

**Р.В. Кірчук, І.М. Дударєв**

---

***МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАШИН***

**Навчальний посібник**

Луцьк 2014

УДК 631.3:519.876.5(075.8)

ББК: 22.18 я73

К 43

**Рецензенти:**

**Дідух В.Ф.**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедрою експлуатації та технічного сервісу машин імені професора О.Д. Семковича Львівського національного аграрного університету;

**Федосов С.А.**, доктор фізико-математичних наук, доцент, декан фізичного факультету Східноєвропейського національного університету ім. Лесі Українки

**Цизь І.Є.**, кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри Інженерного та комп'ютерного забезпечення АПК Луцького національного технічного університету.

**Кірчук Р.В., Дударев І.М.**

**К 43** Математичне моделювання машин: Навчальний посібник. – Луцьк:

Ред.-вид. відділ Луцького НТУ, 2014. – 134 с.

У навчальному посібнику наведено теоретичні основи створення математичних моделей машин, показано приклади розв'язування інженерних задач за допомогою системи комп'ютерної математики MathCAD, а також представлені рекомендована література.

Навчальний посібник призначений для студентів вищих навчальних закладів, що готують спеціалістів для сільськогосподарського виробництва. Може бути корисним викладачам, науковим співробітникам та аспірантам, які займаються питаннями математичного моделювання машин та інженерних задач.

*Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради  
Луцького національного технічного університету  
(протокол № від )*

УДК 631.3:519.876.5(07)

ББК: 22.18 я73

## **Вступ**

Вивчення технологій і робочих процесів сільськогосподарських машин, а також розробка нових машин, технічних ліній і складних сільськогосподарських комплексів та практичне використання методів їх оптимальної експлуатації вимагають від інженерних кадрів створення математичних моделей для аналізу і синтезу сучасних об'єктів, технологічних і виробничих процесів.

У даний час, коли розвиток механізації сільськогосподарського виробництва вимагає нових підходів і технічних рішень, спеціалісти в галузі механізації сільськогосподарського виробництва повинні опанувати сучасні методи і принципи моделювання сільськогосподарських машин.

Комплекс тісно пов'язаних організаційних, економічних, технологічних та інших засобів, їх глибоке вивчення в поєднанні з моделюванням сільськогосподарських процесів являє собою основу системного підходу до вирішення найбільш широких наукових і виробничих проблем.

Програма предмету "Математичне моделювання машин" передбачає глибокого засвоєння теорії методології і наукових методів та принципів створення математичних моделей в області механізації сільськогосподарського виробництва і розвитку творчого мислення студентів.

**Зміст**

Вступ .....	4
Тема №1. Математичне моделювання - метод дослідження сільськогосподарських машин.....	5
Тема №2. Класифікація математичних моделей.....	11
Тема №3. Програмні засоби для математичного моделювання сільськогосподарських машин.....	14
Тема №4. Застосування системи Mathcad при моделюванні сільськогосподарських машин.....	20
Тема №5. Роз'язок рівнянь засобами Mathcad .....	28
Тема №6. Символьні обчислення при моделюванні .....	32
Тема №7. Моделі функціонування сільськогосподарських машин .....	38
Тема №8. Застосування теорії випадкових функцій при моделюванні. Кореляційні функції і спектральні щільності.....	43
Тема №9. Визначення виду та параметрів емпіричних залежностей при обробці результатів експерименту.....	50
Тема №10. Математичний метод планування експерименту .....	58
Тема №11. Аналогове та статистичне моделювання .....	16
Тема №12. Застосування теорії розмірності при моделюванні сільськогосподарських машин .....	74
Тема №13. Застосування теорії подібності при моделюванні сільськогосподарських машин .....	81
Тема №14. Моделювання фізико-механічних та технологічних властивостей рослинних матеріалів .....	85
Тема №15. Математичні моделі на основі диференціальних рівнянь руху матеріальної частинки .....	91
Тема №16. Моделювання процесу витікання рідини з ємкостей сільськогосподарських агрегатів .....	100
Тема №17. Моделювання технологічних процесів сепарації сільськогосподарських матеріалів .....	107
Тема №18. Математичне моделювання технологічних процесів сільськогосподарського виробництва .....	115
Тема №19. Приклади створення математичних моделей сільськогосподарських машин .....	126

**Тема № 1**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ - МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ  
СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН**

*§1 Поняття математичної моделі*

Однією з основних умов підвищення рівня механізації і автоматизації процесів сільськогосподарського виробництва є створення машин на базі вдосконалення існуючих і розробка нових, більш досконалих конструкцій машин і машинних агрегатів. Для успішного вирішення цих задач необхідно володіти виробничими вимогами до машин, а також експериментально і теоретично обґрунтованими методами їх побудови, тобто методами аналізу і синтезу параметрів машин і машинних агрегатів.

Оскільки сільськогосподарські машини і машинні агрегати являються в основному механічними системами і функціонують вони у відповідності із законами механіки, то теоретичними методами, на базі яких можна розв'язати вказані задачі, являються закони і принципи механіки. Мета при цьому полягає перш за все у тому, щоб поведінку (функціонування) машин або машинних агрегатів описати за допомогою певних математичних співвідношень, що виражають залежність між конструктивними параметрами машин, прикладених до них збудовуючи впливів на вході і відповідними реакціями машин на їх виходах.

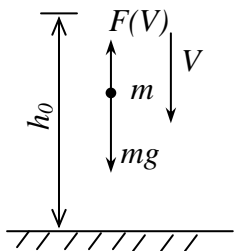
Так як реальні сільськогосподарські машини і машинні агрегати, і взагалі технічні об'єкти, складні і тому їх поведінка важко піддається точному математичному опису, то описуються не самі реальні об'єкти, а деякі їх моделі. При цьому повинна бути задоволена така умова: поведінка (функціонування) моделі повинно з достатньою для практичних цілей ступінню точності імітувати поведінку реальної системи, тобто складені рівняння повинні описувати поведінку такої моделі, яка б відображала основні риси поведінки реального об'єкта.

Математичне моделювання – це вивчення поведінки об'єкта за тих або інших умов шляхом складання та розв'язання рівнянь його математичної моделі. Характерною особливістю такого моделювання є можливість застосування до окремих елементів досліджуваної системи, якою є сільськогосподарська машина. Іншими словами, математичне моделювання – це опис поведінки фізичного об'єкта чи процесу за допомогою математичних рівнянь в рамках допустимих похибок.

Введемо поняття математичної моделі. Математична модель – це специфічний інформаційний об'єкт у вигляді системи математичних співвідношень. Останні являють собою наближений формальний опис

властивостей, характеристик і зв'язків об'єкта-оригінала довільної природи, які є істотними для розглядуваної задачі.

Наприклад: Нехай в початковий момент часу  $t=0$  тіло, що знаходиться на висоті  $h_0$ , починає рухатись вниз з початковою швидкістю  $V_0$ . Необхідно встановити закон руху тіла, тобто побудувати математичну модель, котра б дозволила визначити параметри руху у будь-який момент часу.



$$h = h_0 - V_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

$$V = V_0 - gt. \quad (2)$$

Рис. 1.1 Розрахункова схема моделі руху тіла

Якщо врахувати силу опору повітря (середовища), що діє на тіло масою  $m$  то:

$$m \frac{dV}{dt} = mg - F(V), \quad (3)$$

$$\frac{dh}{dt} = -V. \quad (4)$$

При початкових умовах

$$V|_{t=0} = V_0; \quad h|_{t=0} = h_0 \quad (5)$$

Рівняння (3), (4), (5) є математичною моделлю для задачі руху тіла в атмосфері.

### *§2 Загальна схема побудови математичних моделей*

Першим кроком у процесі побудови математичної моделі є чітке формулювання завдання дослідження. Цей крок базується на змістовному аналізі проблемної ситуації, збиранні та осмисленні всіх даних, які мають відношення до завдання.

Власне моделювання починається з визначення меж об'єкта, який підлягає вивченню, або, як кажуть, з відокремлення об'єкта із зовнішнього середовища. При цьому визначаються всі вхідні та вихідні впливи (зв'язки).

Якщо модульований об'єкт є матеріальною системою (машина), то його зв'язки теж матеріальні: сили різної природи, просторові переміщення, потоки речовини, енергії, а в деяких випадках також інформації.

Переважає більшість реальних об'єктів, стан яких характеризується такими фізичними величинами як температура, тиск, просторові координати, швидкість, прискорення тощо, має безперервні вихідні змінні (параметри). У процесі математичного опису таких об'єктів використовується головним чином апарат диференціальних рівнянь.

Якщо реальні об'єкти дискретні, то їх вихідні змінні можуть набувати деяку скінчену кількість відомих значень. Для опису таких об'єктів використовують апарат математичної логіки.

У процесі моделювання потрібно враховувати просторову протяжність об'єкта. Якщо нею можна знехтувати і вважати, що незалежною змінною, характерною для об'єкта, є тільки час, то можна говорити про об'єкт із зосередженими параметрами. До числа таких об'єктів, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, належить переважна більшість механізмів, машин, а також інші об'єкти, в яких відстань між окремими частинами не впливає (або вважається, що не впливає) на досліджувані властивості та характеристики.

У просторово протяжних об'єктах (гази, рідини, тверді тіла, що деформуються) потрібно враховувати залежність характеристик від координат. Вони описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними. З математичної точки зору такі об'єкти з розподіленими параметрами є одно- та багатовимірними полями (швидкостей, температур, переміщень), які існують у просторі та часі.

Досить істотним є поділ описуваних об'єктів на лінійні та нелінійні. Відмінність між ними полягає в тому, що для перших справджується принцип суперпозиції (накладання), коли кожний з виходів об'єкта характеризується лінійною залежністю від відповідних вхідних змінних.

Якщо математичний опис не містить як змінну час, то така модель називається стаціонарною.

### *§3 Ідеалізація реального об'єкта в ході побудови математичної моделі*

Побудова ідеалізованих математичних моделей складних механічних систем, як машин або їх робочих органів, є досить складною задачею. Існує три шляхи подолання цих труднощів:

- поділ складної системи на сукупність більш простих систем (декомпозиція);

- перехід до нової ідеалізації, наприклад від системи з розподіленими параметрами до системи із зосередженими;
- скорочення числа змінних (входів і виходів), наприклад за рахунок використання безрозмірних комплексів;  
До цього можна додати ряд прийомів, які застосовуються на практиці, а саме:
- зниження розмірності задачі (від тривимірної до дво- та одно- вимірної);
- використання властивості детермінованості замість стохастичності;
- заміна змінних константами;
- усереднення властивостей за об'ємом (ідеальне переміщення) і за напрямом (гіпотеза плоских перерізів);
- використання лінійних залежностей замість нелінійних (лінеаризація).

#### *§4 Модульний принцип побудови математичної моделі*

Згідно модульного принципу побудови моделі загальний задум моделі рекомендується зображати у вигляді логічної блок-схеми, яка містить сукупність стандартних блок-модулів, що реалізують певну процедуру або функцію. Після складання блок-схеми визначають вірогідність моделі. А саме встановлюють чи дає змогу задум моделі розв'язувати поставлену задачу; чи точно він відбивається у блок-схемі; чи є повною запропонована блок-схема і чи притаманна їй потрібна послідовність; чи виконується використовувані математичні залежності. Отримавши задовільні відповіді, переходять до програмування моделі на ЕОМ, в результаті якого отримують модулюючий алгоритм.

Звичайно побудова моделі не є одноразовим актом, а процесом послідовних наближень (ітерацій), в основі якого лежить самонавчання дослідника. При цьому висувається (або відкидається) ряд гіпотез, пропозицій і припущень. Такий ітеративний характер побудови моделі виявляється у наявності зворотних зв'язків на його блок-схемі. Треба прагнути, щоб ітерації були найкоротшими. У цьому і полягає головна вимога до раціонального плану конкретного модельного дослідження сільськогосподарських агрегатів.



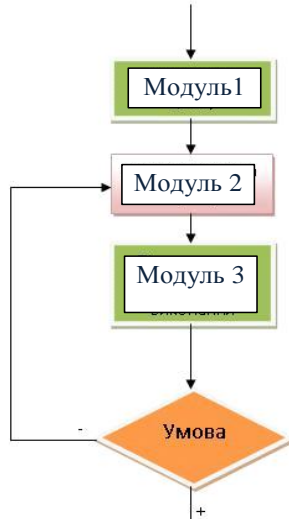


Рис.1.2. Модульний принцип побудови математичної моделі

### §5 *Форми представлення моделі*

- інваріантна – запис співвідношень моделі за допомогою традиційної мови математики без відношення до методу розв’язку рівнянь моделі;
- аналітична – запис моделі у вигляді результату аналітичного розв’язку вихідних рівнянь моделі;
- алгоритмічна – запис співвідношень моделі і вибраного числового методу розв’язку у формі алгоритму;
- схемна (графічна) – представлення моделі на деякій графічній мові (наприклад мова графів, еквівалентних схем, діаграм і ін.);
- фізична
- аналогова

Найбільш універсальним є математичний опис процесів – математичне моделювання. Сюди ж включається і процес розв’язку задачі на ЕОМ.

### §6 *Вимоги до математичної моделі*

Основними вимогами, що пред’являються до математичних моделей, є вимоги адекватності, універсальності і економічності.

Адекватність. Модель вважається адекватною, якщо відображає задані властивості з допустимою точністю. Точність визначається як ступінь співпадання значень вихідних параметрів моделі і об'єкта. Точність моделі різна у різних умовах функціонування об'єкта. Ці умови характеризуються зовнішніми параметрами. Визначення області адекватності моделей – складна процедура, що вимагає великих обчислювальних затрат, які швидко зростають із збільшенням розмірності простору зовнішніх параметрів.

Універсальність – визначається в основному числом врахованих у моделі зовнішніх і вихідних параметрів.

Економічність моделі характеризується затратами обчислювальних ресурсів для її реалізації – затратами машинного часу і апаратних засобів ЕОМ.

При побудові математичної моделі від дослідника вимагається:

- вивчити властивості досліджуваного об'єкту;
- вміння відділити головні властивості об'єкта від другорядних;
- оцінити прийнятні припущення.

#### *§7 Переваги математичної моделі перед експериментом*

- припускає більш широкі дослідження за рахунок реалізації великої кількості варіантів і визначення великої кількості показників;
- дає інформацію про майбутню поведінку об'єкта (прогноз), у той самий час як експеримент дає змогу зібрати певні дані лише про теперішнє та минуле об'єкта;
- служить отриманню додаткових знань про об'єкт, які не могли бути отримані в експерименті;
- може бути використана для вивчення об'єктів з подібним математичним описом.

Таким чином, математичні моделі сільськогосподарських машин, особливо з використанням сучасної обчислювальної техніки, є потужним інструментом дослідження, проектування та оптимізації технологічних процесів і параметрів сільськогосподарських машин.

#### **Контрольні запитання**

1. Охарактеризувати поняття математичної моделі.
2. Що таке математичне моделювання?
3. Модульний принцип побудови моделей.
4. Які є форми представлення результатів моделювання?
5. Охарактеризувати вимоги до математичних моделей

Тема № 2

КЛАСИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

*§1 Загальна класифікація моделей сільськогосподарських машин*

У загальному випадку всі математичні моделі технологічних процесів машин поділяються на аналітичні, побудовані теоретичними методами, та емпіричні, отримані за результатами обробки експериментальних даних. Побудова аналітичних моделей базується на загальних законах природи: збереження матерії та енергії; співвідношеннях між технічними характеристиками; рівняннях, які описують фізичні властивості. Ці моделі звичайно утворюють системи рівнянь або нерівностей і можуть містити диференціальні та інтегральні оператори, які описують динаміку зміни станів моделі за часом, тобто її функціональний стан.

Аналітичні моделі якісно правильно характеризують поведінку реального об'єкта навіть за недостатньої точності, зумовленої прийняттям необхідних гіпотез і припущень. Це дає змогу прогнозувати функціонування об'єкта за різних умов, що й є основною перевагою таких моделей.

Експериментальні методи отримання математичних моделей відіграють домінуючу роль тоді, коли досліджуваний процес мало вивчений або надто складний для того, щоб можна було отримати його теоретичний опис, наприклад під час оцінки силових і якісних характеристик процесу механічної обробки ґрунту. Як правило, емпіричні моделі, складені на основі обробки результатів експерименту, є статистичними. Головна їх перевага - простота отримання. Проте ці моделі мають обмежене застосування, зумовлене областю експерименту, і можуть бути складені лише за наявності реального об'єкта.

Емпіричні моделі можуть бути трьох типів: регресійні, імовірнісні та імітаційні. Для побудови моделей першого типу використовується регресійний аналіз, за допомогою якого оцінюються кількісні зв'язки між детермінованими скалярними змінними зовнішніх впливів (факторами) та вихідною змінною (параметром оптимізації), які не залежать від часу. Шукані зв'язки задовільно описуються поліномами першого та другого порядку. Ефективним інструментом отримання регресійних моделей є теорія планування експерименту.

Імовірнісні (або стохастичні) моделі містять випадкові параметри, тому результатом розрахунку за такою моделлю в або ймовірність настання певної події, або статистична оцінка деяких випадкових величин, які змінюються в часі, у вигляді так званих динамічних характеристик. Область основного застосування імовірнісних моделей - опис об'єктів за умов невизначеності, тобто за відсутності деяких відомостей про умови їх функціонування.

Імітаційне моделювання полягає в багаторазовому відтворенні функціонування досліджуваної складної системи на основі аналізу математичної моделі. Результати імітаційного моделювання є вибірками випадкових величин, які характеризують поведінку досліджуваної системи. Це моделювання як статистичний (ігровий) експеримент відрізняється від звичайного лабораторного експерименту тим, що його повністю можна виконати на ЕОМ.

Більшість розроблених до теперішнього часу моделей призначена для опису технологічних процесів машин. Це так звані описові моделі. Якщо треба керувати процесами (приймати ті або інші рішення), переходять до оптимізаційних моделей, які дають змогу визначити найкращі в розумінні прийнятого критерію якості параметри машини.

До недоліків математичних моделей слід віднести те, що вони абстрактні. Математичні моделі можна класифікувати по ряду ознак. Одна з класифікацій за характером параметра, змінної і увазі залежності наведена на рис. 2.1. Детермінованими називають такі моделі, в яких значення параметра і змінних величин передбачаються заданими і достовірними при жорстких зв'язках. Стохастичні моделі – описують випадкові процеси, тобто процеси, що протікають під дією випадкових факторів (задачі теорії ймовірності – імовірнісні закони, теорія масового обслуговування).

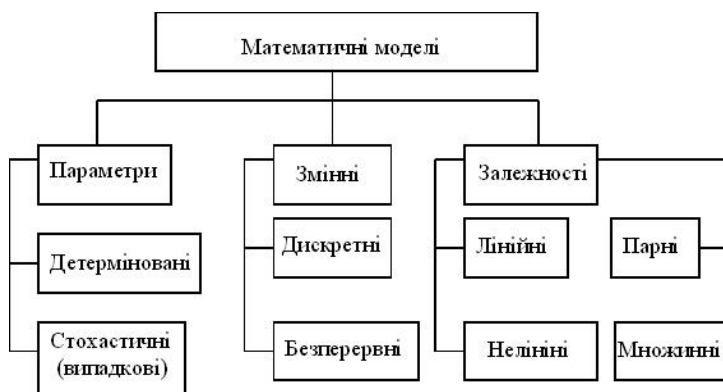


Рис 2.1 – Класифікація математичних моделей

§2 Типи математичних моделей сільськогосподарських машин

При більш широкій інтерпретації поняття моделі розрізняють їх три види – фізичні, розрахункові і математичні. При цьому під фізичними розуміють по можливості повний опис явищ і процесів у відповідності х їх фізичною природою. Розрахункова відрізняється від фізичної тим, що в ній не враховуються фактори, які не справляють суттєвий вплив на хід процесів. Це дає можливість для опису використовувати формальні методи сучасної математики і обчислювальної техніки, наприклад, описати функціонування машини або машинного агрегату за допомогою системи диференціальних рівнянь.

Під математичною моделлю процесу в цілому розуміють у цьому випадку, рівняння і інші співвідношення, що складають зміст розрахункової моделі, а також і алгоритми, програми для ЕОМ, складені на основі розрахункових моделей.

Фізичне моделювання сільськогосподарських машин і їх робочих процесів у різних різновидах почали застосовувати значно раніше, ніж математичне моделювання, це можна пояснити тим, що аналітичні методи розрахунку цих машин і процесів, що мають місце при їх роботі, дуже складні. Багато уваги питанням фізичного моделювання приділяв академік В.П.Горячкін.

З розвитком ЕОМ більш широке застосування знайшло математичне моделювання і його різновидності.

Крім того можна виділити наступні типи моделей:

- емпіричні (будуються на основі дослідних даних з наступною обробкою отриманих результатів);
- функціональні або механістичні ( тобто з намаганням дати пояснення описуваному явищу чи процесу  $i$ -го рівня за рахунок відомих параметрів  $i-1$  рівня);
- статичні (така математична конструкція, що не містить часу  $t$ );
- динамічні ( фігурує  $t$  в явному вигляді, або у вигляді диференціального рівняння  $\frac{dy}{dt} = f$  );
- детерміністичні (результат моделювання формується у вигляді числа);
- стохастичні (присутні одна, або декілька випадкових змінних, що задані відповідними законами розподілення).

**Контрольні запитання**

1. Охарактеризувати загальну класифікацію математичних моделей СГМ.
2. Що таке аналітичне моделювання?
3. Які є моделі, що отримані експериментальним шляхом.
4. Дати характеристику типам математичних моделей СГМ?
5. Охарактеризувати статичні та динамічні моделі.

**Тема № 3**

**ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ  
СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН**

*1 Загальні відомості*

Формалізація задачі і застосування числових методів при моделюванні сільськогосподарських машин дозволяє використовувати добре вивчені прийоми розв'язку і стандартне (універсальне) математичне забезпечення ЕОМ. Застосування ЕОМ підвищує ефективність наукових досліджень, дозволяє проводити моделювання складних об'єктів і явищ.

Математичне моделювання у цьому випадку включає наступні кроки:

1. вибір розрахункової схеми і встановлення необхідної деталізації;
2. математичний опис (складання системи рівнянь);
3. вибір методу розв'язку;
4. перетворення моделі, що містить рівняння, метод, вихідні дані і початкові умови, до вигляду, зручного для розв'язку на ЕОМ;
5. складання програми для ЕОМ;
6. проведення розрахунків (моделювання);
7. при необхідності повторити кроки 3-6;
8. аналіз результатів;
9. при необхідності повторити кроки 1-8;
10. оформлення звіту (опис, схеми, рисунки, графіки, формули);
11. при необхідності повторити кроки 1-10, 3-10, 8-10.

Розвиток ЕОМ і програмного забезпечення приводить до прискорення і полегшення виконання кожного кроку моделювання. До недавнього часу переважав традиційний підхід, що був відпрацьований на "великих" ЕОМ. При цьому кожен етап був ізольований від інших і розрахований на роботу спеціалізованої групи. Так постановкою задачі займалися "постановники", розробляли методи розв'язку і програмували математики і програмісти, обробкою на ЕОМ і побудовою графіків займалися оператори і т.д. Велика

кількість часу (людського і машинного) було необхідно на від лагодження програми. Розв'язок на ЕОМ в основному проводився в пакетному режимі. Тобто закладали пакет вхідних даних (на перфокартах, магнітних стрічках, дискетах) і отримували вихідні дані (в основному на папері або на магнітному носії).

Збільшення швидкодії ЕОМ і розвиток графічного інтерфейсу дозволило отримувати і відображати у графічному вигляді результати, що значно скоротило об'єм проміжних роздруківок і паперових звітів. На кроці 3 широко використовуються стандартні пакети прикладних програм, для яких є обґрунтовані і контрольні приклади. Модульний склад пакету дозволяє наробляти набір методів розв'язку ряду моделей для певного класу задач.

При системному підході до моделювання повинен розглядатись весь комплекс питань: планування, проведення і обробка результатів обчислювального експерименту.

Важливою задачею є обробка результатів обчислень. На цьому етапі використовуються методи, що добре зарекомендували себе при експериментах з реальним об'єктами. У цьому випадку результати, отримані на математичних моделях, можуть бути порівняні із натуральним експериментом.

Перші персональні комп'ютери в основному полегшували етап оформлення результатів моделювання (крок 10). Тут використовувались текстові редактори, графічні редактори, програми побудови графіків. Напевно немає сенсу перераховувати ті редактори, які свого часу використовувались для оформлення науково-технічних звітів. Однак заслуговує на увагу текстовий редактор Лексикон, графічний GRAPHER і ін. Сучасні пакети підготовки друкованої продукції включають засоби оформлення тексту, підготовки математичних формул, графіків, схем, таблиць. Сучасні технології дозволяють підготувати документ, що включає як об'єкт документи інших типів або посилання на інші документи і програми обробки.

Найбільшого застосування (по кількості) в задачах моделювання набули персональні комп'ютери. Спочатку широке їх застосування визначалось не їх швидкістю, а можливістю гармонійно налаштувати робоче місце дослідника, організувати передачу даних між задачами, отримати завершений звіт.

Розглянемо програмне забезпечення персональних комп'ютерів. Що використовується на різних етапах математичного моделювання. Останнім часом у розвитку програмного забезпечення для персональних ЕОМ відслідковується тенденція використання інтегрованих пакетів, що включають спеціалізовані програми і програми підготовки звітів.

### *§2 Пакет MATLAB*

Модульний підхід до моделювання відслідковується і у сучасних пакетах. Одним з них є MATLAB фірми "The Math Works Inc" (USA), який по суті перемістився з "великих" машин на персональні. Система MATLAB призначена для виконання інженерних та наукових розрахунків і високоякісної візуалізації отриманих результатів. Ця система застосовується в математиці, обчислювальному експерименті, імітаційному моделюванні.

В пакет входить багато добре перевірених числових методів, оператори графічного представлення результатів, засоби створення діалогів. Характерною особливістю MATLAB у порівнянні із звичайними мовами програмування є матричне представлення даних і великі можливості матричних операцій над ними. Використовуючи пакет MATLAB можна як з кубиків побудувати досить складну математичну модель, або написати свою програму. Можливо також використовуючи технологію візуального моделювання скласти імітаційну модель або систему автоматичного регулювання.

Гнучка мова MATLAB дає можливість інженерам і вченим легко реалізувати свої ідеї. Потужні числові методи і графічні можливості дозволяють перевіряти здогадки і нові ідеї, а інтегроване середовище дає можливість швидко отримувати практичні результати.



Рис.3.1. Символіка пакету MATLAB

Сьогодні MATLAB використовується в багатьох областях, серед яких обробка сигналів і зображень, проектування систем управління, фінансові розрахунки і ін. Його відкрита архітектура дає можливість використовувати MATLAB разом із супутніми програмами для дослідження даних. І створення власних інструментів, що використовують функціональні можливості MATLAB. Для прикладу – підсистема Simulink – це інтерактивне середовище для моделювання і аналізу широкого класу динамічних систем. Завдяки тісній інтеграції з MATLAB, Simulink має безпосередній доступ до широкого діапазону засобів проектування і аналізу. Традиційний підхід до проектування систем як правило полягає у створенні прототипу, за яким



слідують все стороннє тестування та внесення відповідних змін. Ефективною і загальноприйнятною альтернативою є імітаційне моделювання. Simulink – потужний інструмент для моделювання, що забезпечує швидку побудову і тестування віртуальних прототипів, і дає можливість доступу до будь-якого рівня деталізації проекту з мінімальними зусиллями. Використовуючи Simulink інженер може швидко і ефективно розробляти проект.

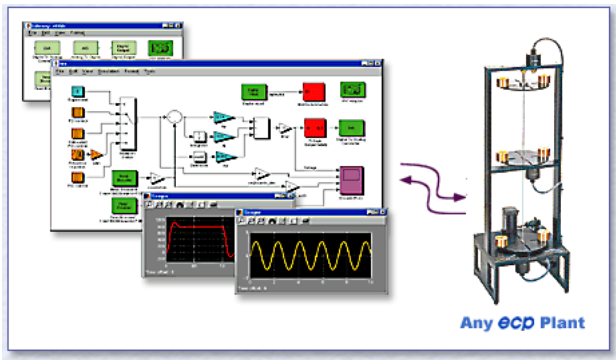


Рис.3.2 Приклад роботи модуля Simulink

### §3 Пакет MATHCAD

Інша сторона розвитку програмного забезпечення – орієнтація на ”не програмуючого користувача”. У цьому випадку користувач такого пакету отримує можливість зосередитись на суті самої задачі, а не способах її програмування і програмної реалізації. В свою чергу користувач повинен чітко уявляти можливості використовуваного пакету і закладених у ньому методів, а також вміти вибрати необхідний пакет, що відповідає даній задачі.

Всі етапи створення і використання математичної моделі легко відслідкувати при роботі з пакетом MATHCAD фірми ”MathSoft Inc.” (USA).

MATHCAD – універсальний математичний пакет, призначений для виконання інженерних і наукових розрахунків. Математичне забезпечення пакету дозволяє розв’язувати багато задач в об’ємі інженерного вузу.

Розробники пакету вдосконалюють пакет від версії до версії. В даний час існують версії MATHCAD 2000 та MATHCAD 2001, що володіють великими можливостями. Існують оригінальна (англомовна) та русифікована версії пакету.

Що відрізняє пакет MATHCAD від калькулятора: обчислення з довільною точністю, робота з різними типами даних (комплексні. Вектори, матриці), використання бібліотеки математичних функцій. Основна перевага

паketу перед типовими мовами програмування – природній математичний інтерфейс (мова), на якому формулюється задача. Пакет об'єднує в собі : редактор формул, інтерпретатор для обчислень, бібліотеку математичних функцій, процесор символічних перетворень, текстовий редактор, графічні засоби представлення результатів. Пакет MATHCAD відноситься до інтегрованих пакетів, тобто дозволяє не тільки провести обчислення, але й отримати документ – кінцевий звіт з коментарями, формулами, таблицями і графіками. На відміну від видавничих систем формули MATHCAD працюючі.

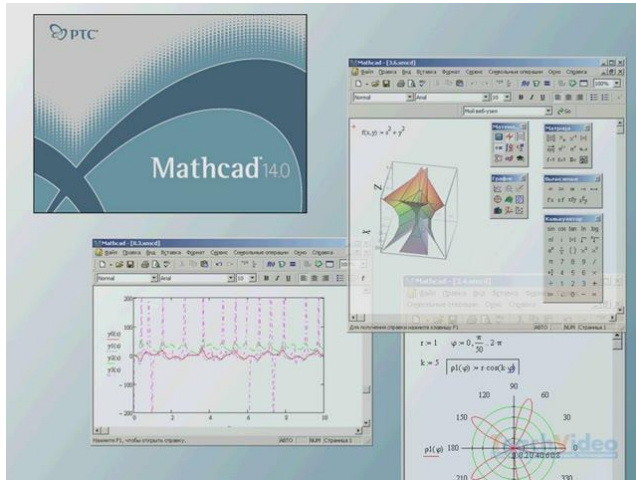


Рис.3.3 Символіка та інтерфейс пакету MATHCAD

До позитивних якостей MATHCAD можна віднести відкритість – все наведене в документі може бути виконано, а інтеграція в одному документі вихідних документів, методу розрахунку і результатів дозволяє зберегти на лаштування для розв'язку подібних задач.

Який з пакетів вибрати ? У кожного з них є свої переваги і недоліки. Найкращий вихід – ознайомитись з можливостями кожного, щоб у подальшому уміло інтегрувати їх при розв'язку різних задач.

Ще однією розробкою фірми MathSoft є S-PLUS 2000 – нова версія популярної статистичної програми.

§4 Пакет STATISTICA

В багатьох природничих галузях науки статистичні методи були і лишаються важливою складовою частиною процедури обробки результатів вимірювань. Це стосується фактично усіх галузей знань і математичного моделювання зокрема. Сучасні програми для статистичної обробки даних дозволяють застосовувати складні сучасні методи аналізу навіть у тих областях, де раніше такі дослідження були надзвичайно трудомісткими і, як наслідок, проводились досить рідко.

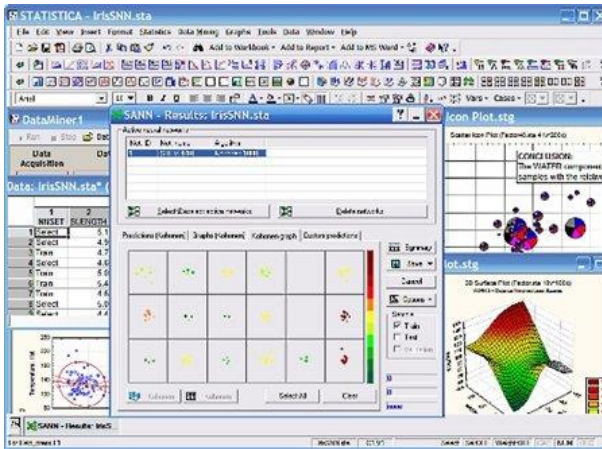


Рис.3.4 Інтерфейс пакету STATISTICA

Методи математичної статистики вивчаються у вузі, а курс математичної статистики входить в програму більшості вищих навчальних закладів, і невід’ємною частиною стає освоєння відповідного програмного забезпечення. Система STATISTICA може служити не тільки ефективним інструментом для наукових досліджень, а і надзвичайно зручним середовищем для навчання методам статистичного аналізу.

Приклади програм курсу статистики можна знайти в Інтернеті на web-сторінках відповідних навчальних закладах.

Інші продукти фірми StatSoft:

STATISTICA 5.5 – потужний пакет статистичного і графічного аналізу даних. Quick STATISTICA – базовий набір статистичних методів, які найчастіше використовуються, та плюс усі графічні можливості системи STATISTICA і плюс мови програмування.

Pawer analysis – програма для аналізу необхідних умов отримання надійних статистичних результатів.

Neural Networks – універсальна програма для проведення аналізу даних.

Student Edition of STATISTICA – коротка версія STATISTICA для студентів.

MINITAB – зручний програмний продукт для статистичного аналізу.

### *§5 Інші математичні пакети*

Усе різноманіття математичних пакетів не обмежується переписаними вище системами. Ще можна виділити:

MAPLE V – система символічних перетворень (інколи входить складовою частиною в MATHCAD).

MATHEMATICA – потужна система аналітичного розв'язку.

