962. – Т. I. – 784 с.
38. Вовченко Н.Г., Плеханов А.В., Прусаков А.П. К уточнённой теории трансверсально-изотропных пологих оболочек // Известия вузов. Строительство и архитектура, 1981. № 1. – С.30-33.

39. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем – М.: Гостехиздат, 1963. – 984 с.
40. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
41. Гембара В.М., Максимович Я.В., Швабюк В.І. Пружна рівновага смуги, навантаженої штампом і зосередженими силами. // Наукові записки Укр. акад. друк.-ва, наук.-техн. зб.-ник. – Львів: УАД. 1999. В. 1. – С.129-133.
42. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
43. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко-Райсснера // Механика твердого тела. – 1990. – № 6. – С. 124-138.
44. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 416 с.
45. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Решение задач и анализ напряженно-деформированого состояния анизотропных неоднородных оболочек (Обзор) // Прикл. механика. – 1997. – Т.33, № 11. – С. 3-37.
46. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наукова думка, 1987. – 216с
47. Григоренко Я.М. Решение задач статики некруговых цилиндрических оболочек в различных постановках на основе нетрадиционных подходов // Прикл. механика. – 2007. – Т. 43, № 1. – С.45-65.

48. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К.: Наукова думка, 1978. – 264 с.
49. Гузь А.Н., Чернишенко И.С., Чехов Вал. Н., Чехов Вик. Н., Шнеренко К.И. Методы расчета оболочек. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – К.: Наукова думка, 1980. – Т.1. - 636 с.
50. Гузь А.Н., Бабич И.Ю., Пелех Б.Л., Тетерс Г.А. Об области применения прикладных теорий в задачах устойчивости стержней и пластинок с низкой сдвиговой жесткостью в случае одноосного сжатия // Механика полимеров, 1969. № 6.– С.1124-1126.
51. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т.4. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – Киев: Наукова думка, 1985. – 280 с.
52. Гуляев В.И. Применение теории Н.Н.Векуа для решения неклассических задач теории оболочек: Матер. I Всесоюзн. школы по теор. и числ. метод. расч. оболоч. и пласт. – Тбилиси, 1975. – С. 321-351.
53. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. Неклассическая теория оболочек и её приложение к решению инженерных задач. – Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1978. – 193 с.
54. Гуменюк В.С., Кравчук В.С. Исследование устойчивости цилиндрических оболочек из стеклопластика // Механика полимеров. – 1969.-№ 5. – С.886-891.
55. Гудрамович В.С. Устойчивость упругопластических оболочек. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.

56. Гудрамович В.С., Моссаковский В.И. Контактная задача для упругого кольца, подкрепляющего цилиндрическую оболочку // Изв. АН СССР, ОТН Механика и машиностроение. – 1961. – № 2. – С.153-156.
57. Дзюба А.П., Прокопало Є.Ф., Дзюба П.А. Несуча здатність циліндричних оболонок з отворами. Монографія. – Д.: Ліра, 2014. 224 с.
58. Доннел Л. Г. Балки, пластинки и оболочки / Пер. с англ. Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
59. Зеленський А.Г., Прусаков О.П., Вовченко М.Г. Варіант неklasичної теорії згину трансверсально-ізоtропних пластин і пологих оболонок // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 1999. – Т.2., №2. – С.58-65.
60. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. // – М.: Машиностроение, 1982. – 256 с.
61. Кантор Б.Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. – К.: Наукова думка, 1990. – 136 с.
62. Карнаухов В.Г., Козлов В.І., Карнаухова Т.В. Уточнена термомеханічна модель композитних оболонок типу Тимошенка з розподіленими трансверсально-ізоtропними сенсорами при моногармонічному навантаженні // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – № 4. – С. 119-132.
63. Карасев С.Н., Артюхин Ю.П. Влияние поперечного сдвига и обжатия на распределение контактных напряжений: Сб. Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976, вып. 12. – С. 68-77.