Графічні пакети:

Графічні пакети призначені для візуалізації результатів обрахунку. В якості найбільш поширених відомі наступні продукти компанії Golden Sostware:

Surfer 7.0 – для побудови просторових поверхонь, ліній рівня і карт;

Grapher 2 – для побудови двомірних графіків;

Map Viewer 3.0;

Didger 2.0.

### **Контрольні запитання**

1. Охарактеризувати загальну схему моделювання із використанням EOM.
2. Дати характеристику пакету MATLAB.
3. Основи роботи із пакетом *MATHCAD*.
4. Дати характеристику пакету *STATISTICA*?
5. Для чого використовуються графічні пакети.

### **Тема № 4**

## **ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ MATHCAD ПРИ МОДЕЛЮВАННІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН**

### *§1 Загальні відомості*

Вивчення технологій і робочих процесів сільськогосподарських машин, а також розробка нових машин, технічних ліній і складних сільськогосподарських комплексів та практичне використання методів їх оптимальної експлуатації вимагають від інженерних кадрів створення

математичних моделей для аналізу і синтезу сучасних об'єктів, технологічних і виробничих процесів.

У даний час, коли розвиток механізації сільськогосподарського виробництва вимагає нових підходів і технічних рішень, спеціалісти в галузі механізації сільськогосподарського виробництва повинні опанувати сучасні методи і принципи моделювання сільськогосподарських машин.

Комплекс тісно пов'язаних організаційних, економічних, технологічних та інших засобів, їх глибоке вивчення в поєднанні з моделюванням сільськогосподарських процесів являє собою основу системного підходу до вирішення найбільш широких наукових і виробничих проблем.

Програма предмету "Математичне моделювання сільськогосподарських машин" передбачає практичні заняття з метою більш глибокого засвоєння теорії методології і наукових методів та принципів створення математичних моделей в області механізації сільськогосподарського виробництва і розвитку творчого мислення студентів.

Мета курсу – навчитись користуватись найпростішими методами обчислень з використанням сучасних інформаційних технологій. Найкраще підходить для цієї мети одна з найбільш потужних і ефективних математичних систем – MATHCAD, яка займає особливе місце серед багатьох систем таких як Matlab, Maple, Mathematica і ін.

MathCad – потужне і водночас просте середовище для розв'язку задач у різноманітних галузях науки і техніки. MathCad лишається єдиною системою у якій опис розв'язку математичних задач задається за допомогою звичних математичних формул і знаків. MathCad дозволяє виконувати як числові так і аналітичні (символьні) обчислення, має надзвичайно зручний математико-орієнтований інтерфейс і хороші засоби графіки.

Система MathCad існує у декількох основних варіантах:

- MathCad Standart – система для технічних обчислень. Призначена для масової аудиторії і широкого використання в учбовому процесі;
- MathCad Professional – промисловий стандарт прикладного використання математики в технічних програмах. Орієнтована на математиків і наукових працівників, що виконують складні і трудомікі обрахунки;
- MathCad Professional Academic – пакет програм для професійного використання математичного апарату з електронними посібниками і ресурсами.

## §2 Основи роботи з MATHCAD

MathCAD працює з *документами*. З точки зору користувача, документ – це чистий лист паперу, на якому можна розміщувати блоки трьох основних типів: математичні вирази, текстові фрагменти і графічні області.

Розміщення нетекстових блоків в документі має принципове значення – *зліва направо і зверху вниз*.

### Математичні вирази

До основних елементів математичних виразів MathCAD відносяться *типи даних, оператори, функції і керуючі структури*.

### Оператори

*Оператори* – елементи MathCAD, за допомогою яких можна створювати математичні вирази. До них, наприклад, відносяться символи арифметичних операцій, знаки обчислення сум, добутків, похідної та інтегралу і т.д.

Оператор визначає:

1. дію, яка повинна виконатись при наявності тих чи інших значень операндів;
2. скільки, де і які операнди повинні бути введені в оператор.

*Операнд* – число або вираз, на яке діє оператор. Наприклад, у виразі  $5!+3$  число  $3$  і вираз  $5!$  – операнди оператора  $+$  (плюс), а число  $5$  операнд оператора факторіал ( $!$ ). Після вказування операндів оператори стають блоками, які виконуються, в документі. В Додатку1 наведено список операторів, які найбільш часто використовуються.

### Типи даних

До *типів даних* відносяться числові константи. Звичайні і символні змінні, масиви (вектори і матриці) і дані файлового типу.

*Константами* називають найменовані об'єкти, що містять деяке значення і яке не може бути зміненим. *Змінними* являються найменовані об'єкти, що мають деяке значення, яке може змінюватись по ходу виконання програми. Тип змінної визначається її значенням. Змінні можуть бути числовими, стрічковими, символними та ін. Імена констант, змінних і інших об'єктів називають *ідентифікаторами*. Ідентифікатори в MathCAD являють собою набір латинських та грецьких букв і цифр.

В системі MathCAD існує невелика група особливих об'єктів, які не можна віднести ні до класу констант, ні до класу змінних, значення яких визначені відразу після запуску програми. Їх правильно вважати *системними змінними*, що мають встановлені системою початкові значення (див.

Додаток2). Змінити значення системних змінних можна у вкладці **Переменные** діалогового вікна **Math Options** команди **Математика**⇒**Параметры**.

Звичайні змінні відрізняються від системних тим, що вони повинні бути попередньо визначені користувачем, тобто їм необхідно хоча б один раз присвоїти значення. В якості *оператора присвоювання* використовується знак  $:=$ , тоді як знак  $=$  відведений для виведення значення константи або ж змінної.

Якщо змінній присвоюється початкове значення за допомогою оператора  $:=$ , що виконується шляхом натискування клавіши **:** (двокрапка) на клавіатурі, то таке присвоєння називається *локальним*. До цього присвоєння змінна невизначена і її не можна використовувати. Однак за допомогою знаку  $\equiv$  (клавіша  $\sim$  на клавіатурі) можна забезпечити *глобальне* присвоєння (рис.1). MathCAD прочитує весь документ двічі зліва направо і зверху вниз. При першому проходженні виконуються всі дії, які приписані глобальним оператором присвоєння ( $\equiv$ ), а при другому – виконуються дії, що приписані локальним оператором присвоєння ( $:=$ ), та відображаються всі необхідні результати обчислень ( $=$ ).

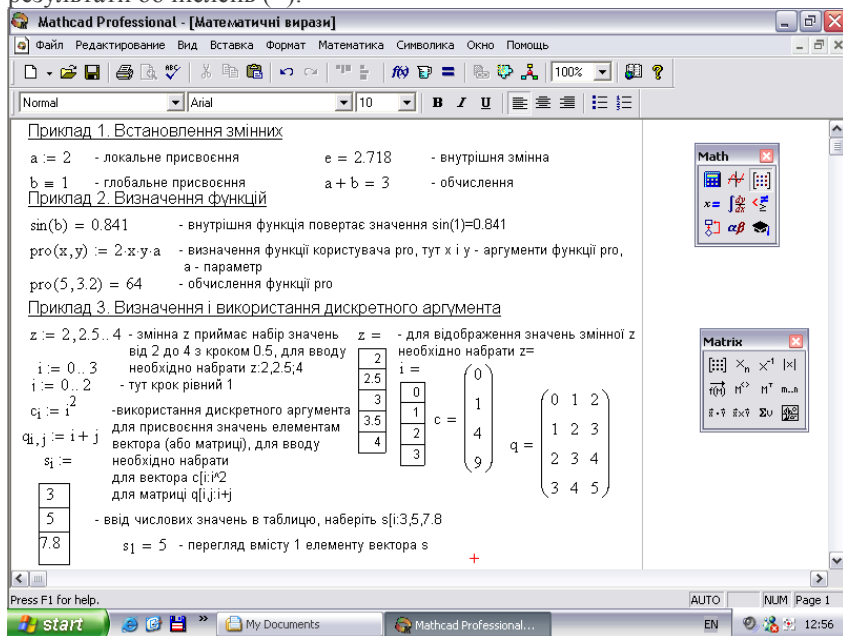


Рис.4.1 Математичні вирази

Існують також жирний знак рівності  $\equiv$  (комбінація клавіш **Ctrl+=**), який використовується, наприклад, як оператор наближеної рівності при

розв'язку систем рівнянь, і символічний знак рівності  $\rightarrow$  (комбінація клавіш **Ctrl+**).

**Дискретні аргументи** – особливий клас змінних, який в пакеті MathCAD часто замінює **керуючі структури**, що називаються циклами (однак повноцінною така заміна не являється). Ці змінні мають ряд фіксованих значень, або цілочисельних (1 спосіб), або у вигляді чисел з певним кроком, що змінюються від початкового значення до кінцевого (2 спосіб).

1.  $Name := Nbegin..Nend$ ,

де  $Name$  – ім'я змінної,  $Nbegin$  - її початкове значення,  $Nend$  - кінцеве значення, .. – символ, що вказує на зміну змінної в заданих межах (вводиться клавішею ;). Якщо  $Nbegin < Nend$ , то крок змінної буде рівним +1 інакше -1.

2.  $Name := Nbegin, (Nbegin + Step)..Nend$

Тут  $Step$  - заданий крок зміни змінної (він повинен бути додатнім, якщо  $Nbegin < Nend$ , або від'ємним у іншому випадку).

Дискретні аргументи значно розширяють можливості MathCAD, дозволяючи виконувати багатократні обчислення або цикли з обчисленнями, що повторюються, формувати вектори і матриці (приклад 3 рис.1).


Масив – сукупність кінцевого числа числових або символічних елементів впорядкованих деяким чином з визначеними адресами. В пакеті MathCAD використовуються масиви двох найбільш поширених типів:

- одномірні (вектори);
- двомірні (матриці).

Порядковий номер елемента, який є його адресою, називають *індексом*. Індеси можуть мати лише цілочисельні значення. Вони можуть починатися з нуля або одиниці у відповідності зі значенням системної змінної **ORIGIN** (див. Додаток 2).

Вектори і матриці можна задавати різними способами:

- за допомогою команди **Вставка  $\Rightarrow$  Матриця**, або комбінації клавіш

**Ctrl+M**, або натиском кнопки  панелі **Матриця**, заповнивши масив пустих полів для не надто великого масиву;

- з використанням дискретного аргументу, коли є деяка явна залежність для обчислення елементів через їх індекси

## Функції

*Функція* – вираз, відповідно до якого проводиться деяке обчислення з *аргументами* і визначається його числове значення.

Варто наголосити на різниці між *аргументами* і *параметрами* функції. Змінні, які вказані в дужках після імені функції, є її *аргументами* і замінюються при обчисленні функції значеннями з дужок. Змінні в правій




частині функції, не вказані в дужках в лівій частині, є *параметрами* і повинні задаватись до визначення функції (див. Приклад 2 рис.1).

Головною особливістю функції є повернення значення, тобто функція у відповідь на звертання до неї по імені з вказуванням її аргументів повинна повернути своє значення.

Функції в пакеті MathCAD можуть бути *внутрішні* (Додаток 3), тобто завчасно введені розробниками, і *встановлені користувачем*.

Способи вставки внутрішніх функцій:

1. Вибрати пункт **Вставка**  $\Rightarrow$  **Функція**.
2. Натиснути комбінацію клавіш **Ctrl+E**.
3. Натиснути кнопку .

### Текстові фрагменти


Текстові фрагменти являють собою текст, який користувач хотів би бачити у своєму документі. Існують два види текстових фрагментів:

- *текстова область* призначена для невеликих частин тексту – підписів, коментарів і т.п. Вставляється за допомогою команди **Вставка**  $\Rightarrow$  **Область тексту** або комбінацією клавіш **Shift+”** (подвійні лапки);
- *текстовий абзац* застосовується у тому випадку. Якщо необхідно працювати з абзацами або сторінками. Вставляється за допомогою комбінації клавіш **Shift+Enter**.

### Графічні області

*Графічні області* поділяються на три основних типи – двовимірні графіки, тривимірні графіки та імпортовані графічні області. Двовимірні та тривимірні графіки будуються самим MathCAD на основі оброблених даних.

Для створення *декартового графіка*:

1. Встановити курсор в пустому місці робочого документу.
2. Вибрати команду **Вставка**  $\Rightarrow$  **Графік**  $\Rightarrow$  **Точка X-Y**, або натиснути комбінацію клавіш **Shift+@**, або натиснути кнопку  панелі **Графіки**. З'явиться шаблон декартового графіка.
3. Введіть в середній мітці під віссю X першу незалежну змінну, через кому – другу і так до 10, наприклад  $x1, x2, \dots$ .
4. Введіть в середній мітці зліва від вертикальної вісі Y першу функцію, через кому – другу і т.д., наприклад  $y1(x1), y2(x2), \dots$ , або ж відповідні вирази.
5. Натисніть за межами області графіка, щоб закінчити його побудову.

Тривимірні, або 3D-графіки, відображають функції двох змінних типу  $Z(X,Y)$ . Для побудови тривимірних графіків можна застосовувати функцію *MathCAD CreateMesh*.

**CreateMesh(F, x0, x1, y0, y1, xgrid, ygrid)**

Створює сітку на поверхні, яка визначена функцією F.  $x_0, x_1, y_0, y_1$  – діапазон варіювання змінних,  $xgrid, ygrid$  – розміри сітки. Усі параметри, за виключенням F, - факультативні. Функція *CreateMesh* по замовчуванню створює сітку на поверхні з діапазоном зміни змінних від -5 до 5 та з сіткою 20x20 точок.

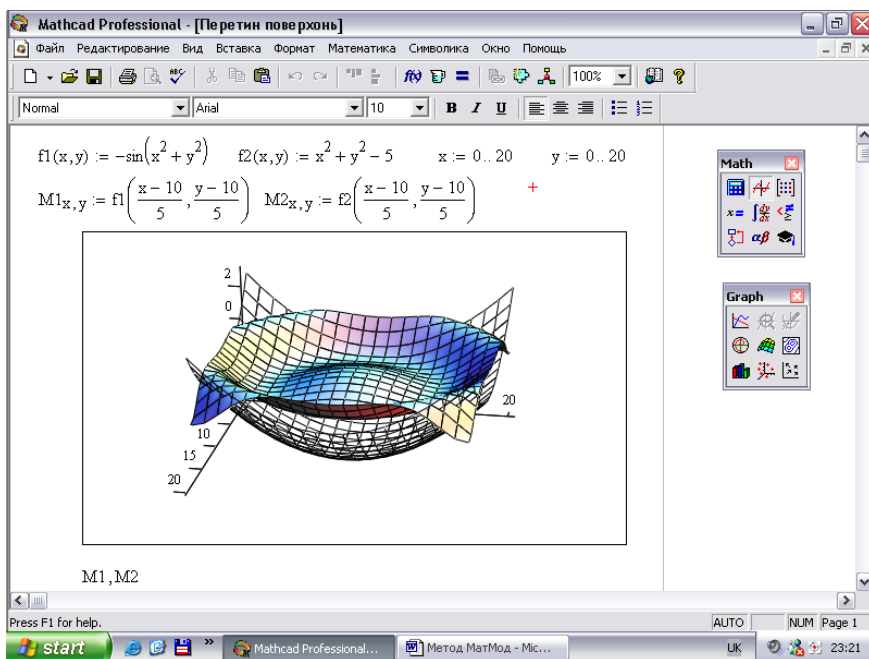


Рис.4.2 Побудова двох поверхнь, що перетинаються

Часто поверхні та просторові криві представляють у вигляді точок, кружечків або інших фігур. Такий графік створюється операцією **Вставка**⇒ **Графік** ⇒ **3D-розброс Plot**, причому поверхня задається параметрично – за допомогою трьох матриць  $(X,Y,Z)$ . Для встановлення вихідних даних для такого виду графіків використовується функція *CreateSpase*.

**CreateSpase(F, t0, t1, egrid)**

Повертає вкладений масив трьох векторів, що представляють  $x$ -,  $y$ -, і  $z$ -координати просторової кривої, визначеної функцією  $F$ .  $t_0$  і  $t_1$  – діапазон варіювання змінних,  $tgrid$  – розміри сітки змінної. Усі параметри, за виключенням  $F$ , - факультативні.

### **Побудова фігур, що перетинаються**

На особливу увагу заслуговує можливість побудови на одному графіку ряду різних фігур або поверхонь з автоматичним врахуванням їх взаємного перетину. Для цього потрібно окремо задати матриці відповідних поверхонь і після виводу шаблону 3D-графіка перерахувати ці матриці через кому (рис.2).

Для визначення по графіку  $X-Y$  координати точки перетину графіків  $Y(x)$  і  $P(x)$  необхідно:

- Виділити графік і вибрати з контекстного меню (для цього слід натиснути праву клавішу мишки) **Трасировка** (з'явиться діалогове вікно **"X-Y Zoom"**) для збільшення частини графіка в області токи перетину.
- На кресленні виділити пунктирним прямокутником область точки перетину графіків  $Y(x)$  і  $P(x)$ , яку необхідно збільшити.
- Натиснути кнопку **Масштаб+**, щоб перерисувати графік.
- Щоб зробити це зображення постійним, вибрати ОК.
- Вибрати з контекстного меню **Трасировка** (з'явиться діалогове вікно **"X-Y Trace"**).
- Всередині креслення натиснути кнопку мишки і перемістити покажчик миши на точку, координати якої потрібно збільшити.

Вибрати *Сору X* або ж (*Сору Y*) і на вільному полі документа набрати  $X_{per} := (Y_{per} :=)$  та вибрати пункт меню **Правка**  $\Rightarrow$  **Вставка**.

Для роботи з векторами і матрицями MathCAD має ряд операторів і функцій, частину з них можна викликати з вікна **"Matrix"** (**Вид**  $\Rightarrow$  **Панель інструментов**  $\Rightarrow$  **Матрица**).

### **Контрольні запитання**

1. За допомогою якого оператора можна обчислити вираз ?
2. Як вставити текстову область в документ MathCAD ?
3. Чим відрізняється глобальне і локальне присвоєння змінних ? За допомогою яких операторів визначаються ?
4. Які системні змінні Вам відомі ? Як дізнатись їх значення ? Як змінити їх значення ?
5. Які види функцій в MathCAD Вам відомі ?
6. Як вставити внутрішню функцію в документ MathCAD ?

7. За допомогою яких операторів можна обчислити інтеграли, похідні, суми, добутки ?
8. Як встановити дискретні змінні з довільним кроком ? Який крок по замовчуванню ?
9. Які види масивів в MathCAD Вам відомі ?
10. Опишіть способи задання масивів в MathCAD ?
11. Як проглянути вміст масиву ?
12. Як побудувати графіки: поверхні; полярний; декартовий ?
13. Як побудувати декілька графіків в одній системі координат ?
14. Як змінити масштаб ?
15. Як визначити координату точки на графіку ?
16. Які функції використовуються для побудови тривимірних графіків ?

### Тема № 5

#### РОЗ'ЯЗОК РІВНЯНЬ ЗАСОБАМИ MATHCAD

##### §1 Загальні відомості

Як відомо, багато рівнянь і системи рівнянь не мають аналітичних рішень. В першу чергу це відноситься до більшості трансцендентних рівнянь. Доведено також, що неможливо побудувати формулу, згідно якої можна було б розв'язувати алгебраїчні рівняння степеня вище четвертого. Однак такі рівняння можуть розв'язуватись числовими методами з заданою точністю (не більше заданого значення системної змінної TOL).

##### §2 Числовий розв'язок нелінійного рівняння

Для рівнянь виду  $f(x)=0$  розв'язок в системі MathCAD знаходиться за допомогою функції **root**.

**root(f(x<sub>1</sub>,x<sub>2</sub>,...),x<sub>1</sub>,a,b)**

Дана функція повертає значення  $x_1$ , що належить відрізьку  $[a,b]$ , при якому вираз або функція  $f(x)$  набуває нульового значення. Обидва аргументи функції повинні бути скалярними. Функція повертає скаляр.

##### **Аргументи:**

$f(x_1,x_2,...)$  – функція. Яка визначена де-небудь в робочому документі, або вираз. Вираз повинен повертати скалярне значення.

$x_1$  - ім'я змінної, яка використовується у виразі. Цій змінній перед використанням функції **root** необхідно присвоїти числове значення. MathCAD використовує його як початкове наближення при пошуку кореня.

$a, b$  – необов'язкові параметри, але якщо використовуються то повинні бути дійсними числами, причому  $a < b$ .

Наближені значення коренів (початкове наближення) може бути:

1. Відоме з фізичної суті задачі.
2. Відоме з рішення аналогічної задачі при інших вихідних даних.
3. Знайдені графічним способом.

Якщо після багатьох ітерацій MathCAD не знаходить потрібного наближення, то з'являється повідомлення **Can't converge to a solution.** (відсутність збіжності). Ця помилка може бути викликана наступними причинами:

- Рівняння не має коренів.
- Корені рівняння розміщені далеко від початкового наближення.
- Вираз має локальні *max* і *min* між початковими наближеннями і коренями.
- Вираз має комплексний корінь, але початкове наближення було дійсним числом.

Щоб встановити причину помилки дослідіть графік  $f(x)$ . Він допоможе з'ясувати наявність коренів рівняння  $f(x)=0$  і якщо вони є, то визначити приблизно їх значення. Чим точніше вибрано початкове наближення кореня тим швидше буде знайдено результат.

### **Рекомендації щодо використання функції *root***

Для зміни точності, з якою функція *root* шукає корінь, необхідно змінити значення системної змінної *TOL*. Якщо значення *TOL* збільшується, функція *root* буде швидше знаходити рішення, однак відповідь буде менш точною. Якщо значення *TOL* зменшується, то функція *root* буде збігатись повільніше, але відповідь буде більш точна. Щоб змінити значення *TOL* у певній точці робочого документу необхідно набрати *TOL:=0.01*. Щоб змінити значення *TOL* для всього робочого документу виберіть **Математика** ⇒ **Параметри...** ⇒ **Переменные** ⇒ **Допуск сходимости (TOL)**.

Якщо два корені розміщені близько один до одного, слід зменшити *TOL*, щоб розрізнити їх.

- Якщо функція  $f(x)$  має малий нахил біля шуканого кореня, функція  $root(f(x), x)$  може збігатись до значення  $r$ , що розташоване достатньо далеко від кореня. В таких випадках для знаходження більш точного значення кореня необхідно зменшити значення *TOL*. Інший варіант полягає в заміні рівняння  $f(x) = 0$  на  $g(x) = 0$

$$g(x) = \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}f(x)}.$$

Для виразу  $f(x)$  з відомим коренем  $a$  знаходження додаткових коренів  $f(x)$  еквівалентно пошуку коренів рівняння  $h(x) = f(x)/(x - a)$ . Подібний прийом корисний для знаходження коренів, які розміщені близько один до одного. Простіше шукати корені виразу  $h(x)$ , ніж пробувати шукати інший корінь рівняння  $f(x)=0$ , вибираючи різноманітні початкові наближення.

### §3 Числовий розв'язок диференціального рівняння

Для розв'язку диференціального рівняння та задач подібного класу в системі MathCAD введено ряд функцій:

**Rkadapt(Y,x1,x2,n,F)** – повертає матрицю розв'язків методом Рунге-Кутта із змінним кроком для системи звичайних диференціальних рівнянь з початковою умовою у векторі **Y**, праві частини яких записані в символьному векторі **F**, на інтервалі від **x1** до **x2**; **n** – число кроків;

**rkfixed(Y,x1,x2,n,F)** – повертає матрицю розв'язків методом Рунге-Кутта системи звичайних диференціальних рівнянь з початковою умовою у векторі **Y**, праві частини яких записані в символьному векторі **F**, на інтервалі від **x1** до **x2**; при фіксованому кроці **n**;

**Bulstoer(Y,x1,x2,n,F)** – повертає матрицю розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь, права частина яких (у вигляді перших похідних) записана у векторі **F** при заданих у векторі **Y** початкових умовах і при розв'язку на інтервалі від **x1** до **x2** для **n** – розв'язків, не враховуючи початкової точки.

Метод Рунге-Кутта, на якому базуються згадані вище числові методи розв'язку диференціальних рівнянь полягає у визначенні  $y_{k+1}$  наближення Формула стандартного методу Рунге-Кутта із початковою точкою  $(t_0; y_0)$  має вигляд:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6},$$

де

$$k_1 = f(t_k, y_k),$$

$$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_1 = f(t_k + h, y_k + h \cdot k_3).$$

Приклад розв'язку рівняння  $\frac{dV}{dt} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{k}{m}(W + V)$  із застосуванням функції **rkfixed** системи MathCAD показано на рис.5.1

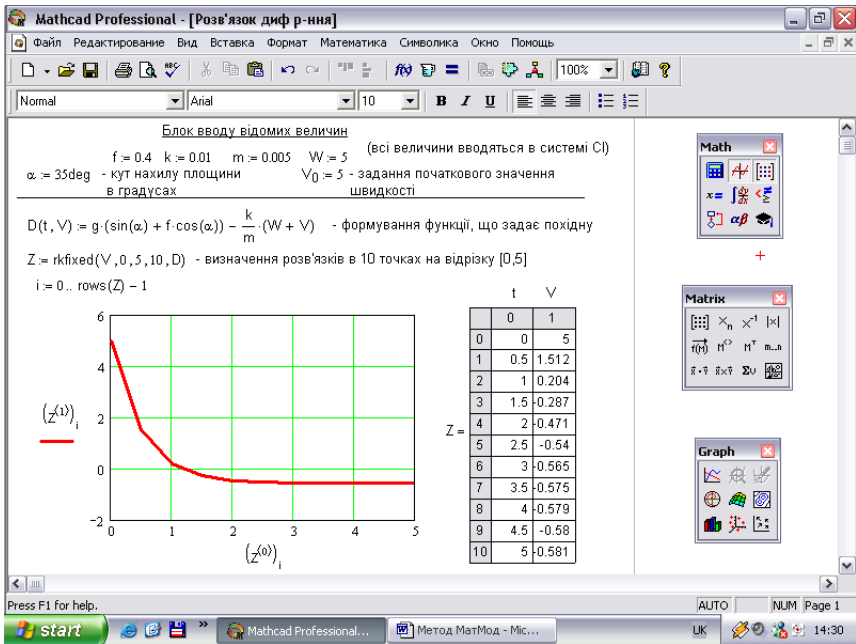


Рис.5.1 Приклад розв'язку диференціального рівняння із застосуванням функції **rkfixed**

### Контрольні запитання

1. Яка функція використовується для розв'язку нелінійного рівняння?
2. Особливості розв'язку рівнянь в системі MathCAD.
3. Вказати функції системи MathCAD для розв'язку диференціальних рівнянь.

4. Навести розрахункові формули числового розв'язку диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта.
5. Яким чином можна виділити для подальшого використання  $n$ -ий стовпець матриці  $Z$  в системі MathCAD ?
6. Яким чином можна виділити для подальшого використання  $n$ -ий елемент вектора  $Z$  в системі MathCAD ?

### Тема № 6

## СИМВОЛЬНІ ОБЧИСЛЕННЯ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ

### §1 Загальні відомості про символні обчислення

Системи комп'ютерної алгебри наділені спеціальним процесором для виконання аналітичних (символьних) обчислень. Його основою є ядро, що зберігає всю сукупність формул і формульних перетворень за допомогою якої виконуються аналітичні обчислення. Чим більше цих формул в ядрі тим надійніша робота символного процесора і тим більша ймовірність, що поставлена задача буде вирішена, якщо рішення існує. Ядро символного процесора системи MathCAD – дещо спрощений варіант відомої системи символної математики Maple V фірми Waterloo Maple Software у якій фірма MathSoft (розробник MathCAD) придбала ліцензію на його застосування і використання, завдяки чому MathCAD стала (починаючи з версії 3. 0) системою символної математики. Символьні обчислення виконуються так нескладно, подібно до обчислення квадрату  $x$ .

Символьні операції можна виконувати двома способами:

- безпосередньо в командному режимі (використовуючи операцію меню **Символи**);
- за допомогою операторів символного перетворення

(використовуючи палітру інструментів **Символи** ).

Розглянемо перший спосіб.

Щоб символні операції виконувались, процесору необхідно вказати над якими виразами ці операції повинні виконуватись, тобто необхідно виділити вирази. Для ряду операцій слід не лише вказати вирази, до яких вони відносяться, але і намітити змінну, відносно якої виконується та чи інша символна операція. Сам вираз, в такому випадку, не виділяється.

Таким чином, для виконання операції із символним процесором необхідно виділити об'єкт (цілий вираз або його частина) синіми суцільними лініями.



Символьні операції розбиті на п'ять характерних розділів. Першими йдуть найбільш часто використовувані операції. Вони можуть виконуватись з виразами, що містять комплексні числа, або мають розв'язки у комплексному виді.

### §2 Символьні операції з виділеними виразами

Якщо у документі є виділені вирази то над ними можна виконувати різні операції, які представлені нижче:

**Розрахунки** — перетворити вираз з вибором виду перетворень з підменю:

**Символьні** – виконати символьні перетворення виділеного виразу;

**З плаваючою комою** – обчислити виділений вираз у дійсних числах;

**Комплексні** – виконати обчислення в комплексному вигляді.

**Спростити** — спростити виділений вираз з виконанням таких операцій як скорочення подібних складових, приведення до спільного знаменника, використання основних тригонометричних тотожностей і ін.;

**Розширити** — розкрити вираз [наприклад, для  $(X + Y)(X - Y)$  отримуємо  $X^2 - Y^2$ ];

**Фактор** — розкласти число або вираз на множники [наприклад,  $X^2 - Y^2$  дає  $(X + Y)(X - Y)$ ];

**Подібність**— зібрати складові, що подібні виділеному виразу, який може бути визначений окремою змінною або функцією зі своїм аргументом (результатом буде вираз, поліноміальний відносно вибраного виразу);

**Коефіцієнти поліному**— за заданою змінною знайти коефіцієнти поліному, що аппроксимує вираз, в якому ця змінна використана.

### §3 Символьні операції з виділеними змінними

Для ряду операцій необхідно знати, відносно якої змінної вони виконуються. В цьому випадку необхідно виділити змінну, встановивши на ній маркер вводу. Після цього стають доступним наступні операції підменю **Змінні**:

**Обчислити** — знайти значення виділеної змінної, при яких вирази, що її містять стають рівними нулю;

**Заміна** — замінити вказану змінну вмістом буфера обміну;

**Диференціали** — диференціювати вираз, що містить виділену змінну, по цій змінній (решта змінних розглядаються як константи);

**Інтегрування** — інтегрувати всі вирази, що містять змінну, по цій змінній;

**Розкласти на складові** — знайти декілька членів розкладу в ряд Тейлора відносно виділеної змінної;

**Перетворити в часткові долі** — розкласти на елементарні дроби вираз, який розглядається як раціональний дріб відносно виділеної змінної.

#### *§4 Символьні операції з виділеними матрицями*

Операції з виділеними матрицями представлені позицією підменю **Матриці**, яка має своє підменю з наступними операціями:

**Транспортування** — отримати транспоновану матрицю;

**Інвертування** — створити обернену матрицю;

**Визначник** — обчислити детермінант (визначник) матриці.

Результати символьних операцій з матрицями часто бувають надто громіздкими.

#### *§5 Операції перетворення*

В позиції **Перетворення** міститься розділ операцій перетворення, що містить такі можливості:

**Фур'є** — виконати пряме перетворення Фур'є відносно виділеної змінної;

**Фур'є обернене** — виконати обернене перетворення Фур'є відносно виділеної змінної;

**Лапласа** — виконати пряме перетворення Лапласа відносно виділеної змінної;

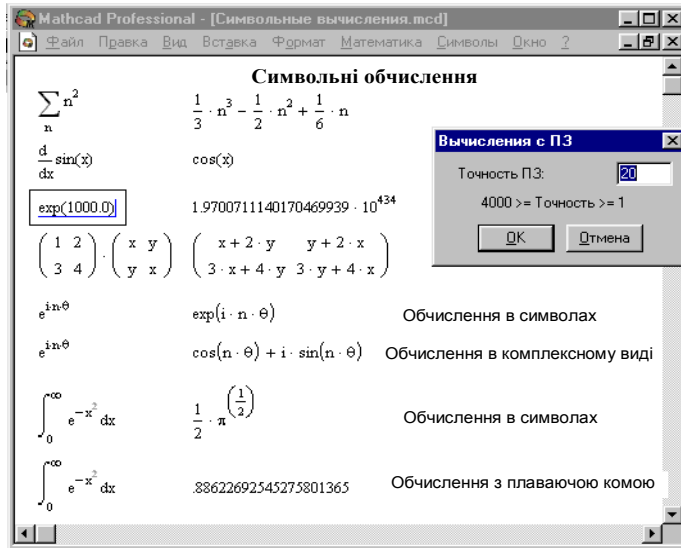


Рис.6.1 Приклад виконання символічних обчислень

**Лапласа обернене**— виконати обернене перетворення Лапласа відносно виділеної змінної;

**Z** — виконати пряме Z-перетворення Лапласа відносно виділеної змінної;

**Обернене Z** — виконати обернене Z-перетворення Лапласа відносно виділеної змінної.

На наглядність обчислень впливає стиль представлення результатів. Наступна команда дозволяє задати той чи інший стиль:

**Стиль обчислення** — задати вивід результату символічної операції під основним виразом, поряд з ним або замість нього.

### *§6 Оператори обчислення границь*

Для обчислення границь функції в систему введено символічний оператор *limit*. Окрім вводу з панелі **Матаналіз**, її в трьох формах можна ввести натисненням наступних комбінацій клавіш:

**[Ctrl] L** — ввід шаблону оператора обчислення границі функції, коли *x* прямує до заданого числа;

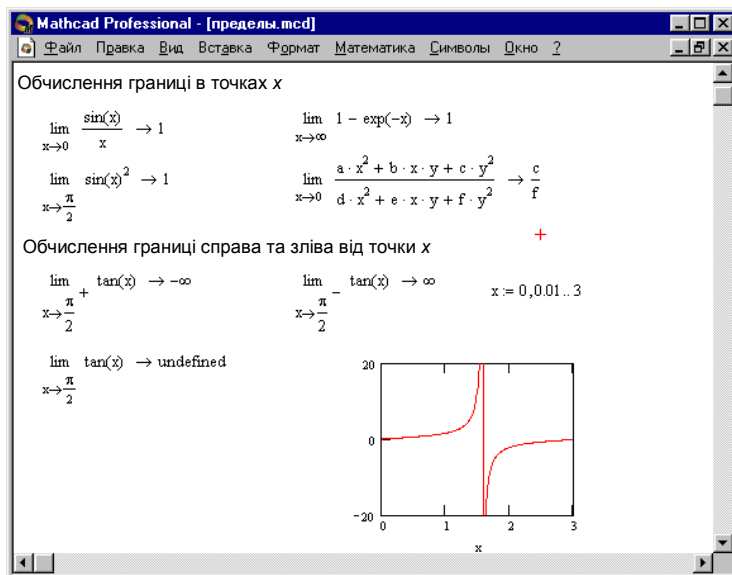


Рис.6.2 Обчислення границь

**[Ctrl] A** — ввід шаблону оператора обчислення границі функції зліва від заданої точки;

**[Ctrl] B** — ввід шаблону оператора обчислення границі функції справа від заданої точки.

На рис. 6.2 показані приклади обчислення границь. При обчисленні границь необхідно заповнити шаблони, що входять в головний шаблон для обчислення границь, а потім ввести функцію, ім'я змінної, за якою шукається границя, і значення змінної— аргументу функції.

Для отримання результатів слід встановити після блоку обчислення стрілку направлену вправо „→”. Границя (якщо вона існує) буде обчислена і з'явиться в шаблоні біля гострия стрілки. Якщо функція не має границі то замість результату буде видано надпис *Undefined*.

### §7 Оператори, задані користувачем

Ще одна можливість, яка притаманна новим версіям системи MathCAD, — формування нових операторів користувачем. Такий оператор задається практично так, як функція користувача, але замість імені

вибирається будь-який знак, що підходить з вигляду. Наприклад, можна задати оператор ділення у вигляді:

$$\div(A, B) := \frac{A}{B} \quad \text{- формування нового оператора ділення;}$$

$$\div(6, 2) = 3 \quad \text{— застосування функції ділення;}$$


$$6 \div 2 = 3 \quad \text{— застосування нового оператора ділення.}$$

Здається ніби просто, однак При таке задання має певні труднощі. Вбудовані в систему оператори не можна перевизначити. Тому набір доступних знаків для позначення нових операторів обмежений. Не можна задати новий оператор ділення знаком „/” (він вже використовується), але можна взяти знак „÷”, оскільки цей символ системою не використовується.

Інша проблема пов’язана з вводом символу нового оператора. Швидше за все, його напряду ввести неможливо. Доведеться скористатись типовими прийомами вводу нових символів в документи Windows. Один з таких прийомів— використання додатку, що видає таблицю символів, з можливістю його експорту з цієї таблиці в документ іншого додатку (в нашому випадку— в документ MathCAD).


Можна також скористатись необхідним знаком з набору MATH SYMBOL, що є в складі „Шпаргалок”, доступ до яких дає Ресурс Центр (? ⇒ **Ресурс центр ⇒ Довідковий стіл і коротке керівництво ⇒ Додаткові математичні символи**). Знак можна скопіювати в буфер обміну за допомогою операції **Копіювати**, а потім ввести в документ, використовуючи операцію **Вставка**.

Коли оператор є заданим, його можна використовувати як функцію і як оператор. Для використання нового оператора слід ввести його шаблон за допомогою панелі математичних знаків. В нашому випадку слід натиснути

кнопку  цієї панелі— вона виводить особливий шаблон виду  $\square \square \square$ . Введіть операнди, наприклад 6 і 3 в крайні прямокутники, а символ оператора — в середній. Поставивши після цієї конструкції знак рівності, отримується результат — число 2.

Можна задати і інші оператори, наприклад, для роботи з одним операндом. Так, можна задати оператор для перерахунку значення температури за шкалою Цельсія, щоб визначити відповідне значення за шкалою Фаренгейта, наступним чином:

$$^{\circ}\text{C}(x) := \frac{9}{5} \cdot x + 32 \qquad ^{\circ}\text{F} := 1$$

Далі, використовуючи кнопку  панелі символів відношення, можна виконати операцію перерахунку у вигляді:

$$37^{\circ}\text{C} = 98.6^{\circ}\text{F}$$

Є сфери моделювання, галузі математики і фізики, де задання нових операторів є необхідним, так як являється частиною специфічної мови їх опису.

### Контрольні запитання

1. Загальні відомості про символні обчислення.
2. Символьні операції з виділеними виразами.
3. Символьні операції з виділеними змінними.
4. Символьні операції з виділеними матрицями.
5. Операції перетворення
6. Оператори обчислення границь.
7. Оператори, задані користувачем.

## Тема 7

### МОДЕЛІ ФУНКЦІОНУВАННЯ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН

#### *§1 Особливості моделей функціонування СГМ*

Сільськогосподарські агрегати працюють в умовах змінного зовнішнього впливу, що обумовлено багаточисельними і різноманітними факторами. Такими факторами можуть бути: нерівність поверхні поля, особливості фізико-механічних властивостей ґрунту і рослин, і т.д.

Функціонування сільськогосподарських машин можна розглядати як реакцію на вхідні зовнішні збурення і керуючі дії. Тому моделі функціонування сільськогосподарських машин навести схематично за принципом “вхід-вихід”. На вході системи діють функції умов роботи і керування, а на виході – функції експлуатаційних показників.

Розрахункова схема виглядатиме так:

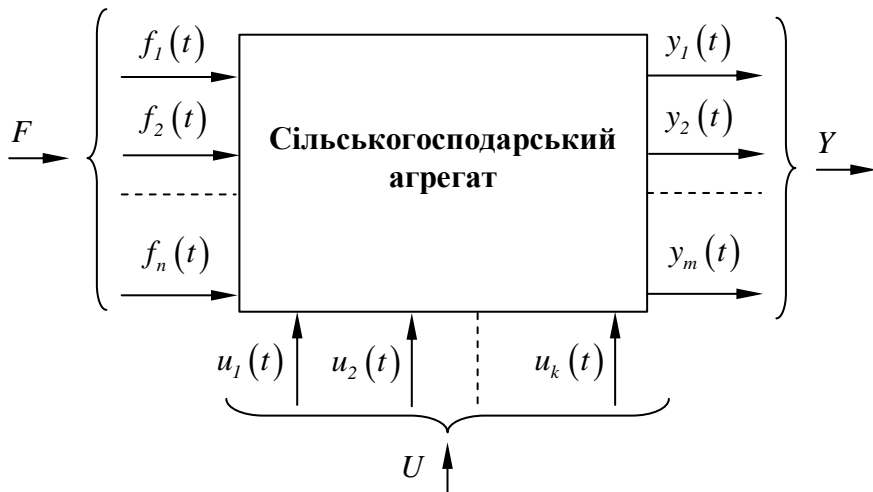


Рис.7.1 Схема „Вхід-вихід”

На вході діють вектори-функції умов роботи (зовнішніх збурень)  $F = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$  і керування  $U = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)\}$ .

Термін вектор-функція означає, що на вході діють  $n$  збурюючих і  $k$  керуючих факторів, і їх дія є функцією часу  $t$  або іншого аргументу. Вихідні змінні теж являють собою вектор-функцію  $Y = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)\}$ , який вказує як поводить себе машина в реальних умовах функціонування. Тобто  $Y$  визначає технологічні, енергетичні, експлуатаційні і інші показники роботи.

Якщо між вектор-функціями  $\vec{F}, \vec{Y}, \vec{U}$  встановлений аналітичний зв'язок то це носить назву модель “білий ящик”. Якщо ж зв'язок емпіричний то – „чорний ящик”. Найчастіше на практиці моді є „сірим ящиком”.

## §2 Поняття реалізації і процесу при функціонуванні СГМ

Найбільш суттєвою особливістю вектора  $\vec{F}$  є те, що він може бути віднесений до категорії випадкових. Тому складові вектора  $\vec{Y}$ , що визначає показники роботи сільськогосподарського агрегату, також будуть випадковими. Ступінь детермінованості, тобто взаємозалежності між векторами-функціями  $\vec{F}$  і  $\vec{Y}$  виражений дуже слабо. Тому для СГМ найбільш достовірну інформацію дають експериментальні методи досліджень.

Більшість сільськогосподарських машин та агрегатів працюють в умовах, коли навантаження на їх робочі органи мають випадковий (непостійний і нерівномірний) характер. Наприклад, дія нерівностей поверхні поля на опорні колеса сільськогосподарських машин, нерівномірність щільності ґрунту за напрямом руху ґрунтообробної машини та маси врожаю, що подається на робочі органи зернозбирального комбайна і т.п.

Зміна дії випадкового процесу в часі чи просторі називається *реалізацією*, а запис (фіксація результатів зміни) реалізації на реєструючому папері (моніторі, екрані і т.д.) - *осцилограмою*. Якщо записувати один і той же процес декілька разів, то будемо мати *ансамбль реалізацій* випадкового процесу. На рис.2 подано ансамбль з трьох реалізацій випадкового процесу зміни нерівностей поверхні одного і того ж поля  $z_i$  за декілька проходів  $l_i$  по ньому сільськогосподарського об'єкта дослідження.

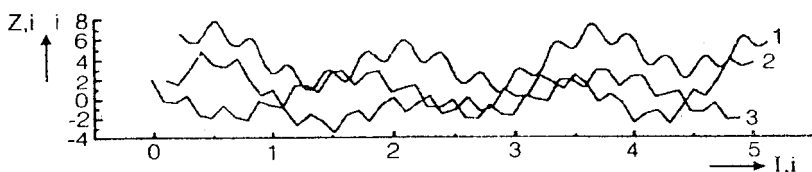


Рис.7.2 Ансамбль реалізацій випадкового процесу

На перший погляд здається, що кожна з наведених ліній докорінно відрізняється від інших. Але водночас ми усвідомлюємо, що кожна з цих ліній характеризує нерівності одного і того ж поля. Тому за умов достатньої довжини реалізації кожна з них несе спільну загальну інформацію (реалізації мають спільний внутрішній стан) про випадковий процес.

Загальноприйнятими характеристиками випадкового процесу виступають математичне сподівання  $m$ , середнє квадратичне відхилення  $\sigma$  та коефіцієнт варіації  $V$ . Для обчислення цих величин треба мати конкретні значення ординат випадкової величини, тобто експериментальний масив даних. Тому необхідно провести *дискретизацію* осцилограми безперервного випадкового процесу. Суть методики проведення дискретизації пояснюється на рис. 3.



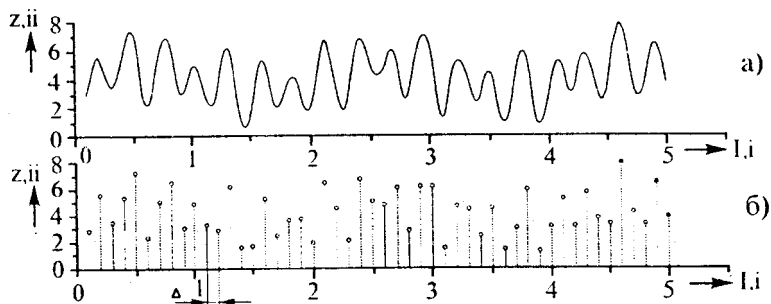


Рис.7.3 Дискретизація реалізацій випадкового процесу:  
а – безперервний тип; б – дискретний тип.

Будь-який випадковий процес характеризується випадковими величинами, які завжди присутні в ході проведення експерименту.

Випадковою величиною називають величину, яка в результаті досліду може приймати різні величини. Випадкові величини, як правило, позначають великими літерами, наприклад  $X$ , а значення випадкової величини, яке вона приймає в результаті досліду, - малими літерами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

При великій кількості досліджень кожне із можливих значень випадкової величини  $x_1, x_2, \dots, x_n$  може зустрітися  $b_1, b_2, \dots, b_n$  разів. Ці числа називають частотами. Якщо всього було проведено  $N$  випробувань, тобто  $\sum_{i=1}^n b_i = N$ , то

відношення  $b_i/N$  називають відносною частотою.

Сукупність, яка містить всі досліджувані величини, називається генеральною сукупністю.

Вибрані із генеральної сукупності  $N$  вимірів утворюють вибірку об'єму  $N$ .

Дискретними випадковими величинами називають такі величини, які можуть приймати лише визначені фіксовані значення, наприклад, 0,1; 0,2 і т.д.

Безперервними випадковими величинами називають такі величини, які в деякому інтервалі можуть приймати будь-які значення.

Наприклад, кількість бракованих деталей у різних вибірках із генеральної сукупності є дискретною випадковою величиною, а розмір цих деталей - безперервною випадковою величиною.

Всяку безперервну випадкову величину можна задати у вигляді дискретної, якщо всі можливі її значення розбити на інтервали і задати вірогідність появи цих інтервалів (визначення ординат випадкового процесу).

Кількість відрізків  $\Delta$  вздовж осі абсцис (тобто величина  $\Delta$ ) визначається, виходячи з максимальної частоти перебігу випадкового.

Після проведення дискретизації і вимірювання ординат випадкового процесу отримуємо *масив експериментальних даних*. Якщо ці дані розподілити на *класи*, то можна побудувати графічне зображення експериментальних розподілів, для чого будуються *гістограми* і *полігони розподілу частот* з'явлення тієї чи іншої величини випадкового процесу.

Для графічного відображення експериментального масиву даних будуються гістограми і полігони розподілу.

Для випадкових величин дискретного типу застосовуються, як правило, полігони розподілу, а для випадкових величин безперервного типу - гістограми.

Розподіл випадкового процесу можна виконати за правилом Штюргеса. Кількість класів випадкового процесу визначають за формулою:

$$k = 1 + 3,32 \cdot \lg n, \quad (1)$$

де  $n$  – кількість вибраних в експериментальному масиві даних випадкового процесу.

Результат обчислень за формулою (1) округлюють до цілого числа.

Інтервал кожного класу визначається за формулою:

$$\delta = \frac{Z_{max} - Z_{min}}{k}, \quad (2)$$

де  $Z_{max}$  та  $Z_{min}$  – відповідно максимальне та мінімальне чисельне значення вимірної ординати одного класу з експериментального масиву даних.

Полігони розподілів і гістограми будують за частотами розподілу експериментальних даних випадкового процесу.

*Середини інтервалів* кожного визначеного класу обчислюються за формулою:

$$\bar{Z}_i = \frac{Z_{n_i} + Z_{e_i}}{2}, \quad (3)$$

де  $Z_{n_i}$  та  $Z_{e_i}$  – відповідно нижня та верхня межа  $i$ -го класу.

*Абсолютна частота*  $B_i$  – це кількість ординат (вимірів) з масиву даних, що потрапили до меж  $i$ -го класу.

*Відносна частота*  $b_i$  визначається за формулою:

$$b_i = \frac{B_i}{n}. \quad (4)$$

*Накопичена частота*  $i$ -го класу  $b_i^n$  складається з суми відносних частот  $i$ -го та усіх попередніх класів.

### Контрольні запитання

1. Охарактеризувати модель „Вхід-вихід”.
2. Який експеримент називається пасивним ?
3. У чому полягає суть визначення невідомих коефіцієнтів способом найменших квадратів ?
4. Дати визначення поняттю ”масив експериментальних даних”.
5. Охарактеризувати методи розв’язку систем рівнянь у пакеті MathCad.

### Тема 8

#### ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ. КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ І СПЕКТРАЛЬНІ ЩІЛЬНОСТІ

У сільськогосподарському виробництві часто доводиться мати справу з випадковими величинами, які неперервно змінюються в часі (або відстані). При роботі апарату неперервно змінюються мікрорельєф ґрунту, завантаження трактора та інші величини. Такі випадкові величини називаються випадковими функціями. Точніше означення випадкової функції буде таке: якщо функція під час дослідів може прийняти той, або інший вигляд, але який саме, наперед невідомо, то така функція називається випадковою. Випадкові функції можуть бути одного аргументу або кількох аргументів. Прийнятий під час дослідів конкретний вид функції називається реалізацією випадкової функції, а таких реалізацій багато. Кожна реалізація є невідповідною функцією, а всі реалізації утворюють випадкову функцію.

Для фіксованих значень аргументу випадкова функція є випадковою величиною.

Характеристики випадкових функцій: математичне сподівання, дисперсія та кореляційна функція.

Математичне сподівання випадкової функції  $x(t)$  - це невідповідна функція  $x_{m.c.}(t)$ , яка за будь якого значення аргументу  $t$  є математичним сподіванням перерізу випадкової функції (інакше кажучи, це деяка середня функція, відносно якої коливаються окремі реалізації випадкової функції).

Дисперсія випадкової функції  $X(t)$  - це також невідповідна функція  $P_x(t)$ , яка є дисперсією перерізу випадкової функції за будь якого значення аргументу  $t$ . Добуваючи з функції дисперсії квадратний корінь одержимо нову функцію  $S_x(t)$ , яка є середнім квадратичним відхиленням випадкової функції.

Невипадковою функцією є також кореляційна функція, яка являє собою кореляційний момент перерізу випадкової функції для кожної пари  $t$  і  $t'$  значень аргументу. Ця функція описує внутрішню структуру випадкових процесів, показує ступінь залежності ординат (тобто значень  $X$ ) однієї від другої при збільшенні інтервалу між відрізками часу  $t$  і  $t'$ , що видно з рис.1, на якому умовно лінійно зображена випадкова функція. Значення функції  $X(t')$  в часі  $t'$  залежить від значення  $X(t)$ . При близьких значеннях  $t$  і  $t'$ , якщо величина  $X(t)$  прийняла будь-яке значення, то й величина  $X(t')$  з більшою ймовірністю буде мати близьке до нього значення; зі збільшенням інтервалу між  $t'$  і  $t$  ступінь залежності величин  $X(t')$  і  $X(t)$  буде зменшуватись.

Кореляційна функція.

$$K_{X, X'} = M \{ [X(t) - x_{м.с.}] [X(t') - x_{м.с.}] \}$$

де  $M$  – символ моменту;  $X(t')$ ,  $X(t)$  – значення функції при значеннях аргументу  $t'$  і  $t$ .

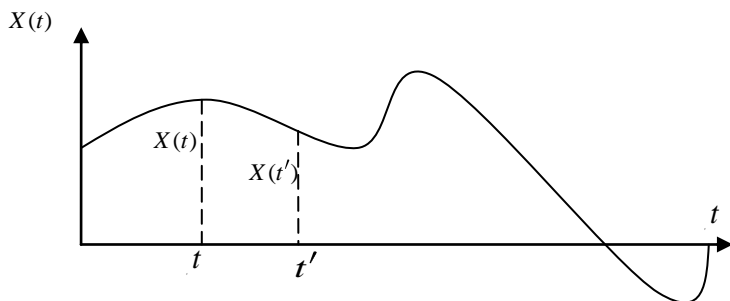


Рис.8.1 Випадкова функція  $t$

Кореляційна функція не залежить від послідовності розглядуваних величин  $X(t')$  та  $X(t)$  і не змінюються при переміні аргументів місцям, тобто:

$$K_{X, X'} = K_{X', X}$$

Якщо через  $n$  реалізацій випадкової функції провести  $m$  перерізів, то кореляційний момент для кожного перерізу

$$K_{X, X'} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{ [x_{it} - x_{м.с.}] [x_{it'} - x_{м.с.}] \},$$

де  $x_{it}$  та  $x_{it'}$  – значення  $i$ -ї функції в проміжку часу  $t$  і  $t'$ .

За підрахованими значеннями моменту  $K_{x_i x_j}$ , будують графік кореляційної функції в прямокутній системі координат.

Частинним випадкових процесів (функцій) є стандартні випадкові процеси (функції), які проходять приблизно без суттєвих змін з проміжком часу (або відстані) та у яких відхилення проходять навколо деякого середнього значення. При наявності цих умов процеси будуть нестационарними. В сільськогосподарському виробництві часто зустрічаються стаціонарні процеси.

Робота будь-якої СГМ починається з нестационарного процесу, який пізніше переходить у стаціонарний. Такими є, наприклад, процеси завантаження двигуна трактора, виводу насіння висівальним апаратом сівалки тощо. Стаціонарними функціями також можна вважати такі неперервні змінні величини, як мікрорельєф поверхні і поля, врожайність, вологість стебел і насіння та ін.

Стаціонарною називається випадкова функція  $X(t)$ , у якій імовірнісні характеристики не залежать від аргументу  $t$ . Внаслідок цього у стаціонарної випадкової функції математичне очікування стало, стала також дисперсія, тобто

$$\begin{aligned} x_{m.c.}(t) &= x_{m.c.} = const; \\ D_x(t) &= D_x = const. \end{aligned}$$

Кореляційна функція для стаціонарних процесів залежить від вибраного проміжку між двома сусідніми значеннями аргументу. Якщо різницю  $t' - t$  позначити через  $\tau$ , то в стаціонарних функціях кореляційний момент залежить від довжини  $\tau$ , а не від відрізка, де вибраний цей інтервал. Враховуючи це,

$$K_{x_i x_j} = K_{x_i x_{i+\tau}} = K_x(\tau).$$

Величина  $K_x(\tau)$  означає, що кореляційна функція випадкової функції  $X$  визначається залежно від інтервалу  $\tau$ . Кореляційна функція  $K_x(\tau)$  є парною функцією і будується для додатніх значень аргументу.

На практиці зручніше користуватися так званою нормованою кореляційною функцією:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{D_x},$$

де  $D_x$  - дисперсія стаціонарного процесу, яка є величина стала. Функція  $\rho_x(\tau)$  є коефіцієнтом кореляції між перерізами випадкової функції з інтервалом між ними, що дорівнює  $\tau$ .

Крім дослідження внутрішньої структури випадкового процесу за допомогою кореляційної функції також необхідно визначити спектральний склад випадкової функції.

Як відомо, будь-який коливальний процес можна показати як суму „гармонік”, тобто гармонічних коливань різних частот та амплітуд, тоді спектром цього процесу буде функція, що визначає, які амплітуди припадають на різні частоти, а спектр стаціонарної випадкової функції показує, які дисперсії припадають на різні частоти. Дисперсія  $D_x$  стаціонарного процесу подається у вигляді нескінченної суми елементарних доданків (дисперсій), що припадають на відповідні частоти.

Розподіл дисперсій за частотами можна виразити графічно в прямокутній системі координат, причому по осі абсцис відкладають частоту  $\omega$ , а по осі ординат – спектральну щільність дисперсії  $S_x(\omega)$ , яка є дисперсією, що припадає на одиницю довжини інтервалу частот. Площа, обмежена кривою  $S_x(\omega)$ , дорівнює дисперсії  $D_x$ .

Замість спектральної щільності часто користуються нормованою щільністю  $\varepsilon_x(\omega)$ :

$$\varepsilon_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x}$$

Якщо на графіку по осі ординат відкласти нормовану спектральну щільність, а по осі абсцис – частоту, то повна площа, обмежена кривою  $\varepsilon_x(\omega)$ , дорівнює 1.

У сільськогосподарському виробництві для багатьох стаціонарних випадкових процесів (мікрорельєф поля, врожайність, завантаження трактора), характерним є те, що ода реалізація достатньої тривалості цілком представляє всю функцію. Такі процеси називаються ергодичними, а властивість – ергодичною. В ергодичних процесах середі значення характеристик у будь-якій реалізації одні і ті самі. Тому характеристика такої випадкової функції можна визначити за однією досить довгою реалізацією.

В ергодичних процесах кореляційна функція при  $t \rightarrow \infty$  прямує до нуля. Оцінка  $x_{cp}$  математичного сподівання  $x_{m.c.}$ :

$$x_{cp} \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt,$$

де  $T$  – довжина аргументу ( $T$  повинно бути досить великим).

Замість інтегрування криву розбивають на  $n$  інтервалів однакової довжини  $\Delta t$  і визначають  $x_{cp}$  скінченною сумою:

$$x_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i),$$

де  $x(t_i)$  - значення функції при  $t$ , яке дорівнює  $t_1, t_2, t_3$  тощо.

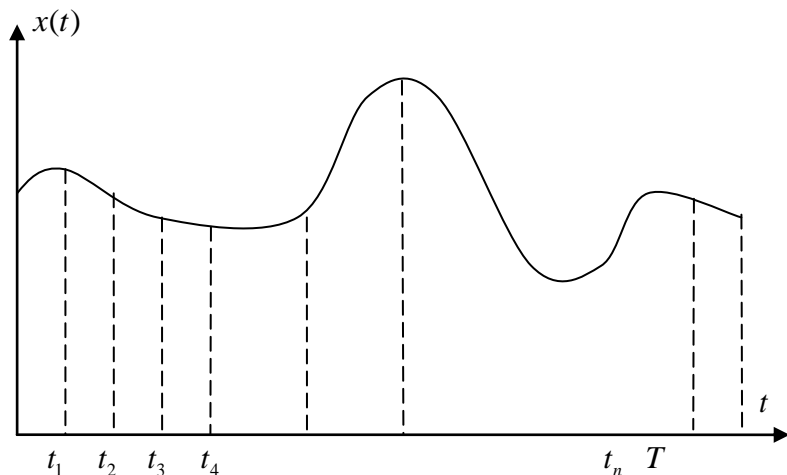


Рис.8.2 Графік, що до пояснення кореляційної функції

Для обчислення кореляційної функції потрібно перемножити центровані величини  $x_t - x_{cp}$  і  $x_{t+\tau} - x_{cp}$ . Тому слід враховувати не весь відрізок часу (від 0 до  $T$ ), а дещо менший – від 0 до  $T - \tau$ . Приймаємо інтервал  $\tau$  кратним інтервалу  $\Delta t$ , який дорівнює  $\frac{T}{n}$ , тобто  $\tau = m\Delta t$ , де  $m$  – нуль або ціле додатне число, починаючи з 1 тоді нормована кореляційна функція:

$$\rho_x(\tau) = \frac{1}{D_x^* (n-m)} \sum_{i=1}^{n-m} (x_{t_i} - x_{cp})(x_{t_{i+m}} - x_{cp}), \quad (*)$$

де  $D_x^*$  - статистична дисперсія.

Кореляційна функція обчислюється для  $m=0, 1, 2, 3, 4$  і т.д. аж до таких значень  $m$ , при яких  $\rho_x(\tau)$  стає близьким до нуля або здійснює незначні коливання біля нуля.

Приклад. Скористаємось прикладом, який приводить Г.А. Хайліс у книзі „Основи проектування і дослідження сільськогосподарських машин”. Визначимо кореляційну функцію висоти захвату стебел при роботі

льонозбирального агрегату. Отримані дані (експериментально) висоти захвату стебел льонозбиральною машиною під час роботи на рівному полі.

Спочатку знаходимо математичне сподівання (або його наближене значення):

$$h_{cp} = \frac{1}{100}(16.0 + 16.3 + 16.1 + 15.7 + 15.7 + \dots) \approx 15.98 \text{ см}$$

Визначаємо наближене значення дисперсії:

$$D_h = \frac{0.02^2 + 0.32^2 + 0.12^2 + (-0.28^2) + (-0.28^2) + \dots}{100} = 0.105 \text{ см}$$

$$\left( D_h = \left[ \sum_{i=1}^n h_i - h_{cp} \right] \cdot \frac{1}{n} \right)$$

Згідно формули (\*) визначаємо нормовану кореляцію, де  $h_i - h_c$  розділено інтервалами 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 і т.д.

$$\rho_h(0) = \frac{1}{0,105 \cdot 100} \left[ (0,02)^2 + 0,32^2 + 0,12^2 + (-0,28^2) + \dots \right];$$

$$\rho_h(0,2) = \frac{1}{0,105(100-1)} \times \\ \times [0,02 \cdot 0,32 + 0,32 \cdot 0,12 + 0,12 \cdot (-0,28^2) + \dots];$$

$$\rho_h(0,4) = \frac{1}{0,105(100-2)} \times \\ \times [0,02 \cdot 0,12 + 0,32 \cdot (-0,28) + 0,12 \cdot (-0,28^2) + \dots];$$

$$\rho_h(0,6) = \frac{1}{0,105(100-3)} \times \\ \times [0,02 \cdot (-0,28) + 0,32 \cdot (-0,28) + 0,12 \cdot 0,12 + \dots];$$

$$\rho_h(0,8) = \frac{1}{0,105(100-4)} \times \\ \times [0,02 \cdot (-0,28) + 0,32 \cdot 0,12 + 0,12 \cdot 0,32 + \dots];$$

За отриманими даними будуємо графік.



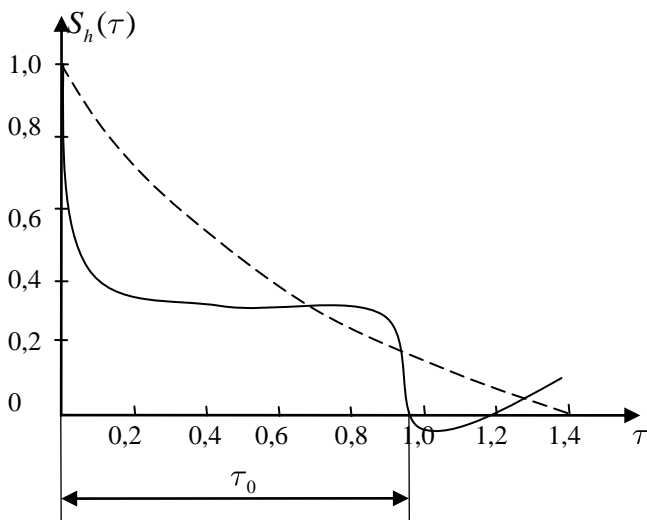


Рис.8.3 Кореляційна функція висоти захоплення стебел при роботі льонокомбайна

Викривлення отриманої кривої, точніше відсутність поступового спадання функції пояснюється недостатністю експериментальних точок (недовготривалістю дослідів).

До залежності  $\rho_h(\tau)$  можна підібрати емпіричну формулу, тобто криву  $\rho_h(\tau)$  апроксимувати функцією  $\rho_h(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ , у якій параметр  $\alpha \approx 2,26$ .

Графік згладжуючої кривої проведений штрихованою лінією.

### Контрольні запитання

1. Випадкові функції та випадкові величини.
2. Які параметри характеризують випадковий процес ?
3. У чому полягає суть побудови математичних моделей СГМ, що містять випадкові величини ?
4. Дати визначення поняттю "кореляційна функція".
5. Охарактеризувати методи побудови моделей на основі випадкових процесів.

Тема №9

ВИЗНАЧЕННЯ ВИДУ ТА ПАРАМЕТРІВ ЕМПІРИЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ  
ПРИ ОБРОБЦІ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

*§1 Визначення коефіцієнтів і сталих лінійних емпіричних залежностей*

При проведенні експериментальних досліджень досить часто необхідно встановити, як впливає зміна вхідного фактора  $x$ , наприклад, щільність ґрунту на вихідний процес  $y$ , наприклад тяговий опір плуга, тобто визначити теоретичну залежність, яка б описувала поведінку досліджуваного процесу, або вибрати математичну функцію  $y = f(x)$ , яку, як правило, називають математичною моделлю об'єкта дослідження.

Визначити функцію  $y = f(x)$  або математичну модель об'єкта дослідження можна за результатами проведених пасивних (однофакторних) експериментів. Експеримент називають пасивним або однофакторним тоді, коли в кожному окремому досліді змінюють послідовно один вхідний діючий фактор при постійних значеннях всіх інших. У обраному нами випадку діє один фактор  $x$ . Тому, якщо в ході експерименту задавати цьому факторові значення  $x_1; x_2; \dots; x_N$ , то отримаємо відповідні значення функції  $y_1; y_2; \dots; y_N$ , де  $N$  - кількість проведених дослідів в експерименті або так званий масив експериментальних даних.

Коли між діючим фактором  $x$  і відповідними змінними значеннями функції  $y$  існує лінійна математична залежність, то в найпростішому випадку її можна описати лінійним рівнянням виду  $y = a + bx$ , де  $a$  та  $b$  - сталі невідомі коефіцієнти даного рівняння.

Вибране лінійне рівняння ще називають емпіричною формулою. Задача зводиться до визначення невідомих коефіцієнтів  $a$  та  $b$  вибраної емпіричної формули. Ці коефіцієнти визначаються за результатами проведених дослідів. Наприклад, при проведенні однофакторного експерименту при  $N = 8$  отримали такий масив значень експериментальних даних:

N, кількість дослідів	1	2	3	4	5	6	7	8
$x$ , щільність ґрунту	10	15	25	30	45	50	60	70
$y$ , тяговий опір плуга	67	101	168	202	301	334	404	470

Визначимо за цими отриманими експериментальними даними коефіцієнти  $a$  та  $b$  емпіричної формули  $y = a + bx$ , яка описує поведінку отриманих експериментальних даних.

Спосіб обраних точок

Визначення невідомих коефіцієнтів за способом обраних точок полягає в довільному виборі з масиву експериментальних даних такої кількості точок (відповідних значень  $x$  та  $y$ ), яка б дорівнювала кількості невідомих коефіцієнтів вибраної математичної моделі, тобто теоретичної залежності  $y = f(x)$ .

Оскільки у нашому випадку, вибрана нами емпірична формула  $y = a + bx$  має два невідомих коефіцієнти, то для їх визначення необхідно скласти систему двох лінійних рівнянь:  $y_1 = a + bx_1$  та  $y_2 = a + bx_2$ , де  $x_1, x_2$  - значення фактора, які відповідають вибраним точкам;  $y_1, y_2$  - значення функції, які відповідають вибраним точкам.

Наприклад, з наведеного масиву значень експериментальних даних, довільно обираємо два значення вхідного фактора:  $x_1 = 15$ ,  $y_1 = 101$  - перша експериментальна точка,  $x_2 = 50$ ,  $y_2 = 334$  - відповідно друга експериментальна точка.

Тоді складаємо систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 101 = a + b \cdot 15 \\ 334 = a + b \cdot 50 \end{cases}$$

Після математичного розв'язання цієї системи маємо:  $a = 1,1; b = 6,67$ . Таким чином, емпірична формула, що описує поведінку експериментальних даних, матиме вигляд:  $y = 1,1 + 6,7x$ .

Як бачимо, спосіб обраних точок дуже простий, але неточним, бо для визначення коефіцієнтів ми використали з усього масиву даних лише дві пари значень  $x$  та  $y$ .

Спосіб середніх

Спосіб середніх полягає в тому, що невідомі коефіцієнти емпіричної залежності визначаються з умови прирівнювання до нуля різниці суми всіх відхилень дійсних отриманих практичних значень експерименту, тобто величини  $y_i$  від отриманих обчислень  $y_{in}$ , які вираховували згідно з вибраною теоретичною залежністю:

$$\sum_{i=1}^N (y_i - y_{in}) = 0.$$

Для залежності виду  $y = a + bx$  маємо:

$$\sum_{i=1}^N [y_i - (a + bx_i)] = 0.$$

Після перетворень отримаємо:

$$aN + b \sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^N Y_i.$$

Таким чином, ми маємо одне рівняння, але з двома невідомими  $a$  та  $b$ .