64. Кільчевський М.О. Основні рівняння рівноваги пружних оболонок і деякі методи їх інтегрування // Зб.праць ін-ту математики АН УРСР, 1940. – №№ 4,5,6.
65. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. – К.: Изд. АН УССР, 1963. – 354 с.
66. Кир'ян В.І., Осадчук В.А., Николишин М.М. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. – Львів: СПОЛОМ, 2007. – 320с.
67. Красовский А.Я., Красико В.Н. Трещиностойкость сталей магистральных трубопроводов. – Киев: Наукова думка, 1990. – 235 с.
68. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
69. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук Р.А. Пружний та пружнопластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
70. Кушнір Р.М., Попович В.С., Гарматій Г.Ю. Аналітично-чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. –37, №6. – С. 39-44.
71. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд.2-е. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
72. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. – М.: Мир, 1982. – 544с.
73. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
74. Максимович В.Н. Напряженное состояние неравномерно нагретых нагруженных по граничным

поверхностям пластин. – Прикл. мат. и механика. Том 43. – М., 1979. – С. 1065-1072.

75. Максимович В.М., Шваб'юк В.І. Точний та наближений розв'язки згину пластин зосередженими силами і локалізованими навантаженнями // Вісник Харків. держ. політех. ун-ту. Збірка наук.праць. – Харків: ХДПУ, 2000. – № 89.– С.164-173.

76. Максимович В.М., Шваб'юк В.І., Ротко С.В. Застосування методу неоднорідних розв'язків до розрахунку циліндричних оболонок середньої товщини. // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник. – Луцьк: Луцьк. держ. техн. ун-т, 2003. – Вип.13. – С.181-189.

77. Максимович В.М., Шваб'юк В.І., Сорока Р.О. Метод неоднорідних розв'язків в задачах теорії пружності для шару. // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник. –Луцьк: Луцьк. держ. техн. ун-т, 1999. – Вип.5. – С.149-159. – 2003. – Вип.13. – С.181-189.

78. Марчук А.В. Разработка математических моделей исследования устойчивости слоистых композитных плит с проскальзывающими слоями // Проблемы машиностроения. – 2000. – Т. 3, № 1-2. – С. 91-98.

79. Марчук М.В., Хом'як М.М. Змішана схема методу скінченних елементів для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин. – Львів: НАН України, ІПММ ім. Я.С. Підстригача, 2003. – 216 с.

80. Методы расчёта оболочек. Т.1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н.Гузь, И.С.Чернышенко, Вал.Н.Чехов, Вик.Н.Чехов, К.И.Шнеренко.-Киев: Наук.думка, 1980.– 636 с.; Т.4. Теория оболочек переменной жесткости/ Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко .– К.: Наук.думка. 1981.– 544 с.

81. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4-х томах. / Под общей ред. Панасюка В.В. Основы механики разрушения / Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. – Киев: Наук. думка, 1988. – Т.1. – 488 с.
82. Механіка руйнування та міцність матеріалів. Довідн. посібник. / Під заг. ред. В.В. Панасюка. Том 11: Міцність і довговічність нафтогазових трубопроводів і резервуарів / Г.М.Никифорчин, С.Г.Поляков, В.А.Черватюк, І.В.Ориняк, З.В. Слободян, Р.М.Джала. Під. ред. Г.М.Никифорчина – Львів: «Сполом», 2009. – 504 с.
83. Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Е.М. Контактное взаимодействие оболочных элементов конструкций. – Киев: Наукова думка, 1988. – 288 с.
84. Муштари Х.М. Нелинейная теория оболочек. – М.: Наука, 1990. – 223 с.
85. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
86. Немиш Ю.Н., Хома И.Ю. Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория (Обзор) // Прикл. механика. – 1993. – Т.29, № 11. – С.3-33.
87. Николишин М.М., Швабюк В.И., Фещук Ю.П. Предельное равновесие трансверсально- изотропной сферической оболочки с двумя поверхностными трещинами. // Прикл. механика, 2009. 45, №4.– С.109-115.
88. Опанасович В.К., Делявський М.В., Подхорецькі А. Новий підхід до розрахунку напруженого стану плити з тріщиною за теорією Рейсснера // Механіка руйнування

матеріалів і міцність конструкцій (в. 2): В 3-х т. /Під ред. Панасюка В.В. – Львів: Каменяр, 1999. Т.2. – С.186-189.

89. Орыняк И.В. Построение весовой функции для двумерных тел // Пробл. прочности. – 1990. – № 8. – С. 10-14.

90. Осадчук В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – К.: Наукова думка, 1985. – 224 с.

91. Панасюк В.В., Стадник М.М., Силованюк В.П. Концентрація напружень в трохмерних телах с тонкими включениями. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.

92. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. – К.: Наук. думка, 1975. – 44 с.

93. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Ковчик С.Е. Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов. – К.: Наукова думка, 1977. – 278 с.

94. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наукова думка, 1991. – 146 с.

95. Папкович П.Ф. Труды по строительной механике корабля в 4-х томах. Изгиб криволинейных рам и перекрытий. – Л.: Госиздат судостроительной промышленности, 1962. – Т.2. – 640 с.

96. Пелех Б.Л., Швабюк В.И. Об одном обобщении теории упругих трансверсально-изотропных плит применительно к некоторым контактными задачам. //Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1975. – В.26.– С.40-45.

97. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – К.: Наукова думка, 1975. – 199 с.
98. Пелех Б.Л. Теория оболочек с низкой сдвиговой жесткостью. – К.: Наукова думка, 1973. – 246 с.
99. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – К.: Наукова думка, 1980. – 216с.
100. Пелех Б.Л., Сяський А.А. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках. – К.: Наукова думка, 1975. – 199 с.
101. Підстригач Я.С. Вибрані праці. – К.: Наукова думка. 1996. – 762 с.
102. Пикуль В.В. Физически корректные модели материала упругих оболочек. // Механика твердого тела. – 1995. – № 2. – С. 103-108.
103. Пикуль В.В. Теория и расчет слоистых конструкций. – М.: Наука. 1985. – 182 с.
104. Пискунов С.О. Моделювання напружен-деформованого стану і повзучості просторових тіл обертання складної форми // Збірник наукових праць Севастопольського національного університету ядерної енергії і промисловості. – 2010. – №2(34). – С. 235-241.
105. Пискунов В.Г., Вериженко В.Е., Присяжнюк В.К. Неклассические модели линейной и нелинейной теории пологих слоистых оболочек // Труды международного конгресса ИАЧС. – Москва, 1985, т.1.– С.85-90.
106. Пискунов В.Г., Вериженко В.Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. – К.: Будівельник, 1986. – 176 с.

107. Пискунов В.Г., Рассказов А.А. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикладная механика. – 2002. – Т.38, № 2. – С.22-56.
108. Пискунов В.Г., Шваб'юк В.І. Контактна взаємодія циліндричної оболонки з жорстким кільцевим бандажем // Проблеми машиностроєння. – 1999. - Вып.1. – С. 12-16.
109. Плеханов А.В. Неклассическая теория деформирования ортотропных оболочек // Прикладная механика, 1997, т.33, № 4. – С. 62-66.
110. Плеханов А.В., Прусаков А.П. Об одном асимптотическом методе построения теории пластин средней толщины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. - № 3. – С. 84-90.
111. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Наука, 1984.– 400 с.
112. Подильчук Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1979. – 240 с.
113. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. – Киев, Одесса: Вища школа, 1982. – 168 с.
114. Попов Г.Я., Толкачев В.М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами // Известия АН СССР, МГТ, 1980, № 4. – С.192-206.
115. Поляков Н.А., Устинов Ю.А. Исследование асимптотического поведения решения задачи теории упругости вблизи сосредоточенной силы для замкнутой оболочки: Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин (Днепропетровск, 1969). – М.: Наука, 1970.

116. Присяжнюк В.К., Пискунов В.Г. Модель пологих оболочек и пластин из слоистых композитных материалов для решения задач статики, динамики и контактного взаимодействия // Механика композитных материалов. – 1987. – № 6. – С.1014-1021.
117. Прокопов В.К. Применение символического метода к выводу уравнений теории плит // Прикл. матем. и механика. – 1965. – Т.29, вып.5. – С.902-918.
118. Прочность материалов и конструкций / Ред.кол.: В.Т. Трощенко (отв. ред.) и др. – К.: Академперіодика, 2005. – 1088 с.
119. Прусаков А.П. Об анализе теорий изгиба трансверсально-изотропных пластин // Прикл. механика. – 1966. – Т.32, №7. – С. 69-75.
120. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1975. – 256 с.
121. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
122. Развитие контактных задач в СССР / Под ред. Галина Л.А. – М.: Наука, 1976. – 493 с.
123. Рассказов А.О., Бурыгина А.В. К уточнению сдвиговой теории слоистых пологих ортотропных оболочек // Прикл. механика. – 1988. – Т.24, № 4. – С.31-37.
124. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища школа, 1986. – 192 с.
125. Рейсснер Э.О. О некоторых вариационных теоремах теории упругости. – В кн.: Проблемы механики сплошной

среды (К 70-летию акад. Н.И. Мухелишвили) // – М.:АН СССР, 1961. – С. 228-239.

126. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1974. – 312 с.

127. Родионова В.А. Теория тонких анизотропных оболочек с учетом поперечных сдвигов и обжатия. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. – 116 с.

128. Ротко С.В. Стійкість вільно опертої композитної арки // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник. Вип.20. – Луцьк: РВВ ЛДТУ, 2007. – С.410-412.

129. Ротко С.В., Шваб'юк В.В. Аналітичний підхід до визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в циліндричних оболонках із поверхневими тріщинами // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник. – Вип.15. – Луцьк: РВВ ЛДТУ, 2004. – С.271-274.

130. Ротко С., Шваб'юк В. Метод розрахунку циліндричних оболонок середньої товщини з поверхневими тріщинами // Машинознавство. – 2006. – № 6. – С.12-15.

131. Ротко С.В. Уточнене моделювання напружено-деформованого стану циліндричних оболонок і стрижнів у розрахунках на стійкість та міцність // 8-й Міжнародний симпозиум українських інженерів-механіків у Львові. Тези доповідей. – Львів, 2007. – С.72.

132. Рябов А.Ф., Рассказов А.О. К задаче изгиба толстых неоднородных по толщине пластин // Прикл. механика, 1982. – Т.18.– С.55-59.

133. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наукова думка, 1968. – 887 с.

134. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наукова думка, 1988. – 620с.
135. Сало В.А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями. – Харьков: НТУ ”ХПИ”, 2003. – 216 с.
136. Сахаров А.С., Кислюкий В.И. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. Сахарова А.С. и Альтенбаха И. – Киев: Вища школа, 1982. – 479 с.
137. Сахаров А.С., Козак А.Я., Гондлях А.В., Мельников С.Л. Уточненная теория многослойных композитных оболочек в задачах статики и динамики // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1986. – Вып. 49. – С. 13-16.
138. Саченков А.В., Красновский И.Ю. Изгиб цилиндрических оболочек и плит учетом поперечной деформации // Известия вузов. Математика. – 1981. – №11. – С. 49-57.
139. Серенсен С.В., Зайцев Г.П. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – К.: Наукова думка, 1982. – 284 с.
140. Семенюк Н.П., Трач В.М. Устойчивость и начальное закритическое поведение анизотропных цилиндрических оболочек при внешнем давлении // Прикл. механика. – 2007. – Т.43, № 3. – С. 86-91.
141. Сипетов В.С., Туйметов Ш.Ш. Напряженно-деформированное состояние толстых ортотропных плит // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1988. – Вып. 53. – С. 67-71.
142. Сопротивление полимерных и композитных материалов. / Под ред. А.К. Малмейстера, В.П.Тамужа и

Г.А. Тетерса. – 3-е изд., перераб. и доп. – Рига : Зинатне. 1980. – 572 с.

143. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Пер. с англ. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 1016 с.

144. Сташук Н.Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. - К.: Наук. думка, 1993. – 359 с.

145. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями: Монографія. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.

146. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1969. – 276 с.

147. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 635с.

148. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971.

149. Улитко А.Ф., Моргунов М.А. Исследование контактных напряжений в тонкой упругой полосе при изгибе // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т.49, № 1. – С. 31-37.

150. Уляшина А.Н. Уравнения технической теории ортотропных оболочек с учетом сдвиговой и нормальной поперечных деформаций // Механика полимеров. – 1977. – № 2. – С.270-276.

151. Филоненко-Бородич М.М. Изгиб тонкого стержня по заданной кривой // Труды Моск.эл.-мех. ин-та инж. транспорта, 1949. В.58. – С. 3-10.