Щоб розв'язати поставлену задачу, необхідно поділити весь масив експериментальних даних на стільки частин, скільки невідомих у рівнянні. У даному - на дві частини:

$$\begin{cases} a \frac{N}{2} + b \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} x_i = \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} y_i \\ a \frac{N}{2} + b \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N x_i = \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N y_i \end{cases}.$$

Для наведених експериментальних даних маємо:

$$\begin{cases} a \cdot 4 + b \cdot 80 = 538 \\ a \cdot 4 + b \cdot 225 = 1509 \end{cases}.$$

Після розв'язання системи лінійних рівнянь емпірична формула, яка описує поведінку експериментальних даних, матиме вигляд:

$$y = 0,6 + 6,7x.$$

При визначенні коефіцієнтів  $a$  та  $b$  способом середніх використовувався весь масив даних. Але цей спосіб ефективний лише у тих випадках, коли кількість невідомих коефіцієнтів, що входять в емпіричну формулу, не перевищує 1 чи 2, максимум - 3. Тому розглянемо найбільш поширений і точний спосіб визначення невідомих коефіцієнтів.

#### Спосіб найменших квадратів

Суть цього способу полягає в тому, що сума квадратів відхилень експериментальних даних  $y_i$  від  $y_{i0}$ , які визначені за формулою вздовж осі ординат  $OY$ , повинна бути мінімальною – принцип Лежандра. Відповідно до

цього принципу часткові похідні від функції  $U = \sum_{i=1}^N (y_i - y_{i0})^2$  по кожному з невідомих коефіцієнтів повинні дорівнювати нулю.

Для нашого випадку при вибраній емпіричній формулі  $y = a + bx$  маємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a} &= 0; \\ \frac{\partial U}{\partial b} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

де  $U = \sum_{i=1}^N [y_i - (a + bx_i)]^2$ .

Тоді можемо записати:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial b} &= \sum_{i=1}^N [y_i - (a + bx_i)]x_i = 0; \\ \frac{\partial U}{\partial a} &= \sum_{i=1}^N [y_i - (a + bx_i)] = 0, \end{aligned} \right\}$$

або після перетворення отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} b \sum_{i=1}^N x_i^2 + a \sum_{i=1}^N x_i &= \sum_{i=1}^N (x_i \cdot y_i); \\ b \sum_{i=1}^N x_i + a \cdot N &= \sum_{i=1}^N y_i. \end{aligned} \right\}$$

### §2 Визначення виду та параметрів емпіричних залежностей

Після проведення експерименту дослідник отримує ряд статистичних величин (масив експериментальних даних), коли кожному наданому їм в експерименті значенню вхідного фактора  $x_1; x_2; \dots; x_N$  відповідає певне значення вихідної досліджуваної величини (функції) або параметру оптимізації  $y_1; y_2; \dots; y_N$ . На підставі аналізу отриманого масиву експериментальних даних можливо підібрати таку математичну залежність  $y = a + bx$ , яка б описувала поведінку досліджуваних величин факторів та функції, тобто поведінку зміни досліджуваної функції від

зміни вхідного фактора. Подібний алгебраїчний вираз, тобто математична залежність, називається емпіричною залежністю або емпіричною формулою, а сам процес підбору - апроксимацією.

Емпіричні формули дають можливість оперативно визначати величину функції, тобто параметра оптимізації залежно від діючого фактора в широкому інтервалі його зміни. Бажано, щоб емпіричні формули були простими, але якомога точніше описували процес, що досліджується. Тому для підбору емпіричних формул використовують здебільшого елементарні функції, а для визначення коефіцієнтів та сталих цих функцій застосовують найбільш поширений спосіб - найменших квадратів.

Процес підбору емпіричних формул складається з двох етапів:

I етап. Дані експерименту наносять на Декартову систему координат, з'єднують отримані точки ламаною лінією і підбирають орієнтовно вигляд математичної залежності (моделі, формули) об'єкта дослідження.

II етап. Обчислюють невідомі коефіцієнти та сталі, що входять до обраної математичної формули.

Розглянемо методику визначення невідомих коефіцієнтів основних елементарних функцій.

Графіки основних елементарних функцій наведені на рис. 9.1 та рис.9. 2.

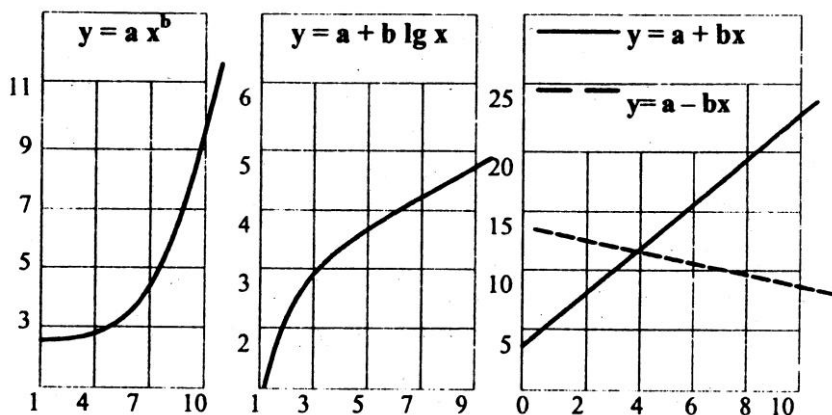


Рис. 9.1 Графіки степеневі (а), логарифмічної (б) та прямо пропорційної (в) функцій

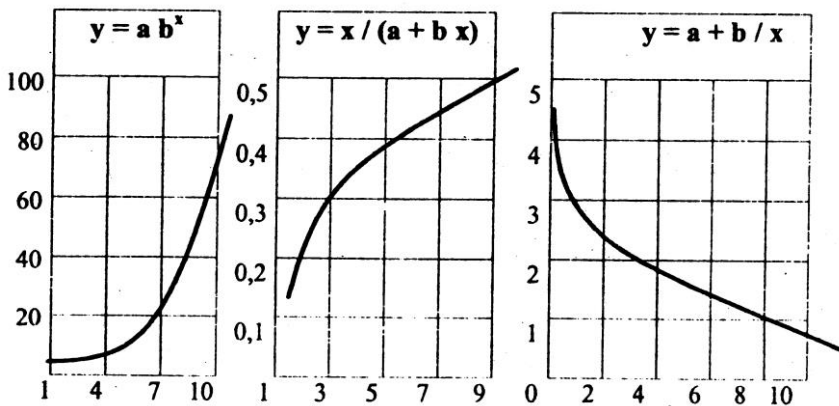


Рис. 9.2 Графіки показової (а) та зворотно пропорційних функцій (б, в)

Показова функція

Рівняння показової функції має вигляд:  $y = ab^x$  або  $\lg y = \lg a + x \lg b$ .

Невідомі коефіцієнти  $a$  та  $b$ , що входять до емпіричної формули, визначаються за формулами:

$$\lg a = \frac{\sum x_i^2 \sum \lg y_i - \sum x_i \sum (x_i \lg y_i)}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2};$$

$$\lg b = \frac{N \sum x_i \lg y_i - \sum x_i \sum \lg y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Наприклад, у результаті обчислень отримали  $\lg a = 0,6789$ , а  $\lg b = 0,03216$ , звідки знайшли, що  $a = 4,77$ ;  $b = 1,08$ . Тоді емпірична формула буде мати вигляд:  $y = 4,77 \cdot 1,08^x$ .

Знаходимо теоретичне значення апроксимованої кривої за формулою:

$$\lg y_i = \lg a + x_i \lg b = 0,6789 + x_i 0,03216,$$

де  $x_i$  - експериментальне значення  $i$ -го досліджу.

Степенева функція

Рівняння степеневі функції має вигляд:  $y = ax^b$  або  $lg y = lg a + b lg x$ .

Невідомі коефіцієнти  $a$  та  $b$ , що входять до емпіричної формули, визначаються за формулами :

$$lg a = \frac{\sum lg^2 x_i \sum lg y_i - \sum lg x_i \sum lg x_i lg y_i}{N \sum lg^2 x_i - (\sum lg x_i)^2};$$

$$lg a = \frac{N \sum lg x_i lg y_i - \sum lg x_i \sum lg y_i}{N \sum lg^2 x_i - (\sum lg x_i)^2}.$$

Подальший порядок проведення розрахунків аналогічний порядку п.1 (показова функція).

Логарифмічна функція

Рівняння логарифмічної функції має вигляд:  $y = a = b lg x$ .

Невідомі коефіцієнти  $a$  та  $b$ , що входять до емпіричної формули можуть визначатися за формулами :

$$a = \frac{\sum y_i (\sum lg^2 x_i - \sum y_i lg x_i \sum lg x_i)}{N \sum lg^2 x_i - (\sum lg x_i)^2};$$

$$a = \frac{N \sum y_i lg x_i - \sum y_i \sum lg x_i}{N \sum lg^2 x_i - (\sum lg x_i)^2}.$$

Подальший порядок проведення розрахунків невідомих коефіцієнтів  $a$  та  $b$  аналогічний порядку п.1 (показова функція).

Коефіцієнти та сталі, які входять до останніх емпіричних формул визначаються із системи нормальних рівнянь, отриманих способом найменших квадратів і наведених в табл.9.2.

Знак  $\sum$ , наведений у формулах таблиці для визначення невідомих] коефіцієнтів  $a$  та  $b$ , означає суму експериментальних значень (вихідних даних для проведення розрахунків) від  $i = 1$  до  $N$ , де  $i$ - порядковий номер досліду в експерименті;  $N$  - кількість проведених повторюваностей (дослідів) в експерименті.

Розв'язати систему нормальних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $a$  та  $b$  можна виконати будь-яким загальноприйнятим способом.



Вигляд нормальних рівнянь	
Вихідне рівняння	Система нормальних рівнянь
$y = a + bx$	$b \sum x_i^2 + a \sum x_i - \sum (x_i y_i) = 0$ $b \sum x_i + aN - \sum y_i = 0$
$y = a + \frac{b}{x}$	$b \sum \left( \frac{1}{x_i^2} \right) + a \sum \left( \frac{1}{x_i} \right) - \sum \left( \frac{y_i}{x_i} \right) = 0$ $b \sum \left( \frac{1}{x_i} \right) + aN - \sum y_i = 0$
$y = \frac{x}{a + bx}$	$a \sum \left( \frac{1}{x_i^2} \right) + b \sum \left( \frac{1}{x_i} \right) - \sum \left( \frac{1}{x_i y_i} \right) = 0$ $a \sum \left( \frac{1}{x_i} \right) + bN - \sum \frac{1}{y_i} = 0$

При виконанні першого етапу може виникнути такий випадок, що для апроксимації експериментальних даних за своєю графічною побудовою (виглядом) орієнтовно підходять дві чи три функції. Тому для оцінки ступеня точності вирівнювання (апроксимації), побудованої графічної залежності за результатами отриманих експериментальних даних, тією чи іншою вибраною апроксимуючою функцією, необхідно визначити величину так званої "нев'язки"  $\Theta = \sum \varepsilon^2$ , тобто сумарне середньоквадратичне відхилення теоретичних значень, обчислених за визначеною емпіричною формулою від експериментальних значень проведеного дослідження для кожної з вибраних для проведення апроксимації формул. Величина "нев'язки" визначається за формулою:

$$\Theta = \sum \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^N (y_{ie} - y_{it})^2,$$

де  $y_{ie}$  - експериментальні значення і-го дослідження;

$y_{it}$  - теоретичне значення і-го дослідження, визначеного за одержаною емпіричною формулою.

Для подальшого використання залишають те емпіричне рівняння, для якого величина невід'язки"  $\Theta = \sum \varepsilon^2$  найменша за числовим значенням, де знак  $\sum$  означає суму квадратів  $\varepsilon$  від  $i = 1$  до  $N$ , де  $\varepsilon = y_{ie} - y_{it}$ .

### Контрольні запитання

1. Який експеримент називається пасивним ?
2. У чому полягає суть визначення невідомих коефіцієнтів способом обраних точок ?
3. У чому полягає суть визначення невідомих коефіцієнтів способом середніх ?
4. У чому полягає суть визначення невідомих коефіцієнтів способом найменших квадратів ?
5. Дати визначення поняттю "масив експериментальних даних".
6. Охарактеризувати методи визначення виду та параметрів емпіричних залежностей.

### Тема №10

#### МАТЕМАТИЧНИЙ МЕТОД ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

При математичному методі планування експерименту досліді передують глибокий аналіз явища та вибір умов проведення дослідів для розв'язання поставлених задач з необхідною точністю. Завдяки використанню математичного апарату формалізується дія експериментатора, дослідження проводяться при одночасному варіюванні всіх факторів, рівні факторів приймаються за спеціальними розрахунками, число дослідів доводиться до мінімуму, а після кожної серії є можливість приймати обгрунтовані рішення. Кількість дослідів, завдяки математичному підходу до дослідження, значно менша, ніж при класичному методі.

При математичному плануванні до об'єкта дослідження ставляться вимоги відтворюваності і керованості.

Відтворюваність експерименту має на увазі ступінь відповідності результатів двох однакових дослідів. Ступінь відтворюваності перевіряється за критеріями Фішера, Кохрена і Стьюдента. Керованість – це можливість вибрати потрібний рівень варійованих чинників (факторів).

При конструюванні даним методом реакцію досліджуваної системи на дію факторів прийнято називати відгуком. Відгук – це результат досліді (шукана величина, шуканий показник або параметр). Крім терміну „відгук” можуть використовуватися інші терміни: параметр оптимізації, вихідний параметр.

Фактори, тобто способи і засоби дії на об'єкт, можуть бути кількісними (вологість ґрунту, швидкість руху, ширина захвату агрегату та ін.) та якісними (різні матеріали, способи тощо).

Вид функції відгуку називається моделлю. Це залежність

$$y = f(x_1, x_2, \dots).$$

Завдання дослідження полягає у її визначенні та знаходженні числових значень його коефіцієнтів, для чого слід спланувати і провести експеримент.

Математична модель подається як поліном, що також називається рівнянням регресії. Це рівняння може бути лінійним, неповним квадратним, повним квадратним або більш високих степенів.

Параметр оптимізації залежить від факторів  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , від їх квадратів і парних взаємодій. В основному обмежуються рівняннями другого порядку. При цьому для одержання лінійного або неповного квадратного рівняння застосовують повний або дробовий факторний експеримент (плани першого порядку), а для повного квадратного рівняння – ортогональні та рототабельні плани (плани другого порядку).

Для трифакторного дослідження повне квадратичне рівняння має вид (без врахування дії добутку всіх трьох факторів):

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3, \quad (1)$$

де  $x_1, x_2, x_3$  - кодові значення факторів;

$b_0, b_1, b_2, b_3, b_{11}, b_{22}, b_{12}, b_{13}, b_{23}$  - коефіцієнт за відповідних значень.

Неповне квадратне рівняння одержимо з (1) при  $b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0$ :

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 \quad (2)$$

Лінійне рівняння – з рівняння (2) при  $b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0$ :

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3. \quad (3)$$

Для двофакторного дослідження повне квадратне рівняння буде таким:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2 \quad (4)$$

Неповне квадратне рівняння матимемо із (4) при  $b_{11} = b_{22} = 0$ :

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 \quad (5)$$

Коли ще додати умову  $b_{12} = 0$  одержимо лінійне рівняння для двофакторного дослідження:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 \quad (6)$$

Аналогічно складається рівняння для чотирифакторного та п'ятифакторного дослідів і дослідів з великою кількістю факторів. Для однофакторного дослідження метод математичного планування експерименту не застосовується, отримані дані апроксимуються емпіричною залежністю в і-домами з математики способами.

Число дослідів при математичному методі планування експериментів значно менше, ніж при класичному. Для одержання лінійного і неповного квадратного рівнянь (плани першого порядку) шляхом застосування повного факторного експерименту (ПФЕ) планування здійснюється на двох рівнях ( $m = 2$ ), а для одержання повного квадратного рівняння (план другого порядку) – на трьох рівнях, тобто  $m = 3$ , проте є способи, за яких число рівнів може бути відмінне від трьох. При класичному методі проведення експериментів число рівнів повинно бути не менше п'яти.

Таким чином, коли число факторів складає 2, а число рівнів за кожним фактором однакове і дорівнює 5 (при класичному методі), то, користуючись формулою ( $n = m^k$ ) будемо мати число дослідів, якщо застосувати класичний метод  $n = 5^2 = 25$ , а якщо застосувати математичний метод планування для одержання лінійного і неповного квадратного рівнянь, то число дослідів буде  $n = 2^2 = 4$  (застосовуючи ПФЕ); якщо ж при використанні математичного методу планування ставиться задача мати повне квадратне рівняння, то  $n = 3^2 = 9$ . Як 4, так і 9 значно менші за 25, тобто математичний метод планування експерименту дав змогу різко зменшити число дослідів. Це наочно видно на прикладі експериментів з великою кількістю факторів. Так, у три факторному експерименті при класичному методі  $n = 5^3 = 125$ , а при математичному методі  $n = 3^3 = 8$  (лінійне і неповне квадратне рівняння) та ( $n = 3^3 = 27$ ) повне квадратне рівняння.

При ПФЕ зі збільшенням числа факторів зростає також число дослідів. При великій кількості факторів з метою зменшення числа дослідів застосовують роздрібнений факторний експеримент – РФЕ, або роздрібнені репліки (Який одержують діленням числа дослідів ПФЕ відповідно на 2, 4, 8 і т.д. Це будуть роздрібнені репліки, 1/2, 1/4, 1/8 тощо. Число дослідів у РФЕ, на відміну від ( $n = m^k$ ), дорівнює

$$n = m^{k-p}. \quad (7)$$

Де  $p$  – роздрібненість репліки (кількість взаємодій у повному факторному експерименті, що замінена додатковими факторами). В (7) для РФБ  $m = 2$ , тобто число рівнів складає 2. При  $p = 1$  експеримент типу  $m^{k-p}$  називається напівреплікою, при  $p = 2$  – чвертьреплікою тощо.

Порівнюючи ( $m^{k-p}$ ) з ( $m^k$ ), бачимо, що РФЕ число дослідів менше, ніж у ПФЕ. При складанні РФЕ із ПФЕ враховується обставина, що деякі взаємодії факторів незначні і будь-якого впливу на результат експерименту не дають.

Розглянемо порядок проведення ПФЕ експерименту.

Планування і проведення ПФЕ складається з таких основних етапів: кодування факторів, складання план-матриці експерименту, рандомізація

дослідів, реалізація плану експерименту, перевірка відтворюваності дослідів, перевірка адекватності моделі, оцінка значущості коефіцієнтів регресії.

Спочатку закодуємо фактори для переведення натуральних факторів у безрозмірні величини з метою побудови плану-матриці експерименту. Зв'язок між кодovими і натуральними значеннями факторів встановлюється залежністю

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i} \quad (8)$$

де  $x_i, X_i$  - відповідно кодове та натуральне значення і-го фактора;

$X_{i0}$  - натуральне значення і-го фактора на нульовому рівні;

$\Delta X_i$  - інтервал варіювання і-го фактора.

Нульовим називається рівень, що займає центр інтервалу (середнє значення фактора).

Після закінчення кодування факторів складають план-матрицю експерименту для чотирьох дослідів ( $n = 2^2 = 4$ ). При цьому досліді № 1 являє собою сукупність  $x_1$  і  $x_2$  на нижньому рівні, дослід № 2 – сукупність  $x_1$  на нижньому, а  $x_2$  - на верхньому рівнях; дослід № 4 -  $x_1$  і  $x_2$  - на верхньому рівні. План-матриця поданий у табл. 1, він називається планом першого порядку і дозволяє проводити незалежну оцінку коефіцієнтів регресії.

Таблиця 10.1

План-матриця ПФЕ -2.

Номер дослідів (точка плану)	Значення кодування факторів		Взаємодія кодovаних факторів $X_1 X_2$
	$X_1$	$X_2$	
1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1

Після цього проводиться рандомізація дослідів з метою встановлення послідовності їх проведення. Справа в тому, що у залежить не тільки від

$x_1$  і  $x_2$ , а й від інших факторів, які можуть бути невідомі досліднику. Проявлення невідомих факторів (наприклад, неоднаковий механічний склад ґрунту на ділянці поля, неоднаковий мікрорельєф поля та ін. ( може по-різному відзначитися на результатах експерименту і буде залежати від того чи будемо ми проводити досліди і послідовності 1, 2, 3, 4 або 1, 3, 2, 4 чи в будь-якій іншій. Щоб виключити цей вплив, встановлюють випадковий порядок постановки дослідів у часі, для чого користуються таблицями випадкових величин, витяганням номерів з урни або іншими способами.

Проте досліди завжди проводяться в декількох повторюваностях, найчастіше в трьох, хоча для окремих найбільш трудомістких варіантів число повторюваностей може бути менше 3.

Нехай у подальшому при проведенні дослідів (при реалізації плану-матриці експерименту) ми одержимо дані, де  $u$  - номер дослідів,  $u_1$  - номер дослідів в першій повторюваності ( в першій реалізації плану),  $u_2$  - номер дослідів в другій повторюваності ( другій реалізації плану) тощо.

Значення  $y_{n1}, y_{n2}$  і  $y_{n3}$  отримані в результаті дослідів, а значення  $\bar{y}_n$  - при розрахунках за формулою  $\bar{y}_n = \frac{1}{2}(y_{n1} + y_{n2} + y_{n3})$ .

Необхідно перевірити їх відтворюваність. Перевірка відтворюваності дослідів при однаковому числі повторюваностей для кожного дослідів /для кожної точки плану/ проводиться за критерієм Кохрена, табличне значення якого /дод. 2/ позначимо  $G(0.05, n, f_u)$ , де 0,05 означає 5%-й рівень значущості /дорівнює  $1 - \alpha$ , де  $\alpha$  - довірча ймовірність,  $n$  - число незалежних оцінок дисперсії /число дослідів/;  $f_n = m_o - 1$  - число ступенів вільності кожної оцінки, тут  $m_o$  - число повторюваностей. Перевірка відтворюваності проводиться за умови

$$G \leq G(0.05, n, f_u), \tag{9}$$

де

$$G = S_{u \max}^2 / \left( \sum_{u=1}^n \overline{S_u} \right) \tag{10}$$

Тут  $S_u^2$  - дисперсія, що характеризує розсіювання результатів в  $u$  - му досліді / тобто на  $u$  - му поєднанні рівнів факторів/;

$\overline{S_u}^2$  - більша із дисперсій.

$$S_u^2 = \frac{1}{m_o - 1} \sum_{i_k=1}^{m_o} (y_{u i_k} - \bar{y}_n)^2, \quad (11)$$

де  $i_k$  – номер повторюваності;

$y_{u i_k}$  - вихідний параметр при  $i_k$  повторюваності.

Дисперсія відтворюваності /помилка досліду/ визначається за формулою

$$S_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n S_u^2 \quad (12)$$

У випадку невиконання умови відтворюваності слід перевірити точність вимірювань /точність показів приладів/ і умови проведення досліду з максимальною дисперсією, а також проаналізувати вплив неврахованих, неконтрольованих факторів на можливість внесення в досліди систематичних або одиничних грубих похибок вимірювання. Можна також зменшити інтервали варіювання факторів, збільшити число повторюваностей дослідів.

Оскільки розглядуваний процес відтворюваний, то вираховують коефіцієнти рівняння регресії:

$$\left. \begin{aligned} b_o &= \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n \bar{y}_u; \\ b_i &= \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n x_{i_u} \bar{y}_u; \\ b_{ij} &= \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n x_{i_u} x_{j_u} \bar{y}_u. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

де  $n$  – число точок плану /число дослідів/;

$\bar{y}_u$  - середнє арифметичне значення вихідного параметра в  $u$ -му досліді;

$x_{i_u}$  - значення  $i$ -го кодованого фактора в ряду матриці в  $u$ -му досліді;

$x_{j_u}$  - значення  $j$  - го кодованого фактора в ряду матриці в  $u$ -му досліді.

У цих формулах  $i$ -номер кодованого фактору в лінійних числах рівнянь (2), (3), (5), (6) та першого кодованого фактора в числах рівнянь (2), (5), що відображають парну взаємодію, а  $j$  - номер другого кодового фактора в членах рівнянь (2) і (3), що відображають парну взаємодію.

Отримаємо рівняння регресії:

$$F = S_{ad}^2 / S_y^2 < F(0,05; f_{ad}; f_y) \quad (14)$$

де  $S_{ad}^2$  - дисперсія адекватності;

$F = (0,05; f_{ad}; f_y)$  - критерій Фішера при 3%-му рівні значущості;

$f_{ad}$  - число ступенів вільності дисперсії адекватності;

$f_{ad} = n - \kappa - 1$  - число факторів;

$\kappa$  - число ступенів вільності дисперсії відтворюваності.

$$f_y = (m_o - 1)n \quad (15)$$

де  $m_o$  - число повторюваностей.

Дисперсія  $S_{ad}^2$  обчислюється за формулою:

$$S_{ad}^2 = \frac{1}{n - \kappa - 1} \sum_{u=1}^n (y - \bar{y}_u)^2 \quad (16)$$

де  $y$  – розрахункове значення відгуку в  $i$ -му досліді лінійної частини формули.

Таким чином, значення критерію Фішера:

$$F = S_{ad}^2 / S_y^2,$$

де  $S_y^2$  - помилка дослідів.

У випадку неадекватності лінійної моделі необхідно перевірити адекватність неповного квадратного рівняння. Для цього ставлять додаткові досліді всередині експерименту, тобто коли значення факторів знаходяться на нульовому рівні. При цьому виходять з відомого із математичної статистики положення, що для знаходження дисперсії адекватності  $S_{ad}^2$  число проведених дослідів повинно бути більше від числа, коефіцієнтів у рівнянні регресії.

Після перевірки адекватності рівняння проводиться оцінка значущості коефіцієнтів регресії за допомогою критерій Стюдента. Коефіцієнт вважається значущим /таким, що суттєво впливає на відгук/, якщо виконується нерівність

$$|b_a| \geq \Delta b_a = t(0,05; f_y) \frac{S_y}{\sqrt{n}} \quad (21)$$

де  $b_a$  - коефіцієнти  $b_o, b_i, b_{i,j}$  у формулах (13);  $\Delta b_a$  - довірча границя;

$t(0,05; f_y)$  - критерій Стюдента при 5%-му рівні значущості та числі ступенів вільності дисперсії відтворюваності  $f_y$ .



Рівень значущості дорівнює  $1-\alpha$ , де  $\alpha$  - довірна ймовірність. З урахуванням цього критерій Стюдента можна визначити за таблицею.

Графічно інтерпретація є поверхнею відгуку ABCD (рис.1) у декартовій системі координат  $x_1, O, x_2, y$  на осях якої відкладені значення досліджуваних факторів  $x_2$  в кодовому вигляді, а також значення  $y$  - функції відгуку, отримані за розрахунками. Проекції точок цієї поверхні на площину позначені  $A', B', C', D'$ . У випадку графічної інтерпретації лінійної частини рівняння поверхні відгуку є площиною у тривимірному просторі / у випадку, коли кількість досліджуваних факторів  $k > 2$ , це - гіперплощина в  $(k+1)$  - вимірному факторному просторі. Коефіцієнти регресії при лінійних членах характеризують нахил площини до відповідних осей.

Якщо перетнути поверхню  $ABCD$  будь-якою площиною, перпендикулярною до осі  $y$ , то одержимо пряму, кожній точці якої відповідає одне й те саме значення відгуку  $y$ .

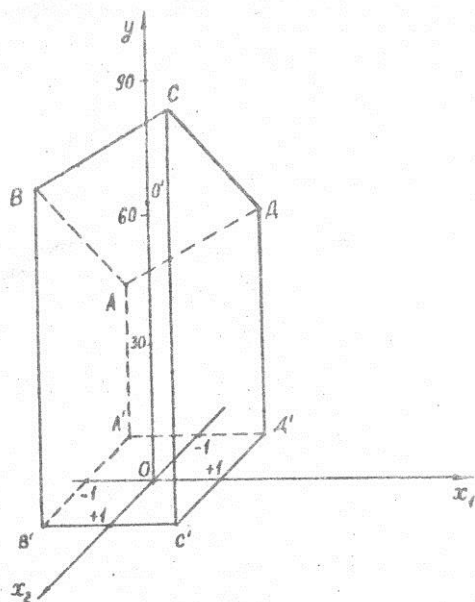


Рис.10.1 Поверхня відгуку

Знак при коефіцієнті в рівнянні регресії лінійного виду показує характер впливу відповідного фактора: знак „+” свідчить, що зі збільшенням значення фактора величина відгуку зростає, а знак „-”, що вона спадає. Чим більше значення коефіцієнта, тим сильніший вплив фактора. Коли необхідно отримати максимальне значення відгуку, то значення всіх факторів, коефіцієнти в яких мають знак „+”, слід приймати максимальними, а значення факторів, коефіцієнти в яких мають знак „-”, мінімальними. Абсолютні значення коефіцієнтів регресії збільшуються зі збільшенням інтервалів варіювання.

Таким чином, у праведному прикладі збільшення значення відгуку зв’язане з одночасним збільшенням обох прийнятих до розгляду факторів.

Кількісний вклад кожного з факторів визначається коефіцієнтами регресії.

Лінійне рівняння одержується аналогічно, але з самого початку не враховується взаємодія факторів, тобто ми починаємо розрахунки з виразу типу (3) або (6).

У реальних дослідах, як правило, на початку ведеться побудова лінійної моделі виду (3) або (6). Якщо ця модель повністю задовольняє вимогам адекватності та значущості коефіцієнтів регресії, то моделювання процеси цим закінчується; коли ж вимоги адекватності та значущості коефіцієнтів регресії не задовольняються, переходить до розгляду неповного квадратного або квадратного рівняння.

Перехід від рівняння, у якому  $x_i$  - фактори в кодовому вигляді до рівняння з факторами  $X_i$  в натуральному вигляді проводиться з урахуванням (3), згідно з чим

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i}$$

### Контрольні запитання

1. Дати визначення поняттю ”планування експерименту”.
2. Що таке математична модель об’єкта дослідження ?
3. Що таке план-матриця ?
4. Які принципи лежать в основі побудови плану-матриці ?
5. Як визначається значущість коефіцієнтів регресії ?
6. Поняття адекватності математичної моделі.
7. Критерії Стьюдента і Фішера та їх визначення.

Тема №11

АНАЛОГОВЕ ТА СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

§1 Аналогове моделювання

Потреба в аналоговому моделюванні сільськогосподарських машин виникає у випадку, коли важко або неможливо проводити дослідження із оригіналом, з реальним об'єктом. Загальна постановка питання подібна до фізичного моделювання. Однак розробляти і фізичну модель не завжди доцільно і економічно вигідно. В цьому випадку застосовують аналогове моделювання на аналогових електронно-обчислювальних машинах (наприклад МН-7). Аналогова обчислювальна машина (АОМ) являє собою електронну основну машину із набором моделюючих блоків.

Основа методу – тотожність диференціальних рівнянь, що описують різні явища, процеси та об'єкти. Іншими словами це застосування методу аналогій в моделюванні різного роду систем.

Аналогове моделювання – моделювання із зміною природи явища, однак із збереженням його сутності.

Наприклад, електрична схема з індуктивністю, опором і ємністю (коливальний контур) і механічна система, що включає тіло з певною масою, та пружину деякої жорсткості описується рівнянням одного виду:

$$\ddot{x} + m\dot{x} + kx = P(t).$$

Тобто підбирається електрична схема, яка тотожна механічній системі, тобто тертю, удару і ін.

В XIX столітті при розробці математичних моделей було встановлено, що об'єкти-оригінали різноманітної фізичної природи мають різні розрахункові схеми (розрахункові моделі), але є ідентичними за структурою математичних співвідношень. Цю властивість математичних моделей називають математичним ізоморфізмом.

Дві математичні моделі вважаються ізоморфними, якщо кожному елементу і співвідношенню між елементами в одній моделі відповідає один елемент і одне співвідношення в іншій моделі.

Якщо два об'єкти ізоморфні, то кожен з них може бути моделлю іншого.

Математичний ізоморфізм є важливим частковим випадком методу аналогій. Він дозволяє виконувати адекватний перехід від однієї математичної моделі до іншої. Причому, ці моделі можуть бути різної фізичної природи.

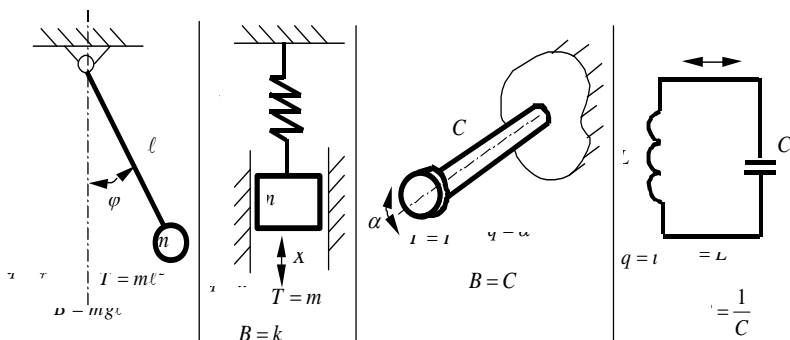


Рис.11.1. Розрахункові схеми ізоморфних математичних моделей

Таблиця 11.1

Відповідність між фазовими змінними і компонентами моделей в системах різної природи

Підсистема	Фазові змінні		Компоненти		
	Тип потоку	Тип потенціалу	Типу	Типу	Типу
Електрична	Струм	Напруга	Опір	Ємність	Індуктивність
Механічна	Швидкість	Сила	Тертя	Маса	Жорсткість
Механічна обертова	Кутова швидкість	Момент	Тертя	Момент інерції	Кутова жорсткість
Гідравлічна (пневматична)	Витрата	Тиск	Тертя	Гідравлічна ємність	Гідравлічна індуктивність
Теплова	Тепловий потік	Температура	Теплоопір	Теплоємність	

За допомогою аналогового моделювання розв'язуються практично усі задачі, у яких явища та процеси описуються диференціальними рівняннями. Метод широко використовується при перевірці теоретичних положень. Однак отримані результати обов'язково вимагають експериментальної перевірки. Аналогове моделювання сільськогосподарських машин дає можливість значно знизити затрати часу, праці і засобів на дослідження.

§2 Теорія масового обслуговування

Теорія масового обслуговування (ТМО) – теорія про пропускну здатність системи, або теорія черг. Багато процесів в агропромисловому комплексі набули характеру масовості. Тому виникає необхідність у розв’язку задач раціонального, точніше оптимального співвідношення між окремими елементами виробничого процесу. Так, наприклад, на шляху автомобільних перевезень розміщена станція заправки паливом. Ставиться задача – яка кількість колонок повинна бути, щоб обслуговувати автомобілі без затримки. Або ж яка кількість робітників потрібна на пункті технічного обслуговування сільськогосподарської техніки, щоб робітники були достатньо повно завантажені, а техніка вчасно підготовлена до роботи. На полі працює група комбайнів. Виникає задача – встановити кількість транспортних засобів, необхідних для перевезення врожаю в потрібному ритмі. При цьому, через нестабільність інтервалів часу, неможливо відразу точно коли той чи інший автомобіль підійде на заправку, на станцію технічного обслуговування або ж до комбайна. Про це можна говорити лише в загальних рисах. Тобто теорія масового обслуговування – це теорія про кількісні співвідношення, а не якісні.

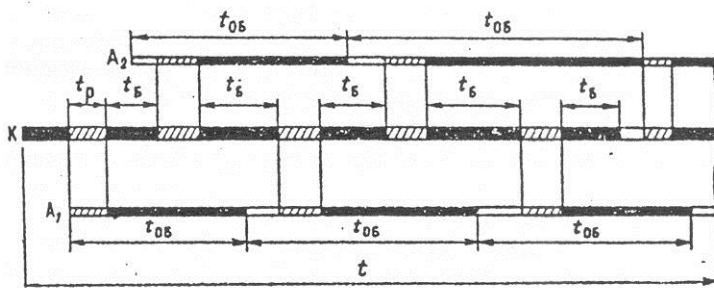


Рис.11.2 Схема обслуговування зернозбирального комбайна  $K$  двома автомобілями  $A_1$  та  $A_2$ :

$t_B$  – тривалість наповнення бункера;

$t_P$  – тривалість одночасної роботи (обслуговування);

$t_{0B}$  – час обороту транспорту.

Робота системи масового обслуговування (рис.1) зводиться до обслуговування заявок, що поступають одна за іншою через випадкові проміжки часу. Обслуговуючі одиниці, їх називають каналами, приймають заявку і обслуговують її. При цьому тривалість обслуговування окремих заявок не лишається постійною, а характеристики випадкових величин як

інтервалів постування заявок, так і тривалість їх обслуговування або ж відомі, або ж можуть бути отримані експериментально.

Канал, що звільнився, приступає до обслуговування наступної заявки. Система обслуговування володіє відповідною пропускнуою здатністю, що залежить від числа каналів і їх продуктивності. В теорії масового обслуговування встановлюються залежності між потоком заявок, пропускнуою здатністю системи і ефективністю обслуговування, під якою в залежності від мети приймається час простою обладнання, затрати засобів, повнота завантаження працівників.

Системи масового обслуговування поділяються на розімкнені і замкнуті.

Розімкнуті системи – це системи в яких вимога обслуговується, покидає систему і в подальшому може в неї не повертатись. Тобто система весь час обслуговує ніби нові заявки. Наприклад, станція заправки пальним та пункт технічного обслуговування техніки розглядаються як розімкнуті системи.

Замкнуті системи – це системи в яких вимога після обслуговування через деякий проміжок часу знову поступає в систему, тобто циркулює у замкнутому контурі. Обслуговування комбайнів транспортними засобами – приклад замкнутої системи.

Окрім того, системи розрізняються за числом обслуговуючих каналів і за характером поведінки заявки – з відмовами та з очікуванням.

Суть методу ТМО полягає в тому, що описується можливий стан системи з використанням геометричної схеми, так званого графа стану. При цьому береться до уваги, що система відноситься до дискретного виду. Якщо процес є випадковим, то складаються рівняння, що описують всі випадкові події  $P_i(t)$  як функції часу. А це дає змогу встановити: ймовірність того, що вільними є всі канали, що зайнято  $K$  каналів, ймовірність відмови, число заявок, що перебувають в черзі, середню тривалість простою заявки в черзі і ін.

Більшість залежностей у ТМО виведено в межах найпростішого потоку заявок і розподілу тривалості їх обслуговування. Під найпростішим потоком заявок розуміється потік, що володіє такими властивостями: стаціонарність, відсутність післядії, ординарність.

Стаціонарність потоку означає, що ймовірність появи того чи іншого числа подій за певний проміжок часу залежить лише від розміру цього проміжку і не залежить від місце розташування його на осі часу, тобто від початку відліку.

Відсутність післядії означає, що події за встановлений період не залежать від подій, що виникли в інші періоди.

Ординарність потоку означає, що ймовірність появи двох чи більше подій протягом невеликого відрізка часу мала у порівнянні з появою однієї події.

Порядок проведення досліджень такий. Складають принципову схему обслуговування, у якій вказують порядок надходження заявок на обслуговування, прийняту схему обслуговування і повертання заявки в систему. Ведуть спостереження за обслуговуванням, визначають густину або інтенсивність потоку заявок, середню їх кількість на одиницю часу та встановлюють закон появи інтервалів подій. Виконують спостереження за тривалістю обслуговування та визначають закон розподілу часу обслуговування. Визначають тип системи (розімкнута, замкнута, з очікуванням чи відмовою) та підбирають математичну модель. Отримані залежності та оцінки аналізуються та вибираються шляхи вдосконалення роботи системи.

Якщо потік заявок є найпростішим, то вираховуються такі показники: імовірнісні показники системи, простоті, коефіцієнти завантаження і ін.

Багато реальних потоків в сільському господарстві не є стаціонарними. Так тривалість наповнення бункера комбайна протягом доби не є постійною. Або ж інтервал видачі наповнених бункерів залежить від своєчасності обслуговування транспортними засобами. У таких випадках “масовість” не є великою і помилка при заокругленні результату потрібної кількості техніки перевищує точність розрахунку. Тому на даний момент досліджень приймають, що потік є найпростішим і розраховують необхідні характеристики.



Рис.11.3 Застосування ТМО у сільськогосподарському виробництві

При використанні сільськогосподарської техніки зустрічаються розімкнуті системи, однак найбільш поширеними є замкнуті. З першими стикаються тоді, коли транспорт працює на позагосподарчих перевезеннях.

Як правило, система ТМО вирішує такі задачі:

- визначити потребу у кількості обладнання пункту технічного обслуговування;
- визначити кількість працівників для обслуговування обладнання;
- розрахувати співвідношення машин на різноманітних виробничих процесах (комбайнів, посівних машин, завантажувачів і ін.);
- розрахувати простоті та продуктивність машин і обладнання в окремих ланках технологічного процесу, їх кількість;
- розрахувати місткість накопичуючи агрегатів.

### *§3 Статистичне моделювання*

Статистичне моделювання, бо метод Монте-Карло, використовується для розв'язку як імовірнісних задач (подібних до тих, що ставляться в теорії масового обслуговування) так і задач іншого типу, наприклад визначення числових значень параметрів.

Ідея методу зводиться до того, що виконується «розіграш» випадкового явища за спеціально розробленою процедурою. При цьому кожного разу отримується нова реалізація, відмінна від інших. Така реалізація різнитиметься від реалізації дійсного процесу. Але так як таких реалізацій отримують досить багато, то накопичена статистика значною мірою наближається до статистики реального процесу. Це машинний метод, якому притаманна універсальність. Максимум роботи переноситься на машину. Використовуючи цей метод, можна реальні (натурні) експерименти замінити моделюванням (програванням на ЕОМ), що забезпечує суттєву економію витрат. Як відмічалось, теорія масового обслуговування має розв'язки лише для найпростіших потоків заявок. Однак в реальних умовах інтервал між двома послідовними вимогами, а також час обслуговування часто не підпадає під відомий розподіл і отримати аналітичний розв'язок вдається не завжди.

Більш того, багато систем при їх функціонуванні створюють перепони для отримання рішень методами теорії масового обслуговування. Так, розрахунок показників функціонування такої, здавалось би, простої системи як збирання врожаю комбайнами, транспортування, зважування виконується із певними труднощами та з рядом допущень.

Для розв'язку задач методами статистичного моделювання необхідно перш за все знати закони розподілу проміжків часу між надходженням двох



послідовних вимог та тривалості обслуговування. Найчастіше з цією метою проводиться хронометраж.

Знаючи закон розподілу інтервалів надходження заявок та їх обслуговування, описують можливі стани системи і умови переходу від одного стану в інший. Так, на прикладі комбайна, такими співвідношеннями будуть: підготовка до роботи, робота, усунення технологічних відмов, очистка робочих органів, натяг пасів, очікування транспортних засобів.

Далі визначають необхідні оператори, що характеризують стан системи. Розробляють алгоритм, представляють блок-схему модельованого алгоритму. Перед початком моделювання вказуються початкові умови та межі інтервалів часових процесу.

За прийнятим алгоритмом проводять «розіграш» на ЕОМ. За результатами моделювання на ЕОМ визначають необхідні показники і характеристики (наприклад, для визначення числа комбайнів, але при різній кількості транспортних засобів – середній час простою комбайна і транспортних засобів). На основі характеристик легко розрахувати продуктивність машини, приведені затрати засобів в залежності від числа транспортних засобів. Тобто знайти оптимальний варіант.

Коло задач, що вирішуються статистичним моделюванням дуже широке. Насамперед це розрахунок надійності та ін.

Цей метод варто застосовувати не лише при розв'язку задач, пов'язаних зі складними системами, які містять підсистеми. (наприклад, завантаження, транспортування і перевантаження в бункер, розкидання по полю), у яких випадкові фактори складно переплітаються, а і для перевірки точності аналітичного розрахунку. Варто відмітити, що статистичні методи є громіздкими і потребують багато машинного часу. При проектуванні виробничих процесів в сільському господарстві розроблені лінії діють відносно не тривалий час. Тобто їх необхідно створювати з врахуванням особливостей процесу, особливостей кожного поля. Використання в таких умовах статистичних методів пов'язано з великою кількістю реалізацій, а це важко і дорого. Тому в тих випадках, коли стикаємось з не найпростішими потоками, слід розрахунки вести наближеними методами теорії масового обслуговування, а точність розрахунку перевіряти статистичними методами.

### **Контрольні запитання**

1. В чому сутність аналогового моделювання ?
2. Що таке математичний ізоморфізм?
3. Охарактеризувати відповідність між фазовими змінними і компонентами моделей в системах різної природи.

4. Основні поняття теорії масового обслуговування. Яка сфера її застосування?
5. В чому сутність статистичного моделювання ?
6. Поняття розіграшу моделі.

### Тема № 12

## ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ РОЗМІРНОСТІ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН

### *Вступ*

За останні роки збільшується кількість задач, які можуть бути вирішені за допомогою ЕОМ. Однак дослідження не завжди можливо здійснити шляхом математичних міркувань і обчислень. У ряді випадків рішення механічних задач зустрічається з математичними труднощами. Дуже часто взагалі не існує математичної постановки задачі, через те що процес чи явище настільки складний, що для нього немає опису. В цих випадках головну роль відіграють експериментальні методи дослідження. Перевага фізичного моделювання - можливість рішення задач навіть у тих випадках, коли модель сформульована не повністю і числове моделювання є неможливим.

Оптимальним є сполучення фізичного і числових моделювання поряд з удосконаленням техніки лабораторного експерименту, методів обробки його результатів та способів опису математичних моделей і числових методів їх подавання.

На цей час грамотна постановка і обробка експериментів неможлива без врахувань питань розмірності і подібності.

В окремих випадках аналіз розмірностей і теорія подібності є єдино можливим теоретичним методом вивчення процесів на початкових стадіях. Звичайно аналіз розмірностей і теорія подібності є дуже корисними і в теорії і в практиці. При цьому результати можуть бути одержані дуже просто. Особливо цінні висновки з допомогою аналізу розмірностей можна одержати при розгляданні процесів, що залежать від великої кількості параметрів. Методи теорії розмірності і подібності грають особливо велику роль при моделюванні різних явищ.

### *§1 Аналіз розмірностей*

При розв'язку задач закони природи подаються у вигляді функціональних рівнянь, як правило, диференційних. Рівняння являють собою функціональний зв'язок між розрізненими фізичними величинам

Аналіз розміностей, по суті, являється аналізом рівнянь, що описують явище у самому загальному вигляді.

В основі теорії розмірності лежить поняття про розмірність фізичних величин, що характеризує явище, яке досліджується. Термін "фізична величина" виражає лобу властивість тіла: довжину, вагу, в'язкість, масу, температуру, об'єм і т.д. Кожна з названих велич характеризується якістю та кількістю. Вимірити яку-небудь величину означає знай відношення даної величини до відповідної одиниці вимірювання. Це відношення є мірою даної величини. Так як поняття "більше - менше" застосовується тільки до однорідних величин, очевидно, що і зрівнювати можна тільки однорідні величини. Можна зрівнювати силу натягання пружини з силою ваги гирі, але не можна зіставляти об'єм склянки та вагу чорнильниці. Не можна виміряти швидкість одиницею маси або площу - одиницею ваги.

## *§2 Розмірні і безрозмірні величини*

При розгляданні числових значень різних фізичних величин розрізняють одиниці розмірні (іменовані) та безрозмірні (абстрактні).

Величини, числове значення яких залежить від прийнятих масштабів, тобто від системи одиниць вимірювання, називаються розмірними або іменованими величинами.

Величини, числове значення яких не залежить від застосованої системи одиниць вимірювання, називаються безрозмірними або абстрактними величинами.

Довжина, час, сила, енергія, момент сили і т.д. можуть служити прикладами розмірних величин. Кути, відношення двох довжин, відношення квадрата довжини до площі, відношення енергії до моменту сили і т.п. - приклади безрозмірних величин.

Однак поділ величин на розмірні і безрозмірні є деякою мірою умовним. Так, наприклад, кут ми тільки що назвали безрозмірною величиною. Але відомо, що кути можна вимірювати в радіанах, в градусах, в частках прямого кута, тобто в різних одиницях. Отже, число, що визначає кут, залежить від вибору одиниці вимірювання. Тому кут можна розглядати і як величину розмірну.

Визначимо кут як відношення стягуючої його дуги кола до радіуса. Цим самим буде визначена однозначно одиниця вимірювання кута - радіан. Коли тепер в усіх системах одиниць вимірювання кути вимірювати тільки у радіанах, то кут можна розглядати як безрозмірну величину.

Якщо для довжини ввести єдину фіксовану одиницю вимірювання у всіх системах одиниць вимірювання, то після цього довжину можна буде вважати безрозмірною величиною.

Але фіксовані одиниці вимірювання для кутів зручно застосовувати, а для довжини не зручно. Це пояснюється тим, що для геометрично подібних фігур відповідні кути однакові, а відповідні довжини неоднакові, і тому в різних питаннях вигідно вибирати за основну довжину різні відстані.

З другого боку, величини абстрактні (безрозмірні) в загальноприйнятому розумінні цього слова можна висловити за допомогою різних чисел. Справді, відношення двох довжин можна виразити не тільки у вигляді звичайної арифметичної частки, але і в процентах, а також іншими способами.

Таким чином, поняття розмірних і безрозмірних величин є відносне поняття. Введемо деякий запас одиниць вимірювання. Тоді величини, для яких одиниці вимірювання однакові в усіх прийнятих системах одиниць вимірювання, ми будемо називати безрозмірними.

З цього визначення витікає, що деякі величини можна розглядати в одному випадку як розмірні, а в іншому - як безрозмірні.

### *§3 Основні і похідні одиниці*

Фізичні величини зв'язані між собою відповідними рівняннями. Ці рівняння, як правило, являють собою залежність одної величини від ряду інших. Приймаючи деякі з них в якості основних та встановивши для них одиниці вимірювання, можна одиниці інших величин виразити через основні (первинні). Одиниці вимірювання неосновних величин називаються похідними або другоразовими.

Число основних одиниць визначається характером явища чи процесу, що розглядається.

Зазвичай необхідно і достатньо мати три основні одиниці. В якості двох з них прийняти одиниці довжини та часу, третя - одиниця маси (в фізичних дослідженнях) або одиниця сили (в техніці).

При дослідженні інших фізичних явищ необхідно крім трьох основних одиниць вводити додаткову одиницю, специфічну для даної області величини. Так, наприклад, в термодинаміці такою величиною є температура.

Найбільш широке поширення одержали системи, які мають в основі одиниці довжини, часу і маси. Ці системи називають абсолютними або фізичними. Системи, де в якості трьох основних одиниць прийняти одиниці довжини, часу та сили, називають технічними. Різниця між ними містить тільки в визначенні маси та сили.

Основні одиниці вимірювання задаються довільно в вигляді тих або інших еталонів штучних або природних.

Як тільки встановлені основні одиниці вимірювання, одиниці вимірювання для інших механічних величин, наприклад, для сили, енергії, швидкості, прискорення і т.п., отримуються автоматично з їх визначення. Для

цього необхідно мати яку-небудь закономірність, що зв'яже цю величину з іншими вже відомими величинами. Ці залежності можуть бути двох типів. Одні по суті являють собою визначення нової величини. Так, швидкість, за визначенням, є відношення відстані, що проходиться за визначений проміжок часу, до величини цього проміжку часу. Тому за одиницю швидкості можна прийняти відношення одиниці довжини до одиниці часу в новій системі. Так саме густина за визначенням - відношення деякої маси до об'єму. Тому за одиницю густини можна прийняти відношення одиниці маси до одиниці об'єму.

Залежності другого типу виражають знайдені експериментально або теоретично зв'язки між дослідженими величинами. До залежностей цього типу відносяться: закон всесвітнього тяжіння, закон Кулона про взаємодію електричних зарядів.

Сукупність основних одиниць вимірювання, достатніх для вимірювання характеристик класу явищ називається системою одиниць вимірювання. Так, в механіці часто використовувалась система одиниць вимірювання СГС, в якій за одиницю маси прийнято 1 грам (г) - 1/1000 маси деякого спеціально виготовленого та старанно збереженого еталону, за одиницю довжини - 1 сантиметр (см) - 1/1000 довжини другого зталону та за одиницю часу - 1 секунда (с) - 1/86400 доля середньої сонячної доби.

З 1 січня 1963 року державним стандартом колишнього СРСР введена єдина Міжнародна система одиниць СИ (SI – System International). В системі СИ одиницею маси вважається 1 кілограм (кг), що дорівнює 1000 г - повна маса згаданого вище еталона маси, одиницею довжини вважається 1 м, що дорівнює 100 см - повна довжина згаданого вище еталона довжини, одиницею часу вважається 1 с.

Класом систем одиниць вимірювання називається сукупність систем одиниць вимірювання, що відрізняються між собою тільки величиною основних одиниць вимірювання.

Так системи одиниць вимірювання СИ і СГС входять в клас систем одиниць вимірювання, в яких основними одиницями вимірювання є маса, довжина та час. Цей клас позначається МТЛ, де М - символ одиниці маси, L - символ одиниці довжини, Т - символ одиниці часу.

Вираження одиниці вимірювання даної величини через основні одиниці вимірювання називається розмірністю. Розмірність величини **a** Максвелл запропонував позначати через  $[a]$ .

Слід пам'ятати, що розмірність залежить від класу систем одиниць вимірювання.

Розмірності величин можуть бути залежними і незалежними.

Розмірності  $k$  величин називаються незалежними, коли кожна з них не може бути подана у вигляді комбінації інших.

#### § 4 Формула розмірності

Залежність одиниці вимірювання похідної величини від одиниць вимірювання основних величин може бути подана у вигляді формули, яка має назву формули розмірності. Цю формулу можна розглядати як стисле визначення та характеристику фізичної природи похідної величини.

Коли змінюємо одну з основних одиниць в  $n$  разів, похідна одиниця змінюється в  $n^p$  разів, в цьому разі кажуть, що ця похідна одиниця має розмірність  $p$  відносно даної основної одиниці. Коли похідна одиниця  $A$  має розмірність  $p$  відносно  $L$ ,  $q$  відносно  $M$  та  $r$  відносно  $T$ , то це символічно записується у вигляді:

$$[A] = L^p \cdot M^q \cdot T^r. \quad (1)$$

Квадратні дужки тут означають, що мова іде про розмірності  $A$ . Показники розмірності  $p$ ,  $q$  та  $r$ , які входять до цього виразу можуть бути як цілими, так і дробовими, як додатними, так і від'ємними і, в окремому випадку, дорівнюють нулю.

Про розмірність можна казати тільки стосовно визначеної системи одиниць вимірювання. В різних системах одиниць вимірювання формула розмірності для одної і тієї ж величини може містити в собі різну кількість аргументів та мати різний вигляд.

Вираз (1) показує, що коли в одній системі ця величина  $A$  вимірюється одиницею  $\alpha_1$ , то при переході до другої системи, в якій одиниці довжини, маси та часу будуть в  $L$ ,  $M$  та  $T$  разів більше, чім в першій, величина  $A$  буде вимірюватися одиницею  $\alpha_2$ , причому

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = L^p \cdot M^q \cdot T^r.$$

Таким чином, основна суть формули розмірності одиниць даної величини або, як часто, для короткості, говорять, - розмірність даної величини, полягає в тому, що ця формула відповідає на запитання про те, що зі зміною основних одиниць змінюється дана похідна одиниця.

При утворенні розмірності складних величин, користуються такими теоремами:

1. Якщо числове значення величини  $C$  дорівнює добутку числових значень величин  $A$  та  $B$ , то розмірність  $C$  дорівнює добутку розмірностей  $A$  та  $B$ :

$$[C] = [A \cdot B] = [A] \cdot [B], \quad (2)$$

іншими словами, коли

$$[A] = L^{P_a} \cdot M^{Q_a} \cdot T^{r_a}$$

та

$$[B] = L^{P_b} \cdot M^{Q_b} \cdot T^{r_b}$$

то

$$[C] = L^{P_a + P_b} \cdot M^{Q_a + Q_b} \cdot T^{r_a + r_b}.$$

2. Якщо числове значення величини  $C$  дорівнює відношенню числових значень величин  $A$  та  $B$ , то розмірність  $C$  дорівнює відношенню розмірностей  $A$  та  $B$ :

$$[C] = \left[ \frac{A}{B} \right] = \frac{[A]}{[B]}, \quad (3)$$

тобто, коли

$$[A] = L^{P_a} \cdot M^{Q_a} \cdot T^{r_a}$$

та

$$[B] = L^{P_b} \cdot M^{Q_b} \cdot T^{r_b}$$

то

$$[C] = L^{P_a - P_b} \cdot M^{Q_a - Q_b} \cdot T^{r_a - r_b}.$$

3. Якщо числове значення величини  $C$  дорівнює степені  $n$  числового значення величини  $A$ , то розмірність  $C$  дорівнює степені  $n$  розмірності  $A$ :

$$[C] = [A^n] = [A]^n. \quad (4)$$

В цьому випадку, якщо

$$[A] = L^{P_a} \cdot M^{Q_a} \cdot T^{r_a}$$

То

$$[C] = L^{n \cdot p_a} \cdot M^{n \cdot q_a} \cdot T^{n \cdot r_a}.$$

Пояснимо ці теореми прикладами. Розмірність площі квадрата:

$$[S] = [\ell]^2 = L^2.$$

Розмірність площі кола:

$$[S] = \left[ \frac{\pi}{4} \right] \cdot [D]^2,$$

тут коефіцієнт  $\frac{\pi}{4}$  є чисто числовим коефіцієнтом та не залежить від вибору одиниць довжини, маси та часу. Можна казати, що він має нульову розмірність відносно  $L$ ,  $M$  та  $T$ . Або ж:

$$\left[ \frac{\pi}{4} \right] = L^0 \cdot M^0 \cdot T^0.$$

Таким чином розмірність площі кола та сама, що і розмірність площі квадрату  $[S] = L^2$ . На цьому прикладі видно, що простий числовий множник не змінює розмірності.

Формули розмірності грають дуже важливу роль при перевірці математичних виразів фізичних законів. Усі члени в обох частинах кожного фізичного рівняння повинні бути однакової розмірності, через те що в протилежному випадку рівність порушується при переході від одних одиниць вимірювання до других.

Тому перевірка розмірності в одержаних рівняннях є дуже корисною для того, щоб уяснити, чи є яка-небудь завідома помилка у результаті. Якщо розмірності правої та лівої частини не збігаються один з одним, можна уявляти, що рівність невірна.

Застосування формул розмірності, однак, не обмежуються тільки перетворенням одиниць та перевіркою вірності фізичних рівнянь. Аналіз розмірностей дозволяє у ряді випадків дуже просто визначити характер закону, якому підкоряється те або інше фізичне явище. Застосування аналізу розмірностей ґрунтується на незалежності математичного виразу шуканого закону від одиниць, що вимірюють вхідні до нього величини.

### Контрольні запитання

1. Розмірні і безрозмірні величини.



2. Що таке основні і похідні одиниці вимірювання?
3. Представити і дати характеристику формулі розмірностей.
4. Охарактеризувати теореми розмірностей.
5. Навести приклади застосування теорії розмірностей при моделювання СГМ.

### Тема № 13

## ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН

### §1 Загальні визначення і положення теорії подібності

У ряді випадків, при дослідженні процесів і явищ, пов'язаних із сільськогосподарським виробництвом, моделювання базується на теорії подібності. Пряме призначення методу подібності полягає в науковому обґрунтуванні заходів моделювання дійсних, "натурних" процесів в лабораторних умовах.

Метод подібності дозволяє встановити вимоги, які слід пред'являти до лабораторної моделі і проведення над нею дослідного процесу, щоб результати моделювання могли б бути використані для проектування реальних об'єктів. Крім того, обробка лабораторних вимірювань і представлення результатів цих вимірювань у вигляді емпіричних формул також проводиться згідно методу подібності.

При моделюванні треба знати, як перерахувати результати досліду з моделі на натуру. Тому у моделюванні основним є поняття подібних явищ.

Явища називаються подібними, коли вони відрізняються тільки числовими значенням параметрів, що визначаються і при тому так, що для них відповідні безрозмірні величини  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$  збігаються.

### §2 Умови подібності

Для подібності двох явищ необхідно, щоб у всі відповідні моменти часу у всіх відповідних збіжних точках простору параметри однієї системи були пропорційні відповідним параметрам іншої системи, тобто:

$$\frac{P_i}{R_i} = m_i,$$

де  $P_i, R_i$  - відповідні параметри систем  $P$  і  $R$ ,

$m_i$  - коефіцієнт подібності, або масштаб відповідних параметрів.

В залежності від характеру відповідності розрізняють:

- а) геометричну подібність, якщо  $m_x = m_y = m_z = m$  ;
- б) афінну подібність, якщо  $m_x \neq m_y \neq m_z$  .

З точки зору відповідності фізичної природи розрізняють:

- а) фізичну подібність, яка здійснюється при однаковій фізичній природі подібних явищ;
- б) математичну подібність, яка вимагає тільки однакової форми рівнянь, що описують фізично різнорідні явища.

В технічних задачах для забезпечення подібності двох явищ необхідно виконати три умови:

- 1) умову геометричної подібності;
- 2) умову кінематичної подібності;
- 3) умову динамічної або механічної подібності.

Геометрична подібність. Два тіла називаються подібними, коли відношення між усіма відповідними їх розмірами однакове. Таким чином, геометрична подібність полягає в подібності лінійних розмірів. При геометричній подібності усі похідні величини можна виразити через довжину. Так:

$$\frac{L_m}{L_n} = L_\lambda,$$

де індекс  $m$  - для моделі, індекс  $n$  - для натури.

$$\text{Для площі } \frac{S_m}{S_n} = \frac{L_m^2}{L_n^2} = L_\lambda^2, \text{ для об'єму } \frac{V_m}{V_n} = \frac{L_m^3}{L_n^3} = L_\lambda^3.$$

Кінематична подібність - подібність руху. Рух двох систем кінематично подібний, коли відношення швидкостей усіх відповідних точок, що беруть участь у русі, рівні між собою, а траєкторії руху обох систем геометричне подібні.

При кінематичній подібності у розрахунок приймається також час. В цьому випадку похідні величини і їх відповідні відношення можна виразити таким чином:

$$\text{швидкість } \frac{g_m}{g_n} = \frac{L_m T_n}{L_n T_m} = \frac{L_\lambda}{T_\lambda},$$

$$\text{витрата } \frac{Q_m}{Q_n} = \frac{L_m^3 T_n}{L_n^3 T_m} = \frac{L_\lambda^3}{T_\lambda},$$

прискорення  $\frac{\omega_m}{\omega_n} = \frac{T_n}{T_m} = \frac{1}{T_\lambda}$ ,

кутове прискорення  $\frac{\alpha_m}{\alpha_n} = \frac{T_n^2}{T_m^2} = \frac{1}{T_\lambda^2}$ .

Динамічна подібність - подібність мас і сил. Дві системи динамічно подібні, коли маси відповідних частинок (точок) обох систем, що беруть участь в русі, знаходяться у одному і тому ж відношенні і коли рівні відношення між відповідними силами, які впливають на рух відповідних частинок. Повна динамічна подібність - межа, яку рідко вдається досягти при моделюванні.

Коли має місце явище динамічної подібності, похідні величини включають одиницю сили, а також довжини і часу. Зрівнювання відповідних величин у динамічно подібних системах дає:

сила  $\frac{F_m}{F_n} = F_\lambda$ ,

маса  $\frac{m_m}{m_n} = \frac{F_m T_m^2 L_n}{F_n T_n^2 L_m} = \frac{F_\lambda T_\lambda^2}{L_\lambda}$

робота  $\frac{A_m}{A_n} = \frac{L_m F_m}{L_n F_n} = L_\lambda F_\lambda$ ,

потужність  $\frac{N_m}{N_n} = \frac{L_m F_m T_n}{L_n F_n T_m} = \frac{L_\lambda F_\lambda}{T_\lambda}$ ,

об'ємна вага  $\frac{\gamma_m}{\gamma_n} = \frac{L_n^3 F_m}{L_m^3 F_n} = \frac{F_\lambda}{L_\lambda^3}$ ,

густина  $\frac{\rho_m}{\rho_n} = \frac{L_n^4 F_m T_m^2}{L_m^4 F_n T_n^2} = \frac{T_\lambda^2 F_\lambda}{L_\lambda^4}$ ,

Інші похідні величини можна скласти за допомогою аналізу їх розмірностей. За аналогії можна зробити висновки, прийнявши в якості основних одиницю маси, довжини і часу. Зрозуміло, що у випадку безрозмірних чисел, як кути, деформація, відносне переміщення і т.д. при подібності явищ відношення цих безрозмірних чисел повинні дорівнювати одиниці.

Одержані похідні відношення справедливі незалежно від того, яка фізична сила викликає рух, і залежать тільки від вхідних одиниць.

В фізичних процесах або явищах в загальному випадку беруть участь декілька фізичних змінних. Фізичні явища вважають подібними, коли вони протікають у геометричне подібних системах і при цьому поля усіх однойменних фізичних змінних, що беруть участь в явищах, відповідно подібні.

Наприклад, стаціонарний процес конвективного теплообміну характеризується наявністю чотирьох фізичних змінних, а саме: температура рідини  $\Theta$ , її швидкість  $u$ , густина  $\rho$  і тиск  $P$ . В цих випадках, два явища будуть подібними, коли в кожній парі збіжних точок, тобто при  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\ell_1^i}{\ell_2^i} = k_\ell$  і в збіжні моменти часу, тобто при  $\frac{t_1^i}{t_2^i} = k_t$ , мають місце рівності  $\frac{\Theta_1^i}{\Theta_2^i} = k_\Theta$ ,  $\frac{u_1^i}{u_2^i} = k_u$ ,  $\frac{\rho_1^i}{\rho_2^i} = k_\rho$ ,  $\frac{P_1^i}{P_2^i} = k_P$ , причому в загальному випадку  $k_\ell \neq k_t \neq k_\Theta \neq k_u \neq k_\rho \neq k_P$ .

Цю властивість мають рівняння, що описують поле кожної з фізичних змінних, які беруть участь в подібних процесах.

### § 3 Теорема подібності

Перша теорема подібності. У подібних явищ можна знайти певні сукупності параметрів, що називаються критеріями подібності, що мають однакові значення.

Нехай маємо два подібних процеси.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n &= \sum_{j=1}^n \Phi_j = 0; \\ \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_n &= \sum_{j=1}^n \Psi_j = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Так як  $\Phi_n$  і  $\Psi_n$  не рівні нулю, то рівняння (1) можна переписати так:

$$1 + \frac{\Phi_1}{\Phi_n} + \frac{\Phi_2}{\Phi_n} + \dots + \frac{\Phi_{n-1}}{\Phi_n} = 0; \quad (2)$$

$$1 + \frac{\Psi_1}{\Psi_n} + \frac{\Psi_2}{\Psi_n} + \dots + \frac{\Psi_{n-1}}{\Psi_n} = 0. \quad (3)$$

Нехай  $\Phi_j = \Phi_j(P_1, P_2, \dots, P_m)$ ,  $\Psi_j = \Psi_j(R_1, R_2, \dots, R_m)$  функції, що мають нульову розмірність.  $P_i, R_i (i = \overline{1, m})$  - відповідні параметри процесів. Так як процеси подібні, то, врахувавши  $\frac{P_i}{R_i} = m$  маємо:  $P_i = m_i R_i$ , звідки  $\Phi_j = N_j \Psi_j$ , причому  $N_1 = N_2 = \dots = N_n = N$ .

Підставивши останню рівність в (2) і скоротивши  $N$ , видно, що рівняння тотожні, тобто:

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_n} = \frac{\Psi_1}{\Psi_n}, \frac{\Phi_2}{\Phi_n} = \frac{\Psi_2}{\Psi_n}, \frac{\Phi_{n-1}}{\Phi_n} = \frac{\Psi_{n-1}}{\Psi_n}, \text{ або } \frac{\Phi_j}{\Psi_j} = idem,$$

де *idem* - означає "однаковий для всіх подібних процесів" або критерій подібності.

Критерій подібності прийнято позначати  $\pi_k$ , де  $k$  - номер критерію. Критерії подібності можуть перетворюватись в критерії інших видів, що отримуються множенням або діленням раніше знайдених критеріїв один на одного.

Наприклад: якщо  $\pi_k = idem$  і  $\pi_j = idem$  то  $\pi_k \cdot \pi_j = idem$ ,  $\frac{\pi_k}{\pi_j} = idem$ .