152. Хатчинс Г., Солер А. Приближенное решение задачи теории упругости оболочек вращения средней толщины // Труды Амер. об-ва инж.-механиков, серия E, Прикл. механика. – 1973. – № 4. – С. 129-136.
153. Хилл Л.Р., Кэжмак А.С., Марк Р. Горячая посадка на толстостенный цилиндр при наличии контактных усилий сдвига // Труды Амер. Об-ва инж.- механиков, с. E. Прикл. механика. – 1968. – Т. 35, вып.4. – С.117-124.
154. Хлебніков Д.Г., Паращак О.М. Контактна задача згину трансверсально-ізотропної пластини гладким штампом // Доп. АН УРСР, сер. А. – 1980. – № 1. – С. 54-58.
155. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. – К.: Наукова думка, 1986. – 170 с.
156. Хорошун Л.П., Бабич Д.В. Устойчивость цилиндрической оболочки из слоистого композитного материала с повреждающимися компонентами // Прикл. механика. – 2006. – Т.42, № 6. – С.80-89.
157. Чжен В., Финни Й. Определение коэффициентов интенсивности напряжений для несквозных продольных трещин в тонкостенных цилиндрах //Теорет. основы инж. расчетов. –1986. – № 2. – С. 1-6.
158. Чибиряков В.К. Уравнения напряженно-деформированного состояния толстых плит несимметричной структуры // Сопр. материалов и теория сооружений. – 1978. – Вып.32. - С.82-87.
159. Шалдырван В.А. Некоторые результаты и проблемы трехмерной теории пластин // Прикл. механика. – 2007. – Т.43, № 2. – С.45-69.

160. Шацький І.П. Закриття поздовжньої тріщини в пологій циліндричній оболонці під час її згину // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2005.- № 2.– С.45-48.
161. Шваб'юк В.И. Об одном варианте обобщенной теории трансверсально изотропных плит. // Прикл. механика. – 1974. – Т.10, № 11. – С.87-92.
162. Шваб'юк В.И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально изотропных плит. // Прикл. механика. – 1980. – Т.16, № 4.– С.71-77.
163. Шваб'юк В.І. Варіант узагальненої теорії непологих ортотропних оболонок. // Машинознавство. – 1998. – № 7. – С.2-8.
164. Шваб'юк В.І. Комплексне подання уточнених рівнянь згину ортотропних пластин з тріщинами. // Машинознавство. – 1999. – № 4. – С.51-55.
165. Шваб'юк В.І., Максимович В.М. Порівняльний аналіз точності неklasичних теорій згину пластин при локалізованих навантаженнях. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1999, вип. 2.
166. Шваб'юк В.І., Ротко С.В. Розрахунок ортотропної циліндричної оболонки в уточненій постановці. // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник. – Вип.11. – Луцьк: РВВ ЛДТУ. – 2002. – С.284-288.
167. Шваб'юк В.І., Маткова А.В. Стиск кільця, обмеженого жорсткими поверхнями. // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2000. – № 3 – С.118-120.
168. Шваб'юк В.І., Пастернак Я.М., Ротко С.В. Уточнений розв'язок задачі С.П. Тимошенка для ортотропної балки на жорсткій основі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – Львів. – 2010. – Т.46. – № 1.– С. 51-56.

169. Шваб'юк В.І., Пастернак Я.М., Гуда О.В. Циліндричний згин трансропної плити, послабленої тунельною тріщиною // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». – Вип.15, т.2. № 5. – 2011. – С.245-254.
170. Шваб'юк В.І., Ротко С.В. Визначення граничного навантаження для циліндричної оболонки з тріщиною // 6-й Міжн. симпозиум українських інженерів-механіків у Львові. Тези доповідей. – Львів, 2003. – С.48.
171. Шваб'юк В.І., Рассказов О.О. Методи розв'язування контактних задач стосовно некласичних моделей оболонок // Вісник Національного транспортного університету: В 2-х частинах: Ч. 1. – К.: НТУ, 2006. – В. 13. – С.306 -312.
172. Bozhydarnyk Viktor, Shvabyuk Vasyl, Pasternak Iaroslav, Svabyuk Volodymyr Crack Propagation in a Composite Laminated Plate under Bending. // Proceedings of the 4th International Conference on CRACK PATHS(CP 2012)Gaeta(Italy), 19-21 September, 2012.
173. Bozydarnik W., Sulym H., Szwabiuk W., Rotko S. Zagadnienie obliczania powlok kompozytowych o sredniej grubosci // III Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materialow i Konstrukcji. – Bialystok, 2005 – P. 43-46.
174. Dugdale D.S., Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Sol. – 1960. – № 8. – P. 100-108.
175. Irwin G.R. Analyses of stress and strein near the end of a crack transversing loads // J. of Appl. Mech. – 1957. – Vol.24, № 4. – P. 361-374.
176. Folias E.S. An axial crack in a pressurized cylindrical shell // Intern. J. Fract. Mech. – 1965. – Vol.1, № 2. – P. 104-113.