### Контрольні запитання

1. Загальні визначення і положення теорії подібності.
2. Умови подібності.
3. Охарактеризувати коефіцієнти подібності і їх застосування при моделюванні машин.
4. Охарактеризувати геометричну, кінематичну і динамічну подібності величин.
5. Навести приклади застосування теорії подібності при моделювання СГМ.

### Тема №14

#### МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ТА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОСЛИННИХ МАТЕРІАЛІВ

Дослідження фізико-механічних властивостей рослинних матеріалів, що обробляються робочими органами сільськогосподарських машин, до останнього часу проводились на основі традиційної практики досліджень загальних властивостей матеріалів. Практика ця запозичена, значною мірою, з таких дисциплін як „Опір матеріалів” та „Матеріалознавство”. Звідти були перенесені не лише основні методологічні прийоми досліджень, а і

номенклатура досліджуваних властивостей. Серед таких властивостей, як правило, фігурують опір стиску, розриву, згину. Дані, отримані в процесі досліджень цих властивостей, використовуються при проектуванні сільськогосподарських машин та механізмів. Однак згадані методи не завжди відповідають явищам, що відбуваються в результаті контактної взаємодії робочих органів і рослинного матеріалу. На сучасному етапі розвитку теорії конструювання сільськогосподарських машин необхідним є новий підхід, щодо дослідження і моделювання фізико-механічних властивостей рослинних матеріалів. В цьому плані варто особливу увагу приділити дослідженням проф. Хайліса Г.А., що викладені у книзі „Механіка рослинних матеріалів”.

*§1. Моделювання фізико-механічних властивостей рослинних матеріалів*

Взаємодія рослинних матеріалів із робочими органами машин супроводжується переходом матеріалу за межі пружних деформацій. (Наприклад, різання, подрібнення тощо). Тому такі властивості рослинних матеріалів як пружність, в'язкість і пластичність набувають першочергового значення. Під пружністю розуміється властивість матеріалу відновлювати свої форми і розміри після припинення дії зовнішнього навантаження, внаслідок чого вони були змінені. Наявність у рослинних матеріалах таких явищ як релаксація (зниження напруження при постійній деформації) і повзучості (ріст деформацій при постійних навантаженнях), дозволяє віднести ці матеріали до пружнов'язких або в'язкопластичних. Для таких матеріалів характерна залежність деформації не лише від її розмірів, а і від швидкості, з якою вона розвивається.

Модель пружнов'язкого тіла може бути представлена як конгломерат, що складається з твердого (пружного або пластичного) скелета і напіврідкої, рідкої або газоподібної речовини, що заповнює проміжки між твердими елементами. Більшість матеріалів являють собою тканини, що утворені просторовою волокнистою системою, в порожнинах якої міститься рідина, пара або газ. Будучи деформованими, волокна такого матеріалу тиснуть на рідке або газоподібне середовище, що їх оточує, примушуючи переміщатись в менш напружені зони. У відповідності до законів гідродинаміки опір середовища при такому переміщенні залежить від швидкості її переміщення. Вказана модель добре трактує причини, за якими у в'язких тілах деформація є функцією навантаження і часу її дії.

Для математичного опису механічних властивостей матеріалів в реології розроблені методи фізично обґрунтованих комбінацій елементів, які з достатньою точністю відображають фундаментальні властивості модельованих матеріалів: пружність, в'язкість, пластичність. При такому

комбінуванні, перевагу надають тим властивостям, які мають суттєве значення при моделюванні задачі.

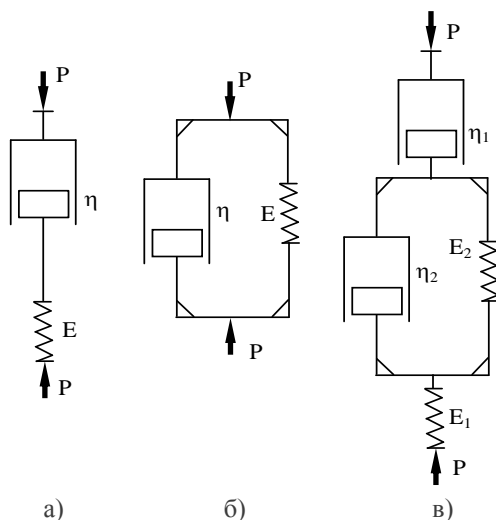


Рис.14.1 Схеми реологічних моделей:

- а) – „тіло Максвелла”;
- б) – „тіло Кельвіна”;
- в) – модель рослинного матеріалу

В реологічних схемах, що характеризують властивості матеріалів, прийнято пружність зображати у вигляді пружини, деформація якої відбувається за законом Гука, а в'язкість – у вигляді циліндра з в'язкою рідиною, у якому переміщення поршня підкоряється закону Ньютона. Послідовне і паралельне з'єднання вказаних елементів дозволяє моделювати деформації матеріалів з досить складними властивостями. Щоб розрізняти ці властивості в реології використовують такі терміни як в'язкопружність, динамічна пластичність, непружність і інші. Таким тілам присвоюють імена їх авторів, наприклад „тіло Бюргеса”, „тіло Гука”, „тіло Максвелла”, „тіло Кельвіна” та інші.

Максвелл вперше отримав закон деформації пружнов'язкого тіла, послідовно з'єднавши пружний і в'язкий елемент (рис.1.а). Так як при такому з'єднанні загальна деформація являє собою суму деформацій  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  кожного з елементів і деформація пружного тіла підкоряється закону Гука

$\sigma_1 = \varepsilon_1 E$  ( $E$  - модуль пружності), а в'язка рідина закону Ньютона

$\sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}$  ( $\eta$  - коефіцієнт внутрішнього тертя), то отримується рівняння

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}.$$

Якщо покласти  $\varepsilon = \text{const}$ , то ліва частина виразу буде рівна нулю. Інтегруючи в межах від  $\sigma_0$  до  $\sigma$  і від 0 до  $E$  отримаємо закон зміни напруження з часом:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta}t}. \quad (1)$$

Тут величина  $\frac{E}{\eta}$  являє собою час релаксації. Якщо припустити що у

виразі (1)  $\frac{E}{\eta} = \infty$ , то напруження  $\sigma$  буде рівне нулю. При умові  $\sigma = \text{const}$ ,

тобто при постійному напруженні внаслідок постійності швидкості деформації,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta}.$$

Модель Максвелла характеризує зміну механічних властивостей матеріалу внаслідок тривалості дії сили. Якщо ж ця дія нетривала, то матеріал веде себе як тверде "тіло Гука", а якщо тривалість значно велика то матеріал веде себе як в'язке "тіло Ньютона".

"Модель Кельвіна" характеризує пружнов'язкі зв'язки матеріалів таким чином. При прийнятій системі паралельного з'єднання елементів їх деформація буде однаковою, а повне напруження  $\sigma$  представлятиметься сумою напружень  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$  кожного з елементів, тобто  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ . Закон деформації для цього випадку матиме вигляд:

$$\sigma = \varepsilon E + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (2)$$

При постійній деформації  $\varepsilon = \text{const}$  напруження теж лишатиметься постійною величиною, тобто матеріал моделі Кельвіна не релаксує. Якщо до такого матеріалу прикласти постійне напруження  $\sigma = \text{const}$ , то рівняння (2) матиме вигляд:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right),$$



і у відповідності до якого деформація прямує до постійної величини  $\frac{\sigma}{E}$ . При повному розвантаженні, тобто при  $\sigma = 0$ , деформація зникає. Це означає. Що модель Кельвіна не може бути використана для встановлення загального закону деформації рослинних матеріалів, так як при їх стисненні спостерігається релаксація напружень і мають місце залишкові деформації. Очевидно, що більш реальна модель розглядуваних матеріалів, яка б відображала картину поведінки їх під навантаженням, повинна містити більше число простих елементів, а ніж модель Максвелла чи Кельвіна.

Для відображення картини поведінки волокнистих рослинних матеріалів під навантаженням більш підходить фізична модель, що містить три послідовно з'єднані елементи (рис.1,в): елемент  $E_1$  миттєвої пружності, елемент  $E_2$  пружності, що запізнюється, з'єднаної паралельно з елементом в'язкості  $\eta_2$ , елемент текучості  $\eta_1$ , що з'єднаний з першими двома послідовно. Вважається, що деформація кожного з елементів  $E$  в даній моделі підкоряється закону Гука, а елементів  $\eta$  - закону Ньютона. При такому припущенні дана модель дозволяє пояснити сутність процесу деформації пружнов'язких матеріалів під навантаженням. Так, при швидкому навантаженні моделі повна її деформація відбудеться головним чином за рахунок стиску пружини (елемент  $E_1$ ). При фіксації моделі в стисненому стані пружина  $E_1$  переміщатиме поршень  $\eta_1$ . По мірі його руху пружина  $E_1$  буде розтискатись і напруження зменшуватиметься. Отримається типова картина релаксації напруження при постійній деформації.

Явище повзучості, що є характерним для пружнов'язких матеріалів, може бути отримане на вказаній моделі за умови прикладання до неї постійного навантаження. Під її дією спочатку відбудеться швидка деформація моделі за рахунок стиску пружини  $E_1$ , а потім - поступова деформація за рахунок стиску пружини  $E_2$  і переміщення поршня  $\eta_2$ . І положення поршня  $\eta_2$  зафіксує залишкову деформацію.

На рис.2 приведена експериментальна графічна залежність відносної деформації  $\epsilon$  рослинного матеріалу (сіна) від тривалості його навантаження і розвантаження. Характер кривої ідентичний розвитку деформації у описаній вище моделі. Так, ордината АВ відповідає миттєвому стиску елемента  $E_1$ , ВС - поступовому стиску елемента  $E_2$  разом з переміщенням поршнів  $\eta_2$  і  $\eta_2$ , CD - миттєвому розтиску елемента  $E_1$ , DE - поступовому розтиску елемента  $E_2$ ; EF - залишковій деформації.

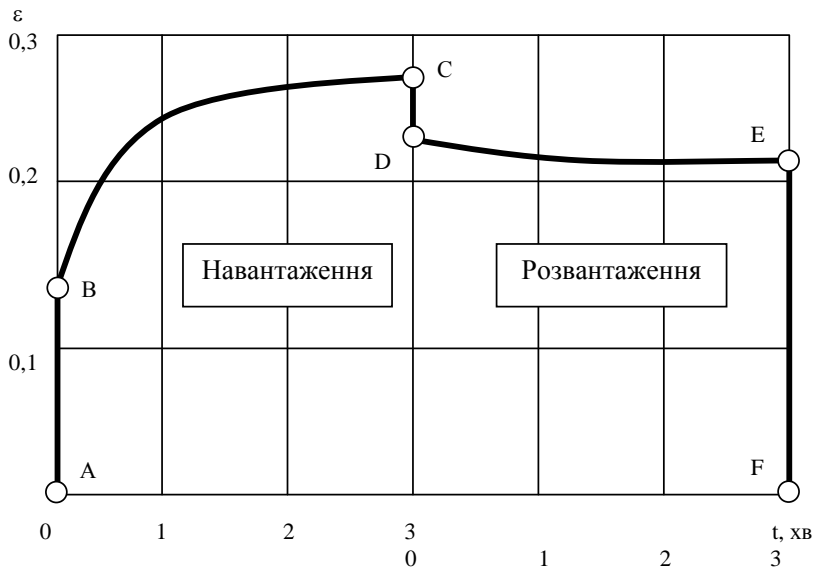


Рис.14.2 Експериментальна залежність відносної деформації  $\varepsilon$  рослинного матеріалу від часу деформації  $t$

Таким чином, аналіз запропонованої механічної моделі пружнов'язкого матеріалу вказує на її достатню фізичну обґрунтованість. Окрім того, така модель дозволяє досить ілюстративно пояснити характер поведінки пружнов'язких матеріалів в процесі їх навантаження.

## §2. Технологічні властивостей рослинних матеріалів

При роботі із рослинними матеріалами необхідно мати інформацію про їх технологічні властивості, тобто властивості, які сприяють, або ж погіршують тому чи іншому процесу їх обробки. Однак на сучасному рівні розвитку теоретичних знань їх ще неможливо виразити за допомогою певних комбінацій фундаментальних фізико-механічних і реологічних властивостей. Тому для кількісної оцінки технологічних властивостей матеріалів використовують експериментальні методи, які дозволяють отримати певні відносні індекси. За їх допомогою вимірюються такі властивості, як липкість, клейкість та інші.

Клейкість визначається як поверхнева якість пластичного матеріалу, завдяки якій шматки такого матеріалу, будучи з'єднаними, чинять опір їх

розділенню. Ця властивість мали чим відрізняється від адгезії, вимірювання якої виконується відносно простими приладами. Липкість визначається, наприклад, для ґрунтів як сила, що необхідна для відриву пластини, притисненої до ґрунту. Деякі властивості матеріалів, такі, наприклад, як покриваюча чи поглинаюча (сорбційна) здатність ще не можуть бути визначені за допомогою будь-яких приладів. Їх визначають органолептичними методами, тобто за зовнішнім виглядом, на ошуп і т.д.

Кількісній оцінці краще піддаються такі властивості як здатність чинити опір, протидіяти розділенню на частини і ін. Такі властивості, що носять назву, негоскальпічними, можна з достатньою точністю визначити практично, а наближено і теоретичними методами аналізу.

### **Контрольні запитання**

1. Моделювання фізико-механічних властивостей рослинних матеріалів.
2. Моделювання технологічних властивостей рослинних матеріалів..
3. Охарактеризувати моделі Гука, Кельвіна, Максвела.
4. Охарактеризувати реологічну модель рослинних матеріалів.
5. Охарактеризувати діаграму навантаження і розвантаження рослинних матеріалів.

### **Тема 15**

#### **МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ЧАСТИНКИ**

##### *§1 Відомості з історії розвитку теорії руху матеріальної точки*

На першому етапі свого розвитку дослідження, що торкалися питань руху матеріальної точки носили, головним чином експериментальний характер. В цьому відношенні необхідно передусім відзначити класичні дослідження Галілея, якщо не торкатися більш обмежених за стриманими результатами досліджень Леонардо да Вінчі, Тарталя, Бенедетті та Пікколоміні, які також займалися вивченням деяких видів руху твердого тіла (рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, рухи тіла при вертикальному його падінні і інше).

Дослідження Галілея буди на стільки обширні та різноманітні в такому здавалося б вузькому питанні, як рух тіла по нахиленій площині, що на протязі проміжку часу вони не були повернені.

Тільки дослідження Гюйгенса (1673р.), що стосувалися руху точки по горизонтальному колу кулі, внесли деякі нові елементи у вивчення даного питання. Нові вагомі дослідження в цій області пов'язані з ім'ям Ньютона, І. Бернуллі, Л. Ейлера, М.В. Остроградського.

У своїх дослідженнях Галілей не врахував такого фактору, як опір середовища (наприклад повітря), якому відбувається рух тіла. Ньютон вже враховує цей фактор і дає для нього математичне вираження. Так, за Ньютоном, опір середовища може бути виражений так:

$$f(v) = bv^2$$

або

$$f(v) = av + bv^2, \quad (1)$$

де  $v$  – швидкість відносного руху тіла в середовищі;

$a, b$  – постійні коефіцієнти.

І. Бернуллі вирішує цю задачу для ще більш загального випадку, коли опір середовища пропорційний будь-якій степені швидкості і виражається так:

$$f(v) = kv^n, \quad (2)$$

де  $n$  – будь-яке число, що більше нуля;

$k$  – коефіцієнт опору.

При цьому Бернуллі також встановив, що якщо  $n > 2$ , то крива швидкості являє собою гіперболу, якщо  $n < 2$  – параболу, за виключенням  $n = 1$ , коли крива швидкостей буде прямою лінією.

Розробку більш загальних понять про рух матеріальної точки і вирішення ряду конкретних задач даної проблеми здійснив Ейлер. При цьому задачі руху матеріальної точки з врахуванням опору середовища, Ейлер вирішує стосовно потреб зовнішньої балістики.

У другому томі „Механіки” Ейлер розглядає також деякі питання теорії руху матеріальної точки по заданій лінії і по заданій поверхні.

Однак у часи Ейлера не були ще розроблені загальні принципи вирішення задач динаміки. Кожна з них вирішувалась в той час оригінальним, спеціально для неї розробленим прийомом, доступним лише для видатних математиків і механіків. Цим і пояснюється те, що майже до половини XVIII століття ці задачі знаходили розв'язок тільки в працях класиків механіко-математичних наук (Декарта, Ньютона, Бернуллі, Гюйгенса, Ейлера). Лише після виходу в світ праці Д'Аламбера „Трактат по динаміці” розв'язок (або вирішення) задач динаміки стало доступним не лише для спеціалістів-математиків, але і для техніків. Видатні праці Лагранжа, Якобі, Гамільтона, М.В. Остроградського та Коріоліса завершили в останньому розробку

принципів класичної динаміки, в результаті чого не лише математики але й техніки отримали у свій арсенал в достатній степені універсальний механіко-математичний апарат, необхідний для розв'язку задач, що висувала практика. На основі цих принципів з'явилась можливість застосувати механіко-математичний апарат не лише для вирішення задач небесної механіки (консервативні системи) або задач зовнішньої балістики (вільний рух точки), але і до вирішення задач технічного характеру (рух невільної системи) і т.д.

### *§2 Задачі динаміки та кінематичні елементи руху*

За допомогою рівнянь динаміки розв'язують дві основні задачі механіки:

- 1) по заданому руху точки або системи точок встановленої маси знаходять сили, що викликають цей рух;
- 2) по заданим силам, що діють на точку або систему точок, знаходять кінематичні елементи руху.

В першому випадку для розв'язку задач необхідно мати рівняння руху в функції від часу так як для визначення сили достатньо знати масу і прискорення, що легко знаходиться при диференціюванні, то ця задача майже завжди розв'язується без ускладнень.

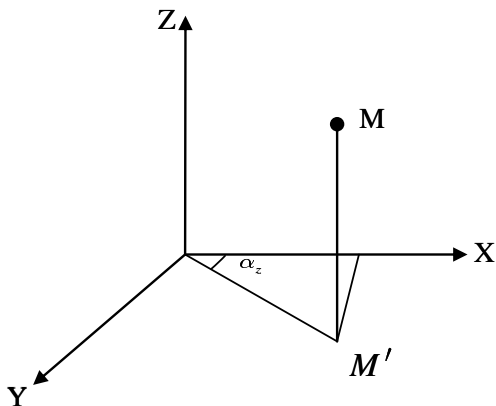
Розв'язок задач другого класу вимагає інтегрування системи диференціальних рівнянь, що часто пов'язано із значними труднощами математичного характеру.

Якщо на рух системи накладено обмеження, то такий рух називається невільним, а самі обмеження – в'язями (поверхня або лінія по якій відбувається рух точки чи тіла). В зв'язку з цим може мати місце також клас задач, у яких шукаються в'язі, тобто рівняння поверхні або лінії, рух по яких проходить під дією заданих сил при певному характеру зміни кінематичних елементів руху.

З відомих систем координат найбільш широкое застосування в технічній механіці мають такі:

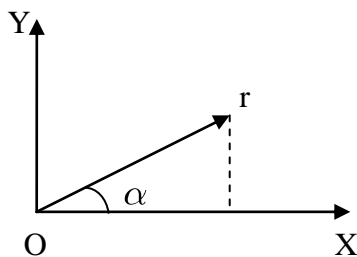
- 1) прямокутна або декартова система координат. Координати точки  $M(x, y, z)$ ;
- 2) циліндрична система координат. Циліндричні координати можуть бути виражені через декартові і навпаки:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \\ z = z \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{array}$$

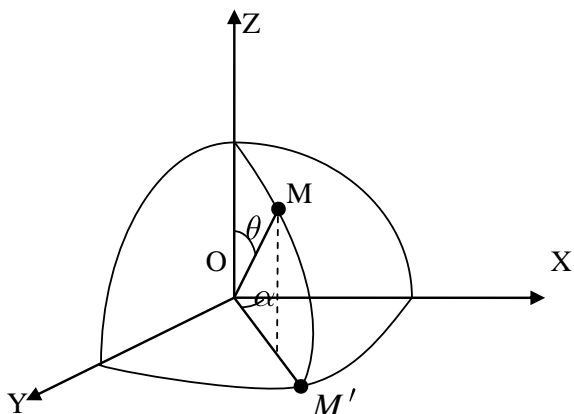


3) Полярна система координат.

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{array}$$

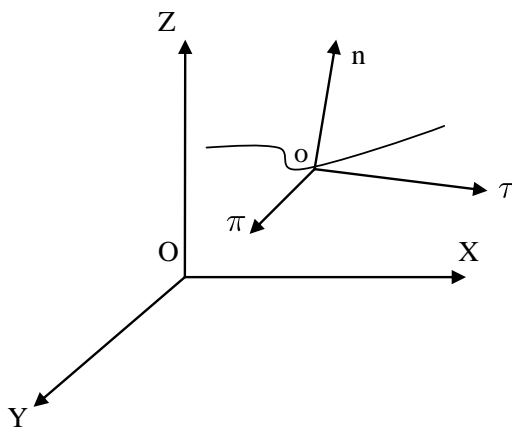


4) Сферична система координат. Тут біжучі координати точки  $M$  складають: довжина радіуса вектора  $OM$  -  $\rho$ , кут  $\theta$ , що утворений радіусом-вектором і віссю  $z$ , і двогранний кут  $\alpha$ , що утворений площиною  $ZOX$  з площиною, що проходить через дану точку і вісь  $z$ .



$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \sin \theta \cos \alpha \\ y &= \rho \sin \theta \sin \alpha \\ z &= \rho \cos \alpha \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{aligned}$$

- 5) *Натуральна система координат.* Одна з осей направлена по дотичній до траєкторії руху -  $\tau$ , друга - по нормалі до неї -  $n$ , третя - по нормалі (бінормаль) до площини двох попередніх -  $\pi$ .



- б) Узагальнена система координат. Із попередніх даних видно, що взагалі декартові координати точки в просторі можна виразити через три яких-небудь нових незалежних змінних  $q_1, q_2, q_3$  :

$$x = f_1 q_1, q_2, q_3 ;$$

$$y = f_2 q_1, q_2, q_3 ;$$

$$z = f_3 q_1, q_2, q_3 .$$

Проекції швидкості на координатні осі декартової системи координат і направляючі косинуси:

$$\nu_x = \frac{dx}{dt} = x'; \quad \nu_y = \frac{dy}{dt} = y'; \quad \nu_z = \frac{dz}{dt} = z';$$

$$\nu = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2};$$

$$\cos \nu, x = \frac{\nu_x}{\nu} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};$$

$$\cos \nu, y = \frac{\nu_y}{\nu} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};$$

$$\cos \nu, z = \frac{\nu_z}{\nu} = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};$$

Проекції прискорень і направляючі косинуси.

$$a_x = \frac{d\nu_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x''; \quad \cos a, x = \frac{x''}{a} = \frac{x''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};$$

$$a_y = \frac{d\nu_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y''; \quad \cos a, y = \frac{y''}{a} = \frac{y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};$$

$$a_z = \frac{d\nu_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = z''; \quad \cos a, z = \frac{z''}{a} = \frac{z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};$$

### §3. Диференціальні рівняння руху

Якщо рух матеріальної точки  $m$  під дією сили  $F$  нічим не обмежується, то такий рух називається вільним.

В цьому випадку рівняння руху в проекціях на осі розглянутих (будемо обмежуватись декартовими) у відповідності з принципом Д'Аламбера будуть:



$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x \\ m\ddot{y} &= F_y \\ m\ddot{z} &= F_z \end{aligned} \right\}$$

де  $F_x, F_y, F_z$  - проекції прикладеної сили  $F$  на відповідні осі координат.

В природі не існує ідеально гладких поверхонь або ліній. Однак при розв'язку деяких технічних задач з достатніх для практичних потреб ступені точності можна інколи знехтувати силою тертя і розглядати поверхню або лінію як ідеальну гладку.

Поверхня або лінія, по яким переміщується ідеальна точка або система точок, накладають обмеження на рух і роблять його невольним.

В силу цього виникають реакції зв'язку. Тому в диференціальних рівняннях руху до проекцій заданих сил додають ще проекції реакції зв'язку і наведені рівняння мають вигляд:

$$* \left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\delta f}{\delta x} \\ m\ddot{y} &= F_y + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\delta f}{\delta y} \\ m\ddot{z} &= F_z + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\delta f}{\delta z} \end{aligned} \right\}$$

де  $F_x, F_y, F_z$  - проекції прикладених сил,  $N$  – нормальна реакція зв'язку.

Вирази

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{\delta f}{\delta x} &= \cos n, x \\ \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{\delta f}{\delta y} &= \cos n, y \\ \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{\delta f}{\delta z} &= \cos n, z \end{aligned} \right\}$$

являються косинусами кутів між осями координат і напрямом  $n$  до поверхні, а вираз  $f = f(x, y, z) = 0$  - є рівнянням зв'язку.

Якщо рівняння не містить похідних від координат по часу, то такий зв'язок відноситься до типу голономних нестационарних (рухома скатна поверхня).

Якщо  $f(x, y, z) = 0$ , де  $t$  не входить, то такий зв'язок носить назву голономної стаціонарної (нерухома скатна поверхня).

Якщо характер зв'язку невідомий, то система (\*) не може бути розв'язана, так як при чотирьох рівняннях (для однієї точки) не може бути

визначено шість невідомих (три координати і три проекції зв'язку). Тому необхідні додаткові умови. Такими умовами є припущення про ідеальність зв'язку. Всі відхилення від ідеальності Лагранж запропонував віднести до заданих сил. Тоді диференціальне рівняння разом з рівнянням зв'язку запишеться:

$$** \left. \begin{aligned} mx'' &= F_x + \lambda \frac{\delta f}{\delta x}; \\ my'' &= F_y + \lambda \frac{\delta f}{\delta y}; \\ mz'' &= F_z + \lambda \frac{\delta f}{\delta z}; \\ f(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

де  $\lambda$  - невизначений множник Лагранжа.

Тут число невідомих рівне числу рівнянь і система може бути розв'язана. Саме (\*\*) носить назву рівняння Лагранжа першого роду, де

$$\lambda = \frac{N}{\Delta f};$$

$$\Delta f = |\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)^2} - \text{модуль градієнта.}$$

Якість результатів дослідження руху частинки на поверхні буде злежати від того, на скільки повно і точно враховані сили, що діють на часинку.

Однією із таких сил є сила ваги рухомої матеріальної частини. Величина і напрям цієї частини не є однаковою для всіх випадків руху.

Якщо знехтувати силою опору середовища, то диференціальне рівняння руху поверхнею можна написати:

$$\left. \begin{aligned} mx'' &= F_x + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\delta f}{\delta x} - kN \frac{x'}{v}; \\ my'' &= F_y + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\delta f}{\delta y} - kN \frac{y'}{v}; \\ mz'' &= F_z + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\delta f}{\delta z} - kN \frac{z'}{v}; \end{aligned} \right\} f(x, y, z) = 0;$$

або

$$\left. \begin{aligned} mx'' &= F_x + \lambda \frac{\delta f}{\delta x} \pm k\lambda \Delta f \frac{x'}{v} \\ my'' &= F_y + \lambda \frac{\delta f}{\delta y} \pm k\lambda \Delta f \frac{y'}{v} \\ mz'' &= F_z + \lambda \frac{\delta f}{\delta z} \pm k\lambda \Delta f \frac{z'}{v} \end{aligned} \right\} f(x, y, z) = 0,$$

де  $\lambda$  - невизначений множник Лагранжа;

$k$  – коефіцієнт тертя.

Вирази

$$\frac{x'}{v} = \frac{dx}{ds} = \cos(v, x);$$

$$\frac{y'}{v} = \frac{dy}{ds} = \cos(v, y);$$

$$\frac{z'}{v} = \frac{dz}{ds} = \cos(v, z)$$

є косинусами кутів між осями координат і дотичною до траєкторії руху

$$\lambda = \frac{N}{\Delta f}.$$

### Контрольні запитання

1. Які сили діють на частинку, що рухається похилою поверхнею?
2. Задачі динаміки та кінематичні елементи руху.
2. Скласти систему диференціальних рівнянь, що описує траєкторію руху частинки похилою площиною?
3. У якому випадку може виникнути затор на похилій площині?
4. Охарактеризувати відомі системи координат, що можуть бти використані для створення моделей руху точки.
5. Яким чином побудувати параметричний графік за допомогою MathCAD?

Тема №16

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ЄМКОСТЕЙ  
СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ АГРЕГАТИВ

§1 Теорія вільних струменів Гельмгольца-Кірхгофа

Використана нижче модель заснована на ідеях і результатах теорії вільних струменів Гельмгольца – Кірхгофа. Розглянемо велику ємкість, заповнену рідиною густини  $\rho$  при тиску  $p_1$ . Зовні ємності знаходиться рідина меншої густини, тиск в якій дорівнює  $p_0$ , де  $p_0 < p_1$ . Якщо відкрити малий отвір в стінці ємкості, рідина буде витікати в зону більш низького тиску у формі струменя, границя якого з оточуючою (більш легкою) рідиною вільна. Коли встановлюється стаціонарна течія, швидкість струменя  $u$  можна обчислити вказаним нижче способом.

Розглянемо лінію струму АВ на рис.1. В стаціонарній течії із інтеграла Бернуллі, нехтуючи силами тяжіння, витікає, що величина  $p + (1/2)\rho u^2$  вдовж лінії струму постійна, так що

$$p_A + (1/2)\rho u_A^2 = p_B + (1/2)\rho u_B^2 \quad (1)$$

Враховуючи тепер закон збереження маси для кожної трубки струменя і те, що лінія струменя навколо точки В набагато ближча одна до одної, ніж навколо точки А, одержимо:

$$u_B \gg u_A$$

Тому вираз (1) можна записати у вигляді

$$p_A \approx p_B + (1/2)\rho u_B^2.$$

Так як тиск повинен бути безперестанним при переході через вільну поверхню течії, то

$$p_B = p_0.$$

Крім того, так як частинки рідини поблизу точки А знаходяться майже в стані спокою, то

$$p_A = p_1$$

Звідси,

$$u_B^2 = \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}$$

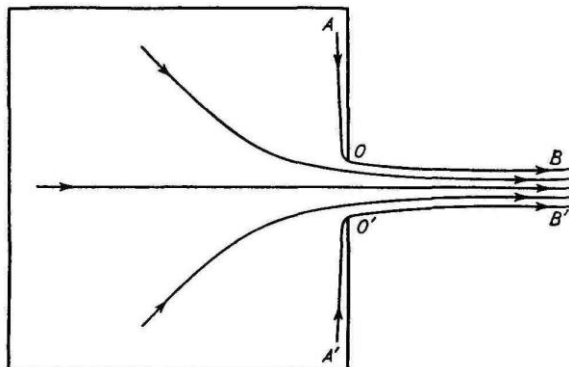


Рис.16.1 Витікання рідини з ємкості

Об'єм рідини, яка витікає із ємкості за одиницю часу, дорівнює

$$V = u_B A_B,$$

де  $A_B$  - поперечний перетин повністю розвинутого струменя навколо точки В. Площа  $A_B$  у загальному випадку не дорівнює площі отвору  $A_0$  так як після виходу із отвору струмись намагається звужитись. Причина звуження полягає в неможливості миттєвої зміни напрямку течії рідини навколо точок  $O$  і  $O'$ . Ефект звуження збільшується із ростом кута повороту лінії струменя. Коефіцієнт звуження

$$C = A_B / A_0$$

залежить тому від кута  $\alpha$ , який утворює дві стінки ємкості з віссю симетрії струменя.

Для плоскої течії задачу можна розв'язати точно, використовуючи теорію функцій комплексної змінної. Результати обчислень коефіцієнта звуження в цьому випадку приведені для різних кутів  $\alpha$  в табл.16.1 разом з деякими експериментальними даними.

Таблица 16.1

Коефіцієнти звуження

$\alpha$	0	22,5°	45°	67,5°	90°	180°
С(теорія)	1	0,855	0,745	0,666	0,611	0,500
С(дослід.)	-	0,882	0,753	0,684	0,632	0,541

Потрібно відмітити, що дослідні величини трохи вищі передбачених теорій, різниця лежить в межах від 1 до 8%.

Розглянемо тепер ємкість, відкриту з обох кінців з врахуванням дії сили тяжіння. Наприклад, розглянемо витікання із лійки, половина кута конусності якого рівна  $\alpha$  (рис.2). Із інтеграла Бернуллі виходить, що у разі стаціонарної течії величина  $p + (1/2)\rho u^2 + \rho gy$  постійна вздовж кожної лінії струму. Тоді для лінії струменя АВ маємо

$$p + (1/2)\rho u_B^2 = p_A + (1/2)\rho u_A^2 + \rho gh, \quad (2)$$

де  $h$  - висота від ОВ до вільної поверхні рідини. Помітимо, що  $h$  зменшуватиметься при витіканні рідини із лійки; проте, якщо площа вихідного отвору достатньо мала, зменшення висоти  $h$  відбуватиметься дуже повільно, і в цьому випадку течію наближено можна вважати стаціонарною.

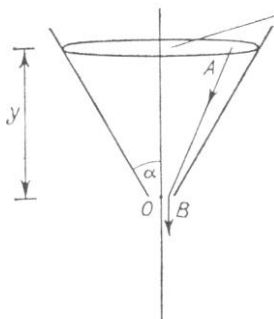


Рис.16.2 Витікання рідини з відкритої ємкості

Тиск в точках А і В повинен бути рівний зовнішньому тиску  $p_0$ . Як і раніше, величина  $u_A^2$  мала порівняно з  $u_B^2$ . Тоді вираз (2) приймає вигляд

$$(1/2)\rho u_B^2 = \rho gh,$$

або

$$u_B^2 = 2gh.$$

§2 Час спорожнення жорсткої ємкості довільної форми

Розглянемо ємкість, в початковий момент заповнену рідиною до висоти  $h$  від малого отвору, витікання через яке починається у момент часу  $t = 0$ . Для простоти розглянемо жорстку ємкість, кожна точка якої фіксована.

Припустимо, що висота поверхні у момент часу  $t$  рівна  $y$ , а площа вільної поверхні -  $S(y)$ . За час  $\Delta t$  рівень рідини падає на величину -  $\Delta y$ . Тоді об'єм рідини, що покидає ємкість, рівний

$$-S(y)\Delta y.$$

Швидкість, з якою рідина витікає з ємкості, рівна  $(2gy)^{1/2}$ , так що об'єм рідини, витікаючий за час  $\Delta t$ , рівний

$$AC(2gy)^{1/2} \Delta t,$$

де  $A$  - площа вихідного отвору;

$C$  - коефіцієнт звуження струменя.

Прирівнюючи ці вирази, маємо

$$-S(y) \frac{dy}{dt} = AC(2gy)^{1/2}. \quad (3)$$

Це рівняння першого порядку з розділеними і змінними, з якого можна визначити  $y$  як функцію  $t$

$$AC(2g)^{1/2} t = -\int_h^y \frac{S(y)}{y^{1/2}} dy. \quad (4)$$

Тут використана початкова умова  $y = h$  при  $t = 0$ .

Як характерний приклад розглянемо конічну ємкість з кутом  $2\alpha$  при основі. Поточний радіус перетину на висоті  $y$  рівний  $ytg\alpha$ , а площа перетину має вигляд

$$S(y) = \pi(ytg\alpha)^2.$$

Тоді вираз (4) прийме вигляд:

$$AC(2g)^{1/2} t = -\pi tg^2 \alpha \int_h^y y^{3/2} dy = \frac{2}{5} \pi tg^2 \alpha (h^{5/2} - y^{5/2})$$

Ємкість повністю спорожняється при  $y = 0$ , а час, необхідний для досягнення такого положення поверхні, рівний

$$y = \frac{\frac{2}{5} \pi t g^2 \alpha h^{5/2}}{AC(2g)^{1/2}}. \quad (5)$$

Записуючи цей вираз у відповідній формі, можна показати, що середня швидкість витікання рівна  $5/6(2gh)^{1/2}$ . Ця величина значно ближче до максимальної швидкості витікання  $(2gh)^{1/2}$ , ніж до мінімальної її величини, рівної нулю, оскільки більша частина рідини витікає, поки у достатньо близько до  $h$  і  $(2gy)^{1/2}$  близько до  $(2gh)^{1/2}$ . Точна величина постійної (рівної  $5/6$  в даному прикладі) залежатиме від форми ємкості і повинна бути більше  $1/2$ , якщо місткість розширяється від основи до верхньої частини. В цьому легко переконатися, якщо виконати необхідні викладення. Аналогічно, у разі циліндрової місткості, коли поперечний перетин не змінюється з висотою  $y$ , можна чекати, що величина постійної буде рівна  $1/2$ .

Результатом рішення задачі, в якій розглядається сімейство ємкостей, форми яких визначені залежністю площі поперечного перетину від висоти

$$S(y) = S_0 (y_0/h)^{2\pi}$$

є час спорожнення ємкості, і рівний

$$t = \frac{V_0}{AC\bar{v}}.$$

Тут  $V_0$  - початковий об'єм рідини в ємкості.

Середня швидкість витікання має вигляд:

$$\bar{v} = \frac{2n+1/2}{2n+1} (2gh)^{1/2}.$$

Слід зазначити, що для циліндрової ємкості, як і очікувалося,  $\bar{v} = (1/2)(2gh)^{1/2}$ ; для конуса  $\bar{v} = 5/6(2gh)^{1/2}$ .



Розглянута вище теорія є теорією стаціонарної течії, яка передбачає, що коли рівень рідини знаходиться на висоті  $y$ , швидкість витікання рівна  $(2gy)^{1/2}$ . Очевидно, що в початковий момент ця швидкість повинна бути рівна нулю, і таким чином, умови використання зазначеної вище теорії реалізується лише після проходження достатньо великого часу. В результаті запропонована теорія занижує величину часу, що вимагається для спорожнення ємкості.

Про початкову стадію течій відомо, досить мало, але наявної інформації цілком достатньо для вирішення нашої задачі. Для плоского струменя, що витікає з ємкості, стінки якої утворюють кут  $2\alpha = \pi$ , існує рішення, відхилення яких від відповідних стаціонарних рішень зменшуються з часом як  $\exp(-\lambda t)$ . Значення  $\lambda$  рівне

$$\lambda = \frac{(\pi + 2)U}{2d} (2 - \sqrt{2}) = \frac{1,506U}{d}.$$

В цьому виразі  $U$  є стаціонарною швидкістю струменя, а  $2d$  - шириною щілини (в плоскому випадку). Для симетричної течії з круглого отвору радіусу  $r$  можна припустити, що наближене значення  $\lambda$  за порядком величини буде рівне

$$\lambda = \frac{1,506U}{r} \approx \frac{1,506(2gh)^{1/2}}{r}.$$

У разі ємкості з поперечним перерізом  $S(y)$  рівняння для  $y(t)$  можна аналогічно з рівнянням (3) записати у вигляді

$$-S(y) \frac{dy}{dt} = AC(2gy)^{1/2} (1 - e^{-\lambda t}).$$

Причому, швидкість, витікання в точності рівна

$$(2gy)^{1/2} (1 - e^{-\lambda t}).$$

Тоді

$$-\int \frac{S(y)}{y^{1/2}} dy = AC(2g)^{1/2} \int (1 - e^{-\lambda t}) dt$$

і,

$$-\int_h^y \frac{S(y)}{y^{1/2}} dy = AC(2g)^{1/2} \left\{ t + \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda t} - 1) \right\}.$$

Звідси видно, що поправка до початково знайденого часу спорожнення ємкості не перевищує величини

$$\lambda^{-1} = \frac{0,664}{(2gh)^{1/2}}.$$

В розглянутій вище задачі площа отвору була  $0,258 \text{ см}^2$ , так що

$$\pi r^2 = 0,258$$

і, відповідно,

$$r = \frac{0,508}{\sqrt{\pi}} = 0,287 \text{ см}.$$

Оскільки  $(2gh)^{1/2} = 157 \text{ см/с}$ , то величина максимальної поправки  $\lambda^{-1} = 0,0012 \text{ с}$  мала. Очевидно, ефект нестационарності може стати значним тільки у разі, коли відносний розмір отвору суттєво більший, ніж в цій задачі.



Рис.16.3 Приклад застосування моделей витікання рідини у сільськогосподарському виробництві

### Контрольні запитання

1. З яких міркувань отримана формула для визначення середньої швидкості струменя рідини, що витікає ?

2. Яким чином отримана залежність для визначення часу витікання рідини з ємності ?
3. Чому запропонована математична модель витікання рідини з ємності потребує часової поправки  $\lambda$  ?
4. Назвіть способи знаходження початкового наближення.
5. Яку функцію для розв'язку одного рівняння в MathCAD Ви знаєте ?

### Тема № 17

## МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ СЕПАРАЦІЇ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАТЕРІАЛІВ

### §1 Моделювання робочого процесу сепарації

Сепаратори сільськогосподарських матеріалів призначені для виділення із загальної маси матеріалу окремих елементів вороху. Прикладом може бути виділення із соломи дрібного вороху (зерно, полова). У сучасних зернозбиральних машинах широко використовуються клавішні соломотряси. Умови роботи соломотряса досить складні. Встановлено, що на їх долю випадає до 85% усіх втрат при молотінні.

Суть процесу сепарації полягає у багатократній дії робочих органів на оброблюваний рослинний матеріал. При цьому насіння, що має менші розміри і більш обтічну форму, а ніж стеблові компоненти вороху, поступово проходить крізь просторову решітку соломи стих складових вороху і просипається вниз. Тобто процес виділення сепаратором насіння (зерна) характеризується ймовірністю  $\mu_1$  просіювання його крізь просторову решітку солонистих складових вороху і ймовірністю  $\mu_2$  просіювання крізь сам сепаратор. Загальна ймовірність  $\mu$  просіювання рівна добутку ймовірностей  $\mu_1$  та  $\mu_2$ .

Умовно приймаючи інтенсивність просіювання насіння постійною по усій довжині сепаратора, цю величину  $\mu$  називають коефіцієнтом сепарації. Для аналізу величини  $\mu$  застосовуються емпіричні залежності:

$$\mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{V_{cp} t_n}, \quad \mu h^n = const, \quad (1)$$

де  $V_{cp}$  - середня швидкість переміщення соломи, м/с;

$t_n$  - проміжок часу між збуреннями матеріалу;

$h$  – товщина шару вороху на сепараторі;

$n = 0,8...1,2$  (більші значення відносяться до складніших умов роботи машини).

Як вже зазначалось, коефіцієнт сепарації являє собою відносну ймовірність просіювання насіння на одиниці довжини сепаратора ( $m^{-1}$ ). Схематично це явище показано на рис.1. На схемі показано рух вороху по решітці сепаратора і поступовий прохід насіння крізь отвори решітки, у зв'язку з чим при незмінності висоти шару вороху зменшується висота шару, що містить насіння. Проведемо вісь  $X$  по поверхні решітки вправо, початок координат  $O$  помістимо на початку решітки, а вісь  $Y$  направимо вгору. Абсциса  $x$  являє собою шлях руху елемента вороху по сепаратору, ордината  $y$  буде являти собою кількість насіння у воросі на одиниці довжини сепаратора. За нескінченно малий проміжок часу  $dt$  елемент вороху переміститься з положення  $X$  на нескінченно малий шлях  $dx$ . На цьому шляху  $dx$  відносна ймовірність просіювання насіння через решітку сепаратора буде  $\mu dx$ . В час  $t$ , коли елемент вороху знаходився в положенні  $x$ , кількість насіння у ньому була  $y$ , а коли елемент вороху досяг положення  $x+dx$ , кількість насіння стало  $y-dy$ . Таким чином,  $dy$  є величина просіювання, тоді  $dy/y$  буде являти відносну величину просіювання. Відносну ймовірність просіювання  $\mu dx$  і відносну величину просіювання  $dy/y$  можна прирівняти, тоді

$$-\frac{dy}{y} = \mu dx, \quad (2)$$

де знак "–" поставлений перед  $dy/y$  через те, що при збільшенні  $x$  зменшується  $y$ .

Іншими словами, кількість насіння на нескінченно малій ділянці  $dy/y$  пропорційна їх кількості, що поступили на цю ділянку. При цьому співвідношення  $dy/y$  до  $dx$ , або відношення швидкості зміни функції на одиницю величини функції, є величина постійна і рівна коефіцієнту сепарації  $\mu$ .

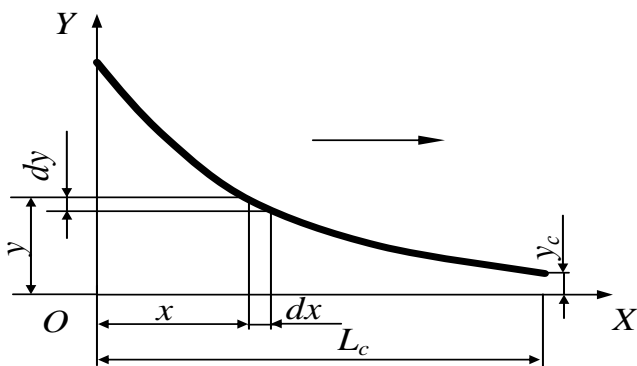


Рис.17.1 Схеми зменшення кількості насіння на соломотрясі

Коефіцієнт сепарації  $\mu$  може дещо змінюватись по довжині сепаратора.

$$\mu' = k \cdot x^{0.25}, \quad (3)$$

де  $k$  – дослідний коефіцієнт.

Для подальших розрахунків приймаємо, що  $\mu = \text{const}$  по усій довжині сепаратора. Інтегруючи ліву і праву частину рівності (2) отримаємо:

$$-\int \frac{dy}{y} = \int \mu dx \quad \text{і} \quad -\ln y = \mu x + C, \quad (4)$$

де  $C$  – постійна інтегрування.

Для визначення  $C$  врахуємо початкові умови. При  $x=0$ ,  $y=a$ , де  $a$  – кількість насіння, що поступило на сепаратор із ворохом. Підставляючи ці дані у отримані рівності отримаємо  $-\ln a = C$ . З врахуванням цього результат інтегрування буде

$$-\ln y = \mu x - \ln a, \quad \ln \frac{a}{y} = \mu x$$

$$\text{і} \quad y = e^{-\mu x}. \quad (5)$$

За таким законом змінюється кількість насіння у воросі сільськогосподарських матеріалів при його русі по сепаратору, а рівняння (5) – є рівнянням сепарації.

Основні фактори, що впливають на якість сепарації це – вид, сорт і фізико-механічні властивості рослинного матеріалу, завантаження сепаратора і його кінематичний режим роботи ( $k = \omega^2 r / g$ ). Крім того також впливає ступінь подрібнення вороху і вміст у ньому нехарактерних включень, рівномірність завантаження сепаратора, засміченість механізму. Із збільшенням вологості вороху  $W$  зростають відносні втрати  $\varepsilon$  (%) насіння у відповідності до залежності:

$$\varepsilon = 0,01 \sqrt{w^3}. \quad (6)$$

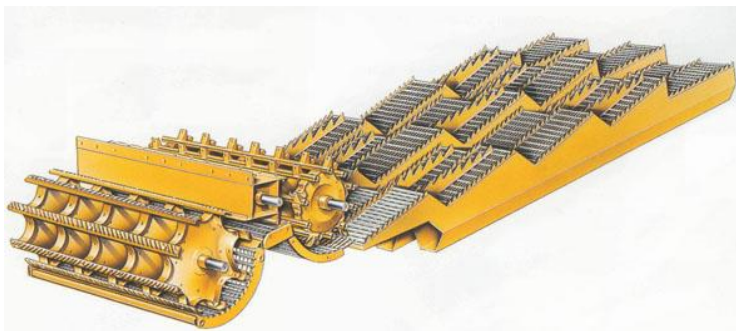


Рис.17.2 Моделювання процесу сепарації зернового вороху

§2 Імовірнісна модель процесу сепарації

При моделюванні процесу сепарації, наприклад сепарації кам'яної суміші, можна виходити із припущення про стохастичний характер руху та просіювання частинок сипкої суміші на сепараторі (грохоті).

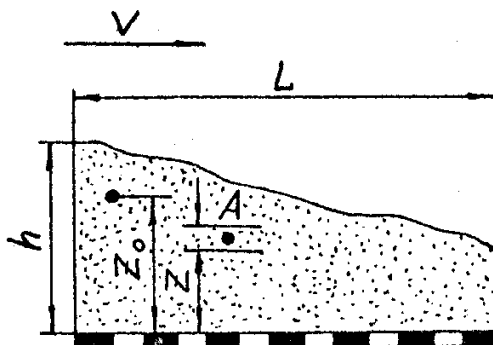


Рис.17.3 Схема сепарації кам'яної суміші

За умови повного завантаження грохота (рис.2.) випадіння частинок ґрунту із сепаратора можна зобразити як випадковий процес, який складається з двох стадій: перша – проходження частинок крізь шар сипкого матеріалу (подія  $C^0$ ) і друга – проходження їх через отвори грохота (подія  $n$ ). Тоді ймовірність  $p(t)$  випадіння частинки ґрунту із сепаратора за час  $t$  на підставі теореми про добуток ймовірностей виражається так:

$$p(t) = p(C^0)p(n/C^0), \quad (7)$$

де  $p(C^0)$ ,  $p(n/C^0)$  - імовірність відповідно опускання частинки на поверхню грохота та просіювання частинки за час  $t$ .

Переміщення частинки в шарі сепарованої суміші, яке супроводжується спливанням одних і опусканням інших частинок на поверхню грохота, розглядається як стохастичний процес без наслідку та ототожнюється з безперервним "блуканням". Дія гравітаційного поля не враховується.

Нехай одна дрібна частинка  $A$  безладно рухається серед інших частинок суміші, що розділюється. Положення частинки в шарі визначатиметься ординатою  $z$ , яка відраховується від поверхні грохота за нормаллю. Внаслідок безладного руху ордината частинки отримуватиме випадкові додатні та від'ємні прирости, отже, зміну її положення з плином часу можна розглядати як випадковий процес, для якого можна визначити в деякий момент часу ймовірність знаходження частинки у тій області, що нас цікавить.

Користуючись рівнянням одновимірної дифузії, можна знайти ймовірність опускання частинки на поверхню грохота через шар  $z_0$ :

$$p(z_0, t) = \int_0^t \frac{z}{\tau \sqrt{2\pi B\tau}} \cdot e^{-\frac{(z_0 - C\tau)^2}{2B\tau}} d\tau, \quad (8)$$

де  $\tau$  - час;  $B$ ,  $C$  - стохастичні коефіцієнти,

$$B = \frac{\Theta}{\mu^2}; \quad C = \frac{m\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)g}{\mu}; \quad (9)$$

$\Theta$  - інтенсивність випадкового впливу;

$m$  - маса частинки;

$\rho$ ,  $\rho_0$  - густина відповідно середовища та частинки;

$g$  - прискорення вільного падіння;

$\mu$  - коефіцієнт ефективності в'язкості середовища.

Коефіцієнт  $C$  характеризує середню швидкість вимушеного перенесення частинок під впливом гравітаційного поля; коефіцієнт  $B$  - рухомість частинок у шарі, він є мірою неупорядкованості руху частинок під випадковим впливом. Обидва коефіцієнти залежать від в'язкості середовища,

швидкості потоку  $V$ , гранулометричного складу суміші, фізико-механічних властивостей частинок.

Замінімо  $Z_0$  товщиною шару  $h$  і введемо універсальний параметр процесу

$$H = \frac{h}{\sqrt{2B\tau}}, \quad (10)$$

який також можна виразити через кінематичні та завантажувальні параметри грохота у вигляді

$$H = \frac{Q_0}{\gamma b \sqrt{2bLV}}, \quad (11)$$

де  $Q_0$  - продуктивність грохота;

$\gamma$  - насипна вага;

$b, L$  - ширина та довжина грохота;

$V$  - середня швидкість подавання.

Тоді вираз повноти відокремлення частинок із шару  $E_\phi$  запишеться через узагальнений інтеграл ймовірності:

$$E_{uu} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^H e^{-\left(x-\frac{h}{x}\right)^2} dx. \quad (12)$$

Аналогічно з виразу ймовірності просіювання частинки через грохот за час  $t$  можна визначити повноту відокремлення для частинок, які перебувають на поверхні грохота:

$$E_e = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}, \quad (13)$$

де  $\tau_0$  - стала часу процесу.

Із наведених рівнянь випливає, що кінематичні параметри грохота впливають на якість процесу просіювання сипкого матеріалу не безпосередньо, а через зміну часу сепарування, швидкості переміщення та товщини шару, який перебуває над грохотом. Повнота відокремлення підвищується із збільшенням тривалості сепарування, зменшенням шару, збільшенням довжини грохота та зниженням подання матеріалу.





Рис.17.3 Пісчано-кам'яна суміш

§3 Емпірична модель процесу сепарації (віброгрохотування)

Схема вібраційного барабанного грохота зображено на рис.3.

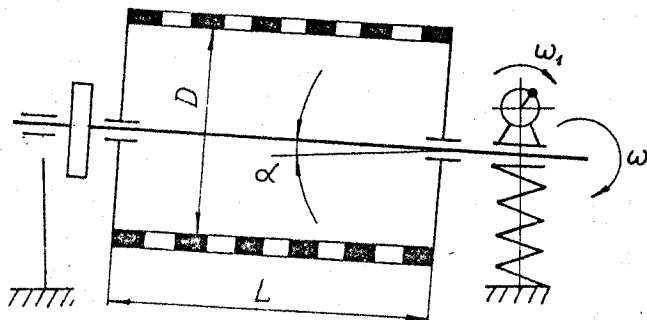


Рис.17.4 Схема барабанного вібраційного грохота

Покажемо основні фактори, що впливають на енергетичні показники процесу сепарації на віброгрохоті:  $\Psi$  - частота коливань;  $A$  - амплітуда коливань;  $V$  - об'єм барабана;  $m$  - маса барабана;  $g$  - прискорення вільного падіння. Якщо потужність, яка витрачається на коливання барабана позначити  $N$ , то функціональну залежність розглядуваного процесу можна подати у вигляді:

$$N = f(\Psi, A, V, m, g). \quad (14)$$

Розкрити цю закономірність за допомогою експериментальних даних дуже важко. Щоб спростити експеримент, скоротити число дослідів, використаємо метод аналізу розмірностей. Запишемо розмірності всіх параметрів (факторів):

$$\begin{aligned} [N] &= [M^1 L^2 T^{-3}]; [\Psi] = [M^0 L^0 T^{-1}]; \\ [A] &= [M^0 L^1 T^0]; [V] = [M^0 L^3 T^0]; \\ [m] &= [M^1 L^0 T^0]; [g] = [M^0 L^1 T^{-2}]. \end{aligned}$$

Зобразимо залежність параметра  $N$  від факторів у вигляді степеневого рівняння:

$$N = C \Psi^{x_1} A^{x_2} V^{x_3} m^{x_4} g^{x_5}, \quad (15)$$

де  $C$  – безрозмірна стала величина;  $x_i$  – невідомі показники степеня ( $i=1,2,3,\dots,5$ ).

Запишемо рівняння розмірностей:

$$[M^1 L^2 T^{-3}] = [M^0 L^0 T^{-1}]^{x_1} [M^0 L^1 T^0]^{x_2} [M^0 L^3 T^0]^{x_3} [M^1 L^0 T^0]^{x_4} [M^0 L^1 T^{-2}]^{x_5}. \quad (16)$$

Зрівняємо показники степеня за однакових символів розмірностей і дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 = 0 + 0 + 0 + x_4 + 0; \\ 2 = 0 + x_2 + 3x_3 + 0 + x_5; \\ -3 = -x_1 + 0 + 0 + 0 - 2x_5. \end{cases}$$

Щоб розв'язати систему, достатньо експериментально визначити два показники степеня. Якщо  $x_1$  та  $x_2$  будуть відомі, то інші величини набудуть таких значень:

$$x_3 = \frac{x_1 - 2x_2 + 1}{6}; \quad x_4 = 1; \quad x_5 = \frac{3 - x_1}{2}. \quad (17)$$

Початковий вираз для потужності запишеться так:

$$N = C g^{\frac{3-x_1}{2}} \Psi^{x_1} A^{x_2} V^{\frac{x_1-2x_2+1}{6}} m. \quad (18)$$

Для визначення числових показників степенів критеріального рівняння (18), можна скористатись дослідними даними. За результатами дослідів отримується залежність потужності, яка витрачається на вібрацію барабана, від амплітуди і частоти коливань.

### Контрольні запитання

1. *Моделювання робочого процесу сепарації на клавійному соломотрясі?*
2. *Імовірнісна модель процесу сепарації.*
3. *Емпірична модель процесу сепарації (віброгрохутування.)*
4. *Назвати приклади створення моделей СГМ на основі явища сепарації матеріалу.*

### Тема № 18

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ВИРОБНИЦТВО

### *§1 Моделювання технологічних процесів переробки сільськогосподарської продукції*

Моделюванню передують постановка задачі моделювання, яка в технічних дисциплінах називається технічним завданням.

Розглянемо постановку задачі, яка дозволяє описати політ частинки матеріалу (гранула, зерно, сипкий матеріал), що відбувається внаслідок дії на неї робочого органу машини (така взаємодія матеріалу з робочим органом реалізується під час роботи бітера, крилача та ін.) (рис.18.1). Модель має дозволити обчислити положення частинки матеріалу в будь-який момент часу. Вихідні дані: маса частинки, початкові координати та початкова швидкість частинки та кут під яким вона відкидається.

На основі моделі розробляється концептуальне формулювання задачі моделювання. У нашому випадку рух частинки можна описати за допомогою законів класичної механіки Ньютона, приймаючи:

- частинку матеріалу будемо вважати матеріальною точкою масою  $m$ , положення якої співпадає з центром мас частинки;

- рух відбувається в полі дії сили ваги з постійним прискоренням вільного падіння  $g$  та описується рівняннями класичної механіки Ньютона;
- рух частинки відбувається в одній площині, що перпендикулярна поверхні землі;
- опір повітря залежить від швидкості руху частинки та описується відомою залежністю;
- в якості параметрів руху будемо використовувати координати  $(x, y)$  та швидкість центра мас частинки  $V (V_x, V_y)$ .

Таким чином, необхідно визначити закон руху матеріальної точки масою  $m$  під дією сили ваги, якщо відомі початкові координати точки  $x_0$  та  $y_0$ , її початкова швидкість  $V_0$  (визначається як  $V_0 = \omega r$ , де  $\omega$  – кутова швидкість робочого органу,  $r$  – радіус робочого органу) та кут під яким частинка починає політ  $\alpha_0$ .

Складемо математичну модель об'єкта. Згідно з законом Ньютона маємо рівняння руху по осі  $X$  та  $Y$ :

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -F_{mpx}, \quad m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -mg - F_{mpy}, \quad V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt},$$

за наступних початкових умов:  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $V_x(0) = V_0 \cdot \cos \alpha_0$ ,  $V_y(0) = V_0 \cdot \sin \alpha_0$ . Знайти залежності  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $V_x(t)$ ,  $V_y(t)$ .

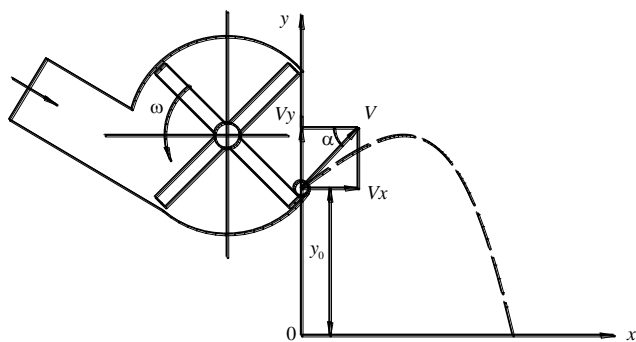


Рис.18.1 Розрахункова схема математичної моделі

Опір повітря залежить від швидкості руху частинки та описується наступною емпіричною формулою:

$$F_{mp} = A \cdot V + B \cdot V^3,$$

де  $A = 0,1 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ ;  $B = 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с}^3/\text{м}^3$ .

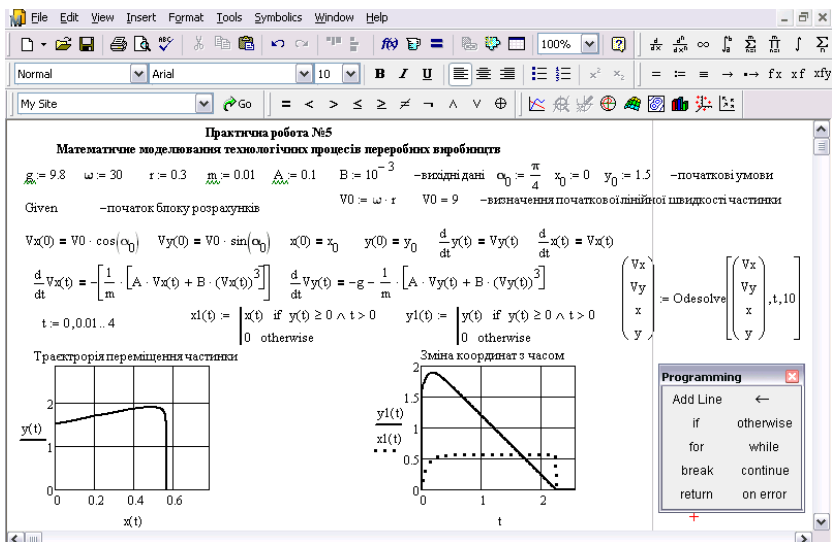


Рис.18.2. Програмна реалізація чисельного рішення математичної моделі

Оскільки нелінійні задачі в аналітичній формі, як правило, не розв'язуються, то виберемо для розв'язку чисельний метод, що легко реалізується функціями MathCAD.

Для розв'язку даної задачі використаємо функцію Odesolve. Розв'язок задачі та відображення результатів представлено на рис.18.2.

## §2 Математичне моделювання віброшару з конвективним підведенням тепла

У сільськогосподарському виробництві широко поширені технологічні процеси, що передбачають знаходження матеріалу в віброкиплячому шарі. До таких процесів, зокрема, відноситься сушіння в віброкиплячому шарі з підведенням тепла від нагрітого газу, що підводиться під перфоровану решітку, на якій знаходиться шар сипкого матеріалу.

Розглянемо теоретичні основи визначення оптимальних параметрів коливання решітки під час сушіння сипких матеріалів у віброкиплячому шарі з конвективним підведенням тепла. Під час встановлення оптимальних параметрів вібрації необхідно керуватися такими міркуваннями:

- необхідно забезпечити режим з неперервним підкиданням матеріалу, за якого досягається максимальний час перебування частинки матеріалу в підвищеному стані;

- вібраційна дія має забезпечити можливість існування псевдорозрідженого шару при швидкості повітря нижче критичної;

- гідравлічний опір шару має бути мінімальним;

- прийняті параметри вібрації повинні забезпечувати зниження енергетичних витрат в порівнянні з псевдорозрідженням на нерухомій решітці.

Під час гармонічних коливань перфорованої пластини та дії перпендикулярно спрямованого повітряного потоку (рис.18.3) рівняння руху частинки в системі координат  $xOy$  буде мати вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mA\omega^2 \cos(\beta) \sin(\omega t) - mg \sin(\alpha) + F ; \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mA\omega^2 \sin(\beta) \sin(\omega t) - mg \cos(\alpha) + P_N + P_y , \quad (2)$$

де  $m$  – маса частинки, кг;

$A$  – амплітуда коливань, м;

$\omega$  – кутова частота коливань,  $c^{-1}$ ;

$\beta$  – кут між напрямком коливань та решіткою, град.;

$\alpha$  – кут нахилу решітки до горизонту, град.;

$F$  – сила тертя, Н;

$P_N$  – сила нормального тиску, Н;

$P_y$  – проекція на вісь  $y$  сили тиску повітряного потоку, Н;

$A\omega^2 = a_B$  – прискорення вібрації,  $m/c^2$ .

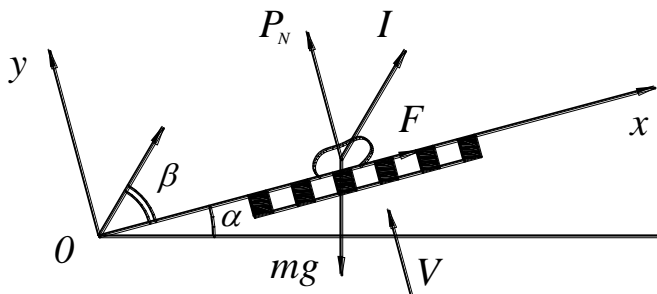


Рис.18.3 Розрахункова схема віброшару з конвективним підведенням тепла

За певних припущень проєкція сили тиску повітряного потоку на частинку може бути визначена з рівняння:

$$P_y = mg \frac{V^2}{V_B^2}, \quad (3)$$

де  $V$  – швидкість повітряного потоку, м/с;

$V_B$  – швидкість витання частинки (критична швидкість), м/с.

У випадку виконання умови:

$$z_0 = \frac{g}{A\omega^2} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)} < 1 \quad (4)$$

в деякий момент часу, що визначається з рівняння  $\sin(\omega t_0) = z_0$ , нормальна реакція та сила тертя перетворюються в нуль і частинка відривається від решітки.

Рівняння польоту частинки (при  $P_N = 0$ ) можуть мати вигляд:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = A\omega^2 \cos(\beta) \sin(\omega t) - g \sin(\alpha); \quad (5)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = A\omega^2 \sin(\beta) \sin(\omega t) - g \cos(\alpha) \left(1 - \frac{V^2}{V_B^2} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)}\right). \quad (6)$$

Введемо позначення:

$$k = 1 - \frac{V^2}{V_B^2} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)}. \quad (7)$$

Застосувавши методику І.І. Блехмана, Г.Ю. Джанелідзе та припущення, що швидкість повітря не залежить від параметрів коливань решітки, отримаємо рівняння, які обумовлюють існування режиму з неперервним підкиданням при наявності потоку повітря:

$$\omega_0 = k\sqrt{\pi^2 P^2 + 1}, \quad (8)$$

де  $\omega_0 = \frac{A\omega^2}{g} \cdot \frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}$  – параметр режиму коливань;

$P = 1, 2$  – число періодів коливань.

За відсутності повітряного потоку ( $V = 0$ ) коефіцієнт  $k = 1$ , тоді вираз, що обумовлює існування режиму з неперервним підкиданням, має вигляд:

$$\omega_0 = \sqrt{\pi^2 P^2 + 1}, \quad (P = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Якщо політ частинки відбувається в межах одного періоду коливань ( $P = 1$ ), тоді прискорення буде дорівнювати  $3,296g$  м/с<sup>2</sup>.

Аналіз рівняння (8) свідчить про те, що в результаті дії повітряного потоку для досягнення режиму з неперервним підкиданням прискорення

вібрації може бути дещо знижене, що сприятиме більш тривалій роботі приводу. Таким чином, під час сушіння сипких матеріалів на коливному решеті прискорення вібрації повинно бути нижче  $3,296g$   $m/c^2$ .

Встановимо траєкторію польоту частинки сипкого матеріалу під час сушіння на вібраційному решеті з перпендикулярним до нього потоком повітря на прикладі. Для цього складемо та розв'яжемо систему диференціальних рівнянь математичної моделі спочатку аналітичним способом, а потім за допомогою функції **Odesolve** системи MathCAD (рис.18.4).

Розв'язок математичної моделі представимо у вигляді параметричного графіка (рис.18.4). Крім того, визначимо похибку розв'язку математичної моделі засобами MathCAD.