177. Griffith A.A. The phenomene of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. – 1921. – Vol.221, Ser.A. – P.163-198; The theory rupture // Appl. Mech. Delft.– 1924. – P. 53-63.
178. Hurlbrink E. Festigkeits – Berechnung von rohrenartigen Korpern, die unter ausserem Drucke stehen. Schiffbau/ – 1907-1908. – Bd. 9, № 14. – P. 517-523.
179. Keer L.M., Silva M.A.G. Bending of a cantilever brought gradually into contact with a cyllindrical supporting surfase // Int.J.Mech. Sci. Pergamon Press. 1970. – Vol.12, № 9. – P. 751-760.
180. Koiter W.T. Over de stabiliteit van het elastischevenwich Doct. Thesis. – Amsterdam. – 1945.
181. Naghdi P.M. On the theory of thin Elastic Shells // Quart. of Appl. Mathematics. – 1957. – Vol.14, № 4. – P. 369-380.
182. Petroski M.I., Achenbach J.D. Computation of the weight function from a stress intensity factors //Eng. Fract. Mech. – 1978.– 10, № 2.– P. 257- 266.
183. Orowan E.O. Energy criteria of fracture weld // J.Res. Suppl. – 1955. – Vol.34, № 6. – P.157- 160.
184. Raju I.S., Newman J.C. An empirical Stress-intensity factor equation for the surface crack / Ibid/ – 1981. – Vol. 15, № 1-2 – P. 185 – 192.
185. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates // J. Math. And Phys. – 1944. – Vol. 33, № 3. – P. 184-191.
186. Shvabyuk V., Pasternak Ia., Sulym H. Bending of Orthotropic Plate Containing a Crack Parallel to the Median Plane //Acta mechanica et automatica, vol.5, №4 – 2011. – P. 94–100.

187. Sih G.C. A review of the three-dimensional stress problem for a cracked plate. *Int. J. Fract. Mech.* – 1971. – Vol.7, № 2. – P. 39-61.
188. Sih G.C., Hartranft R.J. Variations of strain energy release rate with plate thickness. – *Int. J. Fract.*, 1973. – Vol. 9, № 1. – P. 75-82.
189. Sulym H., Rotko S., Szwabiuk V. Strength of composite ring damaged by a crack // *IV Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materialow i Konstrukcji.* – Bialystok, 2007. – P. 261-263.
190. Tan C.L. Fenner R.T. Stress intensity factors for semi – elliptical surface cracks in pressurized cylinders using the boundary integral equation method // *Int. J. of Fracture.* – 1980. – Vol.16, № 3. – P. 233 – 345.
191. Tooth A.S. An experimental investigation of shallow spherical domes subjected to a variety of load actions // *Symp. Nuclear Reactor Containment Buildings and Pressure Vessels.* – Glasgow, 1960. – P. 333-334.
192. Tracy P.G. Elastic analysis of radial of radial cracks emanating from the outer end inner surfaces of a circular ring // *Eng. Fract.Mech.* – 1979. –11, № 2. – P.291-300.
193. Wang N.M. Effects of plate thickness on the bending of an elastic plate containing a crack. – *J. Math. Phys.* – 1968. – Vol. 47. – P. 371-390.
194. Wells A.A. Critical tip opening displacement as fracture criterion // *Proc. Crack Propagation Symp.* – Cranfield, 1961. – Vol.1. – P. 210-221.