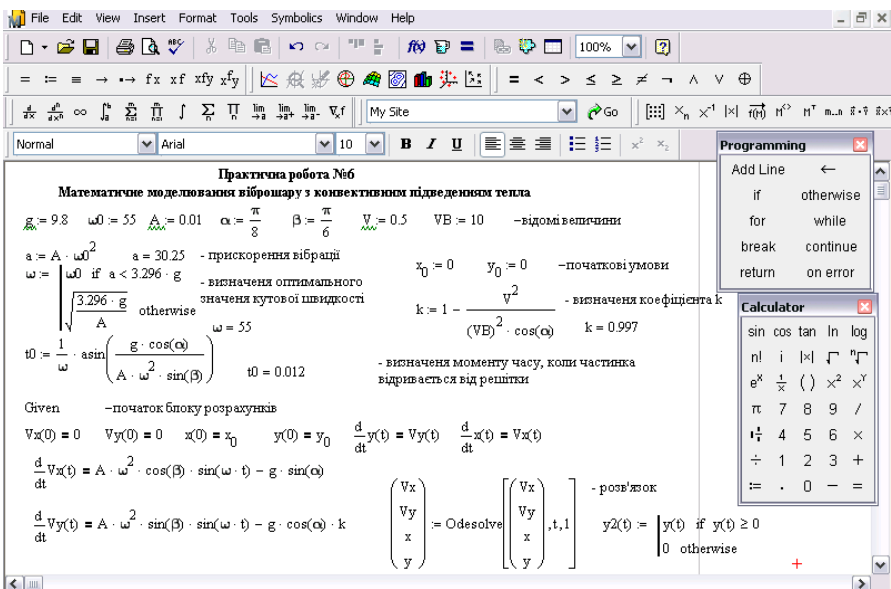


Рис.18.4 Приклад математичного моделювання віброшару з конвективним підведенням тепла засобами MathCAD

Інтегруючи рівняння (5) та (6) за початкових умов: при  $t = 0$ ,  $V_x(0) = 0$ ,  $V_y(0) = 0$ , отримаємо:



$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \cos(\beta) \cos(\omega t) - gt \sin(\alpha) + A\omega \cos(\beta); \quad (10)$$

$$\frac{dy}{dt} = -A\omega \sin(\beta) \cos(\omega t) - gt \cos(\alpha) \left(1 - \frac{V^2}{V_B^2} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)}\right) + A\omega \sin(\beta). \quad (11)$$

Інтегруючи рівняння (10) та (11) за початкових умов: при  $t = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ , отримаємо:

$$x(t) = -A \cos(\beta) \sin(\omega t) - \frac{gt^2}{2} \sin(\alpha) + A\omega t \cos(\beta); \quad (12)$$

$$y(t) = -A \sin(\beta) \sin(\omega t) - \frac{gt^2}{2} \cos(\alpha) \left(1 - \frac{V^2}{V_B^2} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)}\right) + A\omega t \sin(\beta). \quad (13)$$

За отриманими рівняннями будемо траєкторію польоту частинки сипкого матеріалу (рис.18.4).

### *§3 Математичне моделювання процесу пресування рослинних матеріалів*

Пресування – це процес ущільнення рослинних матеріалів до  $400 \text{ кг/м}^3$ . Крім пресування, застосовується брикетування (ущільнення до  $400\text{-}900 \text{ кг/м}^3$ ) та гранулювання ( $900\text{-}1300 \text{ кг/м}^3$ ). Пресування рослинного матеріалу покращує його збереження, зменшує потреби в транспортних засобах та дозволяє скорочувати розміри приміщень для зберігання.

Розглянемо закономірності пресування рослинного матеріалу у закритій камері. Схема цього процесу зображена на рис.18.5. Стиск матеріалу проходить на ділянці  $AK$  камери ходом поршня вправо. Початок стиснення матеріалу поршнем – точка  $A$ . Нехай поршень пройшов шлях  $S$ . Виділимо на відстані  $x$  від поршня елемент рослинного матеріалу. На цей елемент діють у напрямку тиску стиснення  $q_x$  і  $q_x + dq_x$ , де  $dq_x$  – приріст стиснення на ділянці  $dx$  ( $q_x$  і  $q_x + dq_x$  – це стиснення всередині шару матеріалу, тому правильніше їх називати напруження). Стінки камери при стисненні перешкоджають розширенню стиснуваного матеріалу і сприймають тиск зі сторони матеріалу. Це стиснення розпирає матеріал в напрямку, перпендикулярному до лінії дії стискуючої сили, створюючи боковий розпір. Таким чином, матеріал при стиску перебуває під стискуючою дією поздовжньої сили й реакцій бокового розпору.

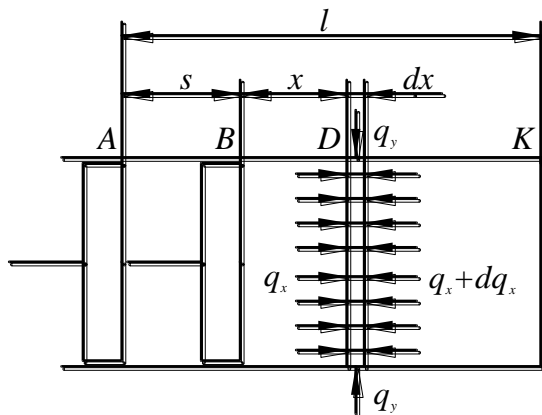


Рис.18.5 Схема до визначення опору руху поршня при стисканні матеріалу

Досліди показали, що поздовжній тиск пропорційний боковому. Боковий тиск з достатнім наближенням можна визначити:

$$q_y = \mu q_x, \quad (14)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт бокового тиску,  $\mu < 1$ .

На основі викладеного на елемент рослиного матеріалу, який розглядається, поряд з тисками  $q_x$  і  $q_x + dq_x$  діють боковий тиск  $q_y$  і тертя в місцях контакту зі стінками, яке враховується коефіцієнтом тертя  $f$ , при цьому сила тертя, що припадає на одну одиницю площі контакту матеріалу зі стінками, буде  $f q_y$ . Складемо рівняння рівновагим сил, що діють на елемент в напрямку стиску:

$$q_x S_n - (q_x + dq_x) S_n - f q_y u dx = 0, \quad (15)$$

де  $S_n$  – площа поперечного перерізу камери, м<sup>2</sup>;

$u$  – периметр поперечного перерізу камери (тертя має місце по площі  $u dx$ ), м.

З (15) з врахуванням (14) випливає, що:

$$dq_x / q_x = (-f \mu / S_n) dx. \quad (16)$$

Після інтегрування матимемо:

$$\ln q_x = (-f \mu / S_n) x + c, \quad (17)$$

де  $c$  – стала інтегрування.

Днище камери (зона  $K$ ) сприймає тиск  $q$  тільки внаслідок опору матеріалу стисненню (тертя тут відсутнє). Тому  $q_x = q$  при  $x = l - s$ , де  $l$  –

відстань  $AK$ . Підставляючи ці дані у приведене рівняння й розв'язуючи його, знаходимо  $s$ , після чого одержуємо:

$$q_x = qe^{\frac{f\mu}{S_n}(l-s-x)}, \quad (18)$$

де  $q$  – тиск, який визначається за головною кривою стиснення.

Рівняння головної кривої стиснення визначалося багатьма авторами. Одержані різні залежності, але найчастіше для рослинних матеріалів застосовується залежність:

$$q = b(e^{a(\rho-\rho_0)} - 1), \quad (19)$$

де  $a$  та  $b$  – дослідні коефіцієнти.

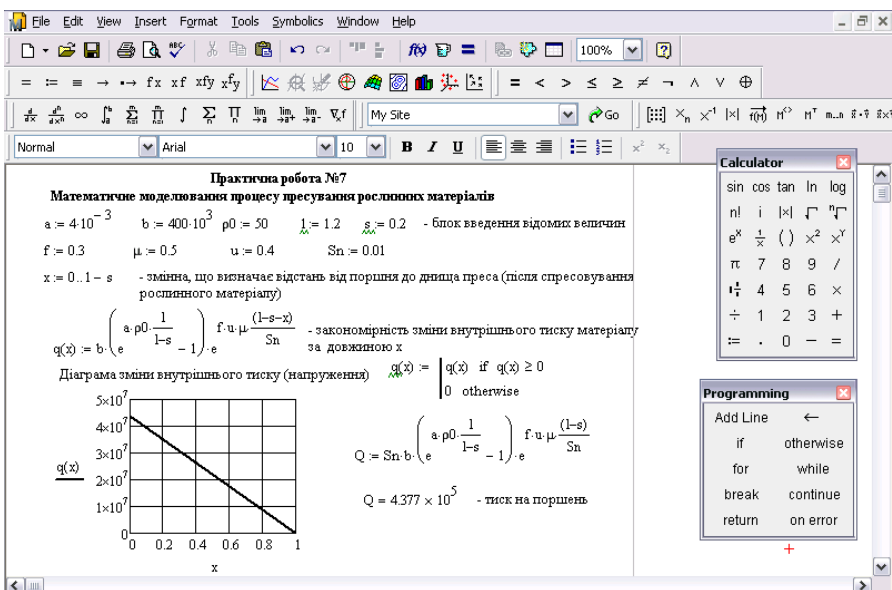


Рис.18.6 Приклад визначення зміни внутрішнього тиску (напруження)  $q_x$  рослинного матеріалу, що спресовується, за довжиною камери  $x$

Якщо позначити масу матеріалу, який стискається  $m$ , то  $\rho_0 = m/(S_n l)$ , а  $\rho = m/(S_n(l-s))$ , де  $S_n l$  та  $S_n(l-s)$  – об'єми, що займаються матеріалом на початку стиску й у процесі стискання. З першої рівності знаходимо  $m = S_n l \rho_0$ . Підставляючи значення  $m$  в другу рівність, знаходимо  $\rho = \rho_0 l / (l-s)$ . Підставивши значення  $\rho$  в (19), одержимо:

$$q = b(e^{a\rho_0^{l/(l-s)}} - 1). \quad (20)$$

Підставляючи (7.7) в (7.5), матимемо:

$$q_x = b(e^{a\rho_0^{l/(l-s)}} - 1)e^{f\mu(l-s-x)/S_n}. \quad (21)$$

З (21) бачимо, що із зменшенням  $x$  внутрішній тиск збільшується. Найбільший він буде при  $x = 0$ , а це є тиск на поршень. Тоді сила тиску:

$$Q = q_x S_n = S_n b(e^{a\rho_0^{l/(l-s)}} - 1)e^{f\mu(l-s)/S_n}. \quad (22)$$

Приклад застосування наведених теоретичних положень представлено на рис.18.6.

Більшість робочих органів машин та обладнання переробних виробництв здійснюють складний рух. Досить поширеним є випадок, коли механізм здійснює поступальний прямолінійний рух, а робочий орган – обертальний рух (ножі, змішувачі та ін.). Так, для нарізки спресованого рослинного матеріалу може використовуватися механізм, що здійснює рух вздовж паковки рослинного матеріалу, а робочий орган (ніж), встановлений на ньому – обертальний рух. Для випадку, представленому на рис.18.7, рівняння, що описують траєкторію руху крайньої точки ножа в прямокутній декартовій системі координат, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} x &= Vt; \\ y &= r \sin(\omega t); \\ z &= r \cos(\omega t); \end{aligned} \quad (23)$$

де  $V$  – лінійна швидкість механізму вздовж паковки, м/с;  
 $r$  – відстань від осі обертання до крайньої точки ножа, м;  
 $\omega$  – кутова швидкість обертання робочого органу, с<sup>-1</sup>;  
 $t$  – час, с.

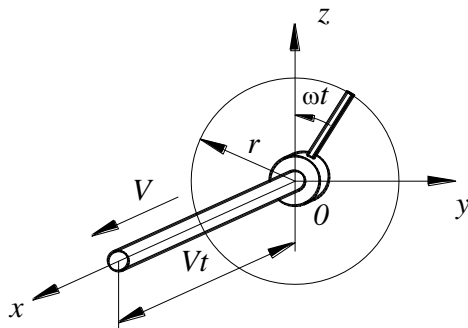


Рис.18.7 Розрахункова схема механізму для нарізки спресованого рослинного матеріалу

Приклад побудови траєкторії руху крайньої точки ножа за допомогою функції CreateSpace представлено на рис.18.8.

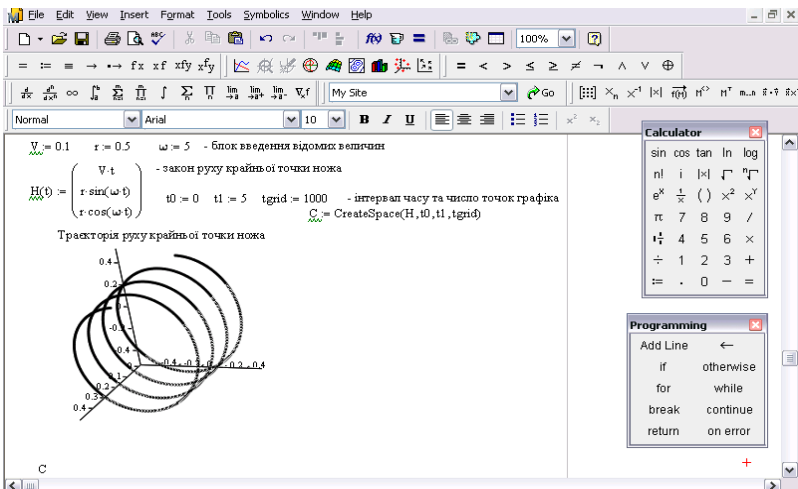


Рис.18.8. Приклад побудови траєкторії руху крайньої точки ножа

### Контрольні запитання

1. Виконання яких дій передбачає комплексне моделювання?
  2. Методи розв'язання задач моделювання?
  3. Які функції MathCAD дозволяють розв'язати системи диференціальних рівнянь?
- Якими міркуваннями необхідно керуватися під час встановлення оптимальних параметрів вібрації?
4. Які сили діють на частинку, що знаходиться вібросереті з конвективним підведенням тепла?
  5. Скласти систему диференціальних рівнянь, що описує траєкторію польоту частинки на вібросереті з конвективним підведенням тепла?
  6. У який спосіб можна порівняти точність розв'язку системи диференціальних рівнянь засобами MathCAD з аналітичним розв'язком?
  7. З якою метою проводять пресування рослинного матеріалу?
  8. Щільність рослинного матеріалу після брикетування?
  9. Щільність рослинного матеріалу після гранулювання?
  10. Які функції MathCAD призначені для побудови тримірних графіків?
  11. Яким чином побудувати тримірний графік за допомогою функції CreateSpace?

Тема № 19

ПРИКЛАДИ СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ  
СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН

§1 Математичне моделювання руху частинки матеріалу похилою  
площиною

У конструкціях машин та обладнання широко поширений спосіб переміщення матеріалу похилою площиною. Розглянемо загальний випадок, коли початкова швидкість руху частинки не співпадає з напрямком найбільшого нахилу площини.

Нехай задано похилу площину з кутом нахилу  $\alpha$  (рис.19.1). В певний момент часу частинка починає рух з початковою швидкістю  $V_0$  у відомому напрямку. Внаслідок наявності сили ваги частинки та сили тертя напрямком руху змінюється та буде відбуватися деякою кривою  $s$ .

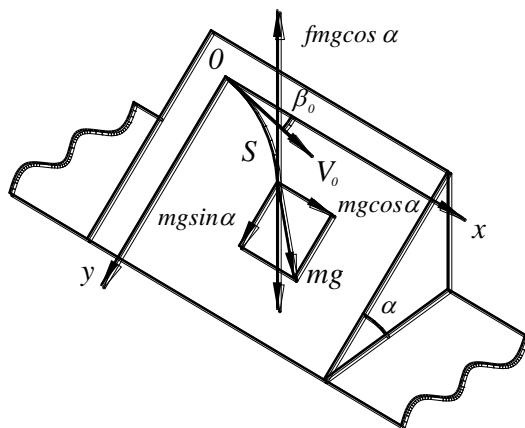


Рис.19.1 Розрахункова схема до математичної моделі руху частинки матеріалу похилою площиною

Складемо диференціальні рівняння руху частинки в проекціях на осі декартової системи координат:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -fmg \cos(\alpha) \cos(\beta), \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg \sin(\alpha) - fmg \cos(\alpha) \sin(\beta), \quad (2)$$

де  $m$  – маса частинки, кг;

$f$  – коефіцієнт тертя;

$\alpha$  – кут нахилу площини до горизонту, град.;

$\beta$  – кут між вектором швидкості та віссю  $x$ , град.

Якщо знехтувати силою тертя, тоді рівняння (1) та (2) будуть мати такий вигляд:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g \sin(\alpha). \quad (4)$$

Розв'язок рівнянь (3) та (4) при початкових умовах  $t = 0$ ,  $V = V_0$ ,  $x = y = 0$  має вигляд:

$$x = V_0 t \cos(\beta_0), \quad (5)$$

$$y = V_0 t \sin(\beta_0) + \frac{gt^2}{2} \sin(\alpha), \quad (6)$$

тобто рух частинки відбувається параболою.

Рівняння швидкості руху частинки:

$$V^2 = V_0^2 + 2gy \sin(\alpha). \quad (7)$$

Якщо врахувати силу тертя, тоді рівняння для визначення швидкості руху частинки буде мати вигляд:

$$V^2 = V_0^2 + 2gy \sin(\alpha) - 2f g s \cos(\alpha). \quad (8)$$

В цьому випадку швидкість руху частинки залежить від двох координат  $y$  та  $s$ . Розв'язок цього рівняння є ускладненим, тому його необхідно представити в іншій формі. Для цього складемо диференціальні рівняння руху в проекціях на осі натурального триєдра:

$$m \frac{dV}{dt} = mg \sin(\alpha) \sin(\beta) - fmg \cos(\alpha), \quad (8.9)$$

$$m \frac{V^2}{\rho} = \pm mg \sin(\alpha) \cos(\beta). \quad (10)$$

Розв'язок рівнянь має вигляд:

$$V = C \psi^{fctg(\alpha)-1} (1 + \psi^2), \quad (11)$$

$$x = -\frac{2C^2}{g \sin(\alpha)} \left( \frac{\psi^{2fctg(\alpha)-1}}{2fctg(\alpha)-1} + \frac{\psi^{2fctg(\alpha)+1}}{2fctg(\alpha)+1} \right) + A, \quad (12)$$

$$y = -\frac{2C^2}{g \sin(\alpha)} \left( \frac{\psi^{2\text{fctg}(\alpha)-2}}{2\text{fctg}(\alpha)-2} - \frac{\psi^{2\text{fctg}(\alpha)+2}}{2\text{fctg}(\alpha)+2} \right) + B, \quad (13)$$

$$t = \frac{C}{g \sin(\alpha)} \left( \frac{\psi^{\text{fctg}(\alpha)-1}}{\text{fctg}(\alpha)-1} + \frac{\psi^{\text{fctg}(\alpha)+1}}{\text{fctg}(\alpha)+1} \right) + T, \quad (14)$$

де  $\psi = \text{tg}(45^\circ - \frac{\beta}{2})$ ;

$A$ ,  $B$  та  $T$  – довільні сталі.

При  $t = 0$ ,  $x = y = 0$  матимемо:

$$C = \frac{V_0}{\psi_0^{\text{fctg}(\alpha)-1}(1+\psi_0^2)}, \quad (15)$$

$$A = \frac{2V_0^2}{g \sin(\alpha)(\psi_0^{\text{fctg}(\alpha)-1}(1+\psi_0^2))^2} \left( \frac{\psi_0^{2\text{fctg}(\alpha)-1}}{2\text{fctg}(\alpha)-1} + \frac{\psi_0^{2\text{fctg}(\alpha)+1}}{2\text{fctg}(\alpha)+1} \right), \quad (16)$$

$$B = \frac{2V_0^2}{g \sin(\alpha)(\psi_0^{\text{fctg}(\alpha)-1}(1+\psi_0^2))^2} \left( \frac{\psi_0^{2\text{fctg}(\alpha)-2}}{2\text{fctg}(\alpha)-2} - \frac{\psi_0^{2\text{fctg}(\alpha)+2}}{2\text{fctg}(\alpha)+2} \right), \quad (17)$$

$$T = \frac{V_0}{g \sin(\alpha)(\psi_0^{\text{fctg}(\alpha)-1}(1+\psi_0^2))^2} \left( \frac{\psi_0^{\text{fctg}(\alpha)-1}}{\text{fctg}(\alpha)-1} + \frac{\psi_0^{\text{fctg}(\alpha)+1}}{\text{fctg}(\alpha)+1} \right), \quad (18)$$

де  $\psi_0 = \text{tg}(45^\circ - \frac{\beta_0}{2})$ .

Якщо  $\text{fctg}(\alpha) < 1$ , тоді, як видно з рівняння (11), швидкість  $V$  перетворюється в нуль при  $\psi = 0$ , тобто  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Координати цієї точки:  $x = A$  та  $y = B$ . Цієї точки частинка досягає через момент часу  $t = T$ . Якщо довжина та ширина похилої площини більша відповідно параметрів  $x = A$  та  $y = B$ , то частинка буде зупинятися на поверхні та виникне затор.

Покажемо застосування викладених теоретичних положень на прикладі наступної практичної задачі. Нехай конструкція технологічного обладнання передбачає переміщення сипкого матеріалу похилою площиною, що нахилена під кутом  $\alpha = \frac{\pi}{12}$  до горизонту. Подача матеріалу на похилу площину бокова. Початкова швидкість матеріалу, що надходить на похилу площину, складає  $V_0 = 0,01$  м/с, кут між вектором початкової швидкості та віссю  $x$  –  $\beta = \frac{\pi}{12}$ , коефіцієнт тертя матеріалу по поверхні похилої площини  $f = 0,3$ . Відомі



також довжина похилої площини вздовж осі  $x - 0,3$  м та ширина вздовж осі  $y - 0,2$  м. Встановити траєкторію руху частинки похилою площиною без врахування сили тертя, визначити координати точки зупинки частинки та порівняти їх з розмірами похилої площини з метою встановлення можливості утворення заторів. Розв'язок задачі здійснений засобами MathCAD представлено на рис.19.2 та рис.19.3. Аналіз отриманих значень координат точки зупинки частинки, свідчить про те, що заторів на похилій площині за даних умов не буде.

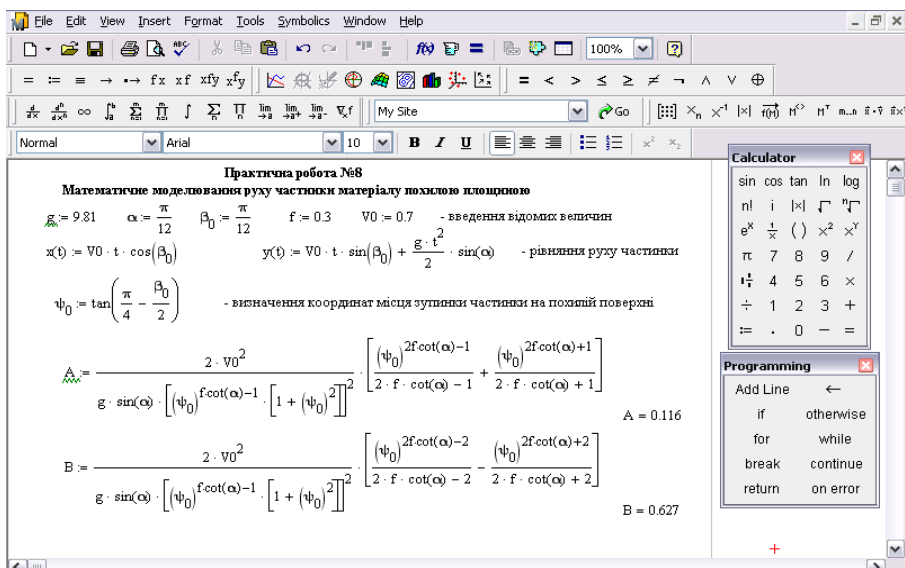


Рис.19.2 Моделювання руху частинки матеріалу похилою площиною

Більшість вологих матеріалів мають різну інерційність полів вологості та температури, що обмежує можливість інтенсифікації процесу їх сушіння в режимі постійного нагріву. Зниження температури теплоносія до рівня гранично допустимої температури нагрівання матеріалу гарантує його якісне збереження, але суттєво знижує швидкість сушіння та техніко-економічні показники процесу. Поперемінне нагрівання та охолодження матеріалу зменшує перегрів та пересихання зерна, що дозволяє підвищити температуру теплоносія. Процес імпульсного сушіння передбачає послідовність циклів, в кожному з яких нагрітий до оптимальної температури матеріал охолоджується. Встановлення тривалості періодів нагрівання та охолодження матеріалу дозволяє ефективно використовувати цей метод сушіння.

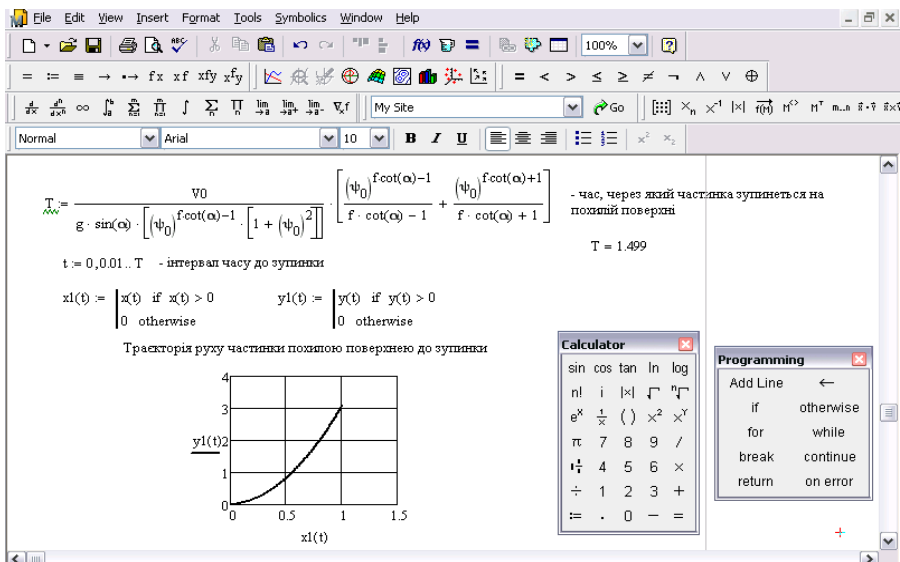


Рис.19.3 Моделювання руху частинки похилою площиною (продовження)

### §2 Моделювання процесу імпульсного сушіння зерна

Відомо, що гранично допустима температура нагрівання зерна є функцією його початкової вологості та тривалості нагрівання. Темп нагрівання зерна залежить від його питомої теплоємності  $c$ , температури  $T_T$  та швидкості теплоносія  $\omega$ . Зерно необхідно охолоджувати з максимальною швидкістю, що дозволить збільшити час дії температурного градієнта, що зумовлює потік води до поверхні матеріалу.

Визначимо тривалість періодів нагрівання та охолодження одиничного зерна, що знаходиться на вході теплоносія в шар матеріалу. Без врахування зниження вологості в період нагрівання (охолодження) під час високочастотного імпульсного сушіння рівняння теплового балансу для одиничного зерна можна записати в наступному вигляді:

$$\alpha F(T_T - T) dt = c p V d(T_T - T), \quad (19)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну, Вт/(м<sup>2</sup>·°C);

$F$  – площа поверхні теплообміну, м<sup>2</sup>;

$T$  – поточна температура зерна, °C;

$\tau$  – тривалість нагрівання, с;

$c$  – питома теплоємність зерна, Дж/(кг·°C);

$\rho$  – густина одиничного зерна, кг/м<sup>3</sup>;

$V$  – об'єм одиничного зерна, м<sup>3</sup>.

Позначивши  $T_T - T$  через  $\theta$ , отримаємо:

$$\ln\theta = -\frac{\alpha F}{c\rho V} \tau + c. \quad (20)$$

Так як при  $\tau=0$  поточна різниця температур  $\theta$  рівна початковій різниці  $\theta_0 = T_T - T_0$ , тоді постійна інтегрування  $C = \ln\theta_0$ . Враховуючи останнє, отримаємо:

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{\alpha F}{c\rho V} \tau}. \quad (21)$$

В якості допущення приймаємо величини  $\alpha$  та  $c\rho$  під час нагрівання постійними.

Залежність (21) показує, що температурна рівновага настає через нескінченно тривалий проміжок часу. Процес можна вважати завершеним, коли значення  $\theta$  опиняється за межами чутливості вимірювальних засобів, що використовуються. Фіксоване значення безрозмірної температури  $\theta/\theta_0$  досягається тим швидше, чим більше  $\alpha$ , і тим повільніше, чим більше відношення об'єму зерна до поверхні теплообміну  $V/F$  та об'ємна теплоємність  $c\rho$ . Величина  $\frac{c\rho V}{\alpha F}$  називається постійною часу  $\tau_0$ . З врахуванням цього залежність (9.3) можна записати:

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}. \quad (22)$$

Постійна часу характеризує теплову інерцію тіла та може бути представлена наступним чином: при  $\tau = \tau_0$  відношення  $\theta/\theta_0 = 1/e = 0,368$ . Відповідно,  $\tau_0$  – це час, протягом якого безрозмірна температура досягає фіксованого значення 0,368. Таким чином, час нагрівання зерна до певної температури можна визначити з рівняння:

$$\tau = \tau_0 \ln\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right). \quad (23)$$

В нашому випадку  $\theta = T_T - T_H$ ,  $\theta_0 = T_T - T_0$ , де  $T_H$  – температура нагрівання зерна. Тоді (9.5) набуде вигляду:

$$\tau = \frac{c\rho V}{\alpha F} \ln\left(\frac{T_T - T_0}{T_T - T_H}\right). \quad (24)$$

Величини  $V$  та  $F$  визначаються як для кулі, еквівалентний діаметр якої рівний:

$$d_e = 0,13 \sqrt[3]{\frac{6G}{\rho_r}}, \quad (25)$$

де  $G$  – маса 1000 зернин, кг.

З врахуванням цього експозиція нагрівання зерна:

$$\tau = \frac{c\rho d_e}{3\alpha} \ln \left( \frac{T_T - T_0}{T_T - T_H} \right). \quad (26)$$

Коефіцієнт теплообміну  $\alpha$  для зерна в межах чисел Рейнольдса  $Re=50 \div 200$  з достатньою для практики точністю можна визначити з критеріального рівняння  $Nu=0,075Re$ , де  $Nu$  – критерій Нуссельта, звідки:

$$\alpha = 0,075 \frac{\omega \lambda}{\nu}, \quad (27)$$

де  $\omega$  – швидкість теплоносія, м/с;

$\lambda$  – теплопровідність теплоносія, Вт/(м·°С);

$\nu$  – кінематична в'язкість теплоносія, м<sup>2</sup>/с.

Кінематичну в'язкість  $\nu$  теплоносія та його теплопровідність  $\lambda$  при постійному тиску знаходять з довідників. Питома теплоємність зерна для діапазону гранично допустимих температур нагрівання зерна 313-343 К вона може бути розрахована за залежністю:

$$c = 1,45 + 0,0274 \cdot W, \quad (28)$$

де  $c$  – питома теплоємність зерна, МДж/(кг·К);

$W$  – вологість зерна, %.

З використанням рівнянь (27) та (28) залежність (26) матиме вигляд:

$$\tau = \frac{(1,45 + 0,0274 \cdot W) \cdot 10^6 \rho d_e \nu}{0,225 \omega \lambda} \cdot \ln \left( \frac{T_T - T_0}{T_T - T_H} \right). \quad (29)$$

Час охолодження зерна можна визначити за залежністю (29), замінивши відповідним чином її логарифмічний співмножник. Зниження температури зерна під час охолодження доцільно проводити на 10-12°С.

За допомогою залежності (29) можна встановити співвідношення періодів нагрівання та охолодження для початкової стадії сушіння.

### Контрольні запитання

1. Які сили діють на частинку, що рухається похилою поверхнею?
2. Скласти систему диференціальних рівнянь, що описує траєкторію руху частинки похилою площиною?

3. У якому випадку може виникнути затор на похилій площині?
4. Якими мають бути розміри похилої площини для уникнення затору?
5. Що таке імпульсне сушіння?
6. Від яких параметрів залежить гранично допустима температура нагріву зерна?
7. Розмірність коефіцієнта теплообміну?
8. Розмірність коефіцієнта теплопровідності?
9. Розмірність кінематичної в'язкості?

**Рекомендована література**

- 1) Бєхніч М.П., Коваленко Л.Б. Основи математичного моделювання // з курсу „Основи математичного моделювання” для студентів заочної форми навчання напряму підготовки – „Гідрометеорологія”. -Одеса: Видавничий центр ОНУ, 2002.-31с.
- 2) Войтюк Д.Г., Аніскевич Л.В., Барановський В.М. і ін. Основи наукових досліджень // Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів факультету механізації сільського господарства із спеціальностей 7.091.902- ”Механізація сільського господарства” і ”Машини та обладнання сільськогосподарського виробництва”. –К.:Видавничий центр НАУ, 2001.
- 3) Дж. Эндрюс, Р. Мак-Лоус Математическое моделирование. Пер.с англ. под ред. Ю.П. Гупало. – М.: Мир, 1979.-280 с.
- 4) Дьяконов В.П., Авраменкова И.В. MathCAD 7.0 в математике, физике и в Internet. – М.: ”Нолидж”, 1998.-352 с., ил.
- 5) Кравчук В.І., Баранов Г.Л., Баранов В.Л. Вибір параметрів сільськогосподарських машин з застосуванням дискретних моделей їх роботи// Сільськогосподарські машини. Зб. наук ст., вип. 8.-Луцьк: Ред.-вид. відділ ЛДТУ, 2001.-с.153-160.
- 6) Математичне моделювання технологічних процесів меліоративних машин для підготовчих робіт: Навч. посібник/ Е.А. Сухарев, С.Ф.Медвідь.- К.:ІСДО, 1993.-152с.
- 7) Моделирование сельскохозяйственных агрегатов и их систем управления / А.Б.Лурье, И.С.Нагорский, В.Г.Озеров и др.; Под ред. А.Б.Лурье.- Л.:Колос. Ленингр.отд-ние, 1979.-312с., ил.
- 8) Очков В.Ф. Mathcad 7 Pro для студентов и инженеров.- М.: КомпьютерПресс, 1998.- 384с.-ил.
- 9) Пальчевський Б.О. Дослідження технологічних систем (моделювання, проектування, оптимізація): Навч.посібник.-Львів: Світ, 2001.-232с.
- 10) Петрик М. MathCAD – технології в інженерних задачах теорії розрахунку і конструювання.-Тернопіль: ТДТУ ім. Ів.Пулюя, 2000.-154с.
- 11) Струтинській В.Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки: Підручник. - Житомир: ЖІТІ, 2001.-612с.
- 12) Франс Дж., Торнли Дж. Х.М. Математические модели в сельском хозяйстве / Пер. с англ. А.С.Каменского; под ред. Ф.И.Ерешко. – М.: Агропромиздат, 1987. 400с.
- 13) Хайліс Г.А., Коновалюк Д.М. Основи проектування і дослідження сільськогосподарських машин: Навч. посібник. – К.: НМК ВО, 1992.-320с.
- 14) Хайліс Г.А. Основи теорії і розрахунку сільськогосподарських машин: Навч. посібник. – Київ: Вид-во УСГА, 1992.-240с.:іл.
- 15) Хелемендик М.М. Напрями і методи розробки робочих органів сільськогосподарських машин. – К.: Аграрна наука, 2001.- 280с.