ЗМІСТ

	ПЕРЕДМОВА.....	3
РОЗДІЛ 1.	ОГЛЯД СУЧАСНИХ МОДЕЛЕЙ ТА МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН.....	7
1.1.	Методи побудови сучасних теорій оболонок і пластин та їх порівняльний аналіз.....	7
1.2.	Проблеми застосування неklasичних моделей оболонок і пластин за дії високоградієнтних навантажень і контактних взаємодій.....	23
1.3.	Особливості розрахунку стійкості ортотропних оболонок середньої товщини.....	33
1.4.	Дослідження напружено-деформованого стану оболонок і пластин з отворами та тріщинами.....	38
РОЗДІЛ 2.	ПОБУДОВА УТОЧНЕНОЇ МОДЕЛІ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ІЗ УРАХУВАННЯМ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ ТА ОБТИСНЕННЯ.....	49
2.1.	Основні співвідношення теорії пружності ортотропних оболонок.....	50
2.2.	Постановка задачі. Гіпотези для переміщень і деформацій.....	53
2.3.	Рівняння сумісності деформацій.....	61
2.4.	Варіаційний вивід рівнянь рівноваги і граничних умов для ортотропних оболонок.....	63
2.5.	Рівняння рівноваги ортотропної оболонки в узагальнених переміщеннях.....	68
2.6.	Згин ортотропної оболонки, шарнірно обпертої по контуру.....	74
РОЗДІЛ 3.	РОЗРАХУНКОВІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК.....	81
3.1.	Рівняння рівноваги. Вирази для зусиль і моментів.....	82

3.2.	Осесиметрична задача для замкнутої циліндричної оболонки.....	93
3.3.	Розрахунок трансверсально-ізотропної циліндричної панелі.....	98
РОЗДІЛ 4.	РОЗРАХУНОК ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК І КІЛЕЦЬ, ПОШКОДЖЕНИХ ТРИЩИНАМИ.....	105
4.1.	Визначення внутрішніх зусиль у шарнірно обпертій циліндричній оболонці з внутрішньою тріщиною.....	107
4.2.	Розрахунок циліндричної оболонки з поверхневою тріщиною.....	111
4.3.	Міцність композитного кільця, пошкодженого тріщиною.....	119
РОЗДІЛ 5.	ЗГИН ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК І КІЛЕЦЬ ЗА ДІЇ ЛОКАЛЬНИХ І КОНТАКТНИХ НАВАНТАЖЕНЬ.....	133
5.1.	Напружено-деформований стан оболонки за дії кільцевих зосереджених зусиль.....	133
5.2.	Контактна взаємодія циліндричної оболонки з жорстким бандажем із параболічною основою	141
5.3.	Контактна взаємодія циліндричної оболонки з жорстким кільцевим бандажем.....	157
5.4.	Контактна задача для кільця, обмеженого жорсткими плитами.....	171
РОЗДІЛ 6.	РОЗРАХУНОК НА СТІЙКІСТЬ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК І КРУГОВИХ КОМПОЗИТНИХ КІЛЕЦЬ.....	179
6.1.	Стійкість ортотропної циліндричної оболонки за осьового стиску.....	180
6.2.	Стійкість трансверсально-ізотропної оболонки від дії зовнішнього тиску.....	186
6.3.	Розрахунок на стійкість композитних кілець...	194
6.4.	Стійкість шарнірно обпертої кругової арки.....	197

РОЗДІЛ 7. ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ РІВНЯНЬ ПРИКЛАДНИХ ТЕОРІЙ ТА МЕТОДУ НЕОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ.....	201
7.1. Рівняння осесиметричної задачі теорії пружності для нескінченного порожнистого циліндра (оболонки).....	202
7.2. Розв'язок системи рівнянь теорії пружності для випадку кососиметричного навантаження..	205
7.2.1. Випадок ізотропного шару.....	206
7.2.2. Випадок циліндричної оболонки.....	211
7.3. Симетричне навантаження циліндричної оболонки.....	213
7.3.1. Симетрична задача для шару.....	217
7.3.2. Розв'язки задач для випадків гладко змінюваних навантажень.....	223
7.4. Аналіз точності розв'язків неklasичних теорій згину пластин за локалізованих навантажень...	226
ДОДАТКИ.....	235
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	238

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ШВАБ'ЮК Василь Іванович
РОТКО Світлана Володимирівна

**ЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ, МІЦНІСТЬ І
СТІЙКІСТЬ КОМПОЗИТНИХ ОБОЛОНОК
СЕРЕДНЬОЇ ТОВЩИНИ**

Монографія

Друкується в авторській редакції

Обкладинка М. Шульги

Підписано до друку 27.01.2015. Формат 60x84/16.
Папір офс. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 16,5. Обл.- вид. арк. 14,75.
Наклад 300 прим.

Редакційно-видавничий відділ
Луцького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомтелерадіо України ДК № 4123 від 28.07. 2011 р.

Видавець та виготовлювач:

