

В. І. Шваб'юк, С. В. Ротко,
В. В. Шваб'юк

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ
ДЕФОРМУВАННЯ КОМПОЗИТНИХ
ПЛИТ І БАЛОК: КОНТАКТНА
ВЗАЄМОДІЯ ІЗ ШТАМПАМИ ТА
ОСНОВАМИ. ВПЛИВ ТРІЩИН**

Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет

**В. І. Шваб'юк, С. В. Ротко,
В. В. Шваб'юк**

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ
ДЕФОРМУВАННЯ КОМПОЗИТНИХ
ПЛИТ І БАЛОК: КОНТАКТНА
ВЗАЄМОДІЯ ІЗ ШТАМПАМИ ТА
ОСНОВАМИ. ВПЛИВ ТРІЩИН**

Монографія

Луцьк
Вежа-Друк
2022

УДК 539.3
ШЗЗ

*Рекомендовано вченою радою Луцького національного технічного
університету
(протокол № 10 від 26.05.2022)*

Рецензенти:

Р. М. Кушнір – академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор;
А. О. Сяський – доктор технічних наук, професор;
В. М. Трач – доктор технічних наук, професор

Шваб'юк В. І.

ШЗЗ Математичні моделі деформування композитних плит і балок:
контактна взаємодія із штампами та основами. Вплив тріщин:
монографія / В. І. Шваб'юк, С. В. Ротко, В. В. Шваб'юк. –
Луцьк: Вежа-Друк, 2022. – 804 с.

ISBN 978-966-940-419-0

У монографії розроблені нові математичні моделі теорії згину композитних плит і балок середньої товщини, що ураховують деформації поперечного зсуву та обтиснення, а також поперечне нормальне напруження. На базі уточнених моделей отримано нові розв'язки відповідних контактних і змішаних задач, максимально наближених до точних розв'язків теорії пружності та реалій пружного деформування конструкцій. Досліджується проблема розрахунку залишкової міцності балок, кілець і плит, пошкоджених наскрізними внутрішніми чи поверхневими тріщинами, з використанням силового критерію Дж. Ірвіна.

Книга призначена для наукових та інженерно-технічних працівників, які займаються вивченням проблем механіки деформівного твердого тіла та механіки руйнування, а також викладачів, аспірантів, магістрів і студентів ЗВО, що спеціалізуються у галузі механіки та прикладної математики.

УДК 539.3

ISBN 978-966-940-419-0 ©Шваб'юк В. І., Ротко С. В., Шваб'юк В. В., 2022
©Відділ іміджу та промоції ЛНТУ, 2022

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
ЧАСТИНА I. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТА МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ ОРТОТРОПНИХ ПЛИТ СЕРЕДНЬОЇ ТОВЩИНИ.....	8
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ КОМПОЗИТНИХ І АНІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ.....	8
1.1 Узагальнений закон Гука та рівняння рівноваги для анізотропного матеріалу.....	9
1.2 Розрахункові рівняння теорії пружності в циліндричній системі координат.....	17
1.3 Узагальнений закон Гука та рівняння рівноваги для плоскої задачі теорії пружності.....	22
1.4 Розрахункові рівняння плоскої задачі теорії пружності у переміщеннях.....	27
РОЗДІЛ 2. ОГЛЯД ТЕОРІЙ І МЕТОДІВ ПОБУДОВИ НОВИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ КОМПОЗИТНИХ БАЛОК І ПЛИТ.....	31
2.1 Класичні та уточнені теорії першого рівня (типу С.Тимошенка та Е. Рейсснера) для балок, пластин і оболонки.....	31
2.2 Уточнені теорії згину вищого порядку, що враховують поперечне обтиснення та нелінійність переміщень і напружень.....	42
2.3 Прямі методи зведення тривимірних рівнянь теорії пружності до двовимірних рівнянь теорій товстих плит і плит середньої товщини.....	52
Література до розділів 1-2.....	58
РОЗДІЛ 3. ПОБУДОВА НЕКЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ ОРТОТРОПНИХ ПЛИТ СЕРЕДНЬОЇ ТОВЩИНИ, ЩО ВРАХОВУЄ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗСУВ ТА ОБТИСНЕННЯ	67
3.1 Основні допущення та гіпотези теорії згину плит.....	67
3.2 Визначення напружень і внутрішніх зусиль у поперечних перерізах плит середньої товщини.....	75
3.3 Варіаційний вивід рівнянь рівноваги та граничних умов для ортотропних пластин.....	78
3.3.1. Застосування принципу Лагранжа в теорії згину пластин.....	78
3.3.2. Виведення рівнянь рівноваги теорії згину	

	<i>ортотропних плит середньої товщини у переміщеннях</i>	82
	<i>3.3.3. Формулювання граничних умов на краях плит середньої товщини.....</i>	86
3.4	Рівняння рівноваги та основні формули для переміщень і напружень у трансверсально-ізотропних плитах.....	88
3.5	Згин шарнірно опертої ортотропної плити синусоїдальним навантаженням.....	92
3.6	Циліндричний згин консольної ортотропної плити.....	107
	Література до розділу 3.....	116
	РОЗДІЛ 4. ПОБУДОВА НЕКЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ КРУГЛИХ ОРТОТРОПНИХ ПЛИТ СЕРЕДНЬО ТОВЩИНИ.....	119
4.1	Рівняння згину круглих ортотропних плит середньої товщини.....	119
4.2	Уточнений варіант теорії круглих трансверсально-ізотропних плит.....	130
4.3	Порівняльна оцінка впливу поперечної анізотропії на НДС круглих плит за різними моделями.....	146
	<i>4.3.1. Згин круглої плити, шарнірно опертої по краю....</i>	170
	<i>4.3.2. Згин круглої плити, жорстко зацемленої на краю</i>	173
4.4	Згин круглих ортотропних плит методом лінійного спряження.....	186
	Література до розділу 4.....	208
	РОЗДІЛ 5. ЗГИН ПЛИТ, ПОСЛАБЛЕНИХ ТРІЩИНАМИ, З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇХ ПОВЕРХОНЬ.....	211
5.1	Згин круглої трансропної плити, послабленої дископодібною тріщиною.....	211
	<i>5.1.1. Випадок, коли зовнішнє навантаження закриває тріщину.....</i>	212
	<i>5.1.2. Випадок, коли зовнішнє навантаження розкриває тріщину.....</i>	237
5.2	Розрахунок круглої плити, пошкодженої приповерхневою поперечною тріщиною.....	243
5.2.1	<i>5.2.1. Постанова задачі. Критеріальні співвідношення...</i>	244
5.2.2	<i>5.2.2. Аналіз результатів.....</i>	248
5.3	Циліндричний згин трансропної плити, пошкодженої тунельною тріщиною.....	255
	<i>5.3.1. Постанова задачі. Граничні умови.....</i>	255
	<i>5.3.2. Основні співвідношення.....</i>	260

5.3.3. Числове моделювання задачі. Дуальний метод граничних елементів.....	264
5.4.4. Числові результати.....	269
Короткі висновки.....	275
Література до розділу 5.....	276
РОЗДІЛ 6. МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У ПРАКТИЧНИХ РОЗРАХУНКАХ ПЛИТ ДОРОЖНЬОГО ТА АЕРОДРОМНОГО ПОКРИТТІВ....	279
6.1 Застосування інтегрального перетворення Ганкеля до задач згину плит.....	280
6.2 Згин плит дорожнього та аеродромного покриттів на пружній основі під дією розподіленого навантаження...	282
6.3 Контактна задача для трансверсально-ізотропної плити на пружному півпросторі за дії локальних навантажень..	291
6.4 Осесиметрична контактна задача для плити на пружній основі Вінклера під дією жорсткого штампа.....	302
6.5 Контактна задача для плити, що лежить на жорсткому фундаменті з вирізом.....	317
Короткі висновки.....	327
Література до розділу 6.....	330
РОЗДІЛ 7. МЕТОД НЕОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ У ЗАДАЧАХ ЗГИНУ ТОВСТИХ ПЛИТ.....	333
7.1 Постава задачі. Рівняння теорії пружності в переміщеннях.....	334
7.2 Симетрична задача для шару.....	336
7.3 Кососиметрична задача для шару.....	341
7.4 Розв'язки задач для випадків гладко змінюваних навантажень.....	346
7.5 Аналіз точності розв'язків неklasичних теорій згину пластин за дії зосереджених і локалізованих навантажень.....	349
Література до розділу 7.....	359
РОЗДІЛ 8. МЕТОД ЛІНІЙНОГО СПРЯЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ У КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОРТОТРОПНИХ ПЛИТ.....	360
8.1 Рівняння згину ортотропних плит середньої товщини...	362
8.2 Комплексне подання основних рівнянь і формул теорії згину ортотропних пластин.....	365
8.3 Особливості комплексних потенціалів у точках прикладання зосереджених сил і моментів.....	371

8.4	Постанова основних крайових задач згину ортотропних пластин для півнескінченних областей. Перша основна крайова задача.....	374
8.5	Друга основна крайова задача.....	385
	8.5.1. Згин пластинки зі зміщеним краєм.....	385
	8.5.2. Згин напівнескінченної пластинки із жорстко защемленим краєм зосередженими зусиллями.....	388
8.6	Третя основна крайова задача (змішана задача).....	395
	8.6.1. Контактні зусилля в напівнескінченній пластині частково защемленій, частково шарнірно-закріпленій.....	397
	8.6.2. Змішана задача для напівнескінченної пластини з частково защемленим, частково вільним краєм.....	405
8.7	Згин ортотропної пластини, послабленої системою тріщин.....	410
	Короткі висновки.....	420
	Література до розділу 8.....	422
	РОЗДІЛ 9. РОЗРАХУНОК КОМПОЗИТНИХ ПЛИТ НА ЖОРСТКИХ І ПРУЖНИХ ОСНОВАХ ЗІ ЗМІШАНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ.....	424
9.1	Циліндричний згин трансропної плити, частково обпертої на пружну основу.....	425
9.2	Згин трансропної плити, частково обпертої на пружну основу.....	432
9.3	Контактна взаємодія частково обпертої круглої плити з жорсткою основою.....	437
	Короткі висновки.....	447
	Література до розділу 9.....	448
	ЧАСТИНА II. МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ КОРОТКИХ КОМПОЗИТНИХ БАЛОК, КРИВОЛІНІЙНИХ СТРИЖНІВ, КІЛЕЦЬ ТА АРОК.....	449
	РОЗДІЛ 10. ПОБУДОВА УТОЧНЕНОЇ МОДЕЛІ КОРОТКИХ ОРТОТРОПНИХ БАЛОК-СМУГ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО МЕТОДИКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ.....	449
10.1	Основні рівняння уточненої моделі згину коротких ортотропних балок.....	450
	10.1.1. Гіпотези для переміщень.....	451
	10.1.2. Рівняння рівноваги та граничні умови.....	454

10.2	Дослідження точності виведених формул і рівнянь на основі аналітичних розв'язків та числових методів плоскої задачі теорії пружності.....	457
	10.2.1. Згин шарнірно опертої ортотропної смуги рівномірно розподіленим навантаженням.....	458
	10.2.2. Згин консольної балки, що навантажена зосередженою силою P на кінці.....	463
	10.2.3. Згин балки-смуги, що лежить на двох опорах, центральною зосередженою силою P	466
	10.2.4. Згин балки-смуги синусоїдальним навантаженням.....	472
10.3	Контактна взаємодія ортотропної балки-смуги з жорстким штампом.....	476
10.4	Застосування методу сингулярних інтегральних рівнянь до вивчення контактних задач для смуги.....	492
10.4.1	10.4.1. Побудова інтегрального рівняння задачі.....	493
10.4.2	10.4.2. Числове розв'язування інтегральних рівнянь.....	496
10.5	Уточнений розв'язок контактної задачі С.П. Тимошенка для частково обпертої на жорстку основу композитної балки.....	506
10.6	Аналіз задачі за допомогою методу граничних елементів.....	511
	Короткі висновки.....	516
	Література до розділу 10.....	519
	РОЗДІЛ 11. РОЗРАХУНОК ЗА НЕКЛАСИЧНИМИ МОДЕЛЯМИ КОМПОЗИТНИХ БАЛОК, ПОШКОДЖЕНИХ ТРІЩИНАМИ.....	523
11.1	Визначення граничного навантаження для композитної балки з неглибокою крайовою тріщиною.....	524
	11.1.1. Згин балки з тріщиною синусоїдальним навантаженням.....	524
	11.1.2. Згин балки з тріщиною сталим розподіленим навантаженням.....	533
11.2	Згин ортотропної балки-смуги, пошкодженої внутрішньою поперечною тріщиною.....	542
11.3	Згин композитної балки із поздовжнім розрізом.....	565
	11.3.1. Постановка задачі. Розрахункові рівняння.....	566
	11.3.2. Отримання розв'язків системи рівнянь рівноваги.....	569
	11.3.3. Основні співвідношення.....	571

	11.3.4. Числовий аналіз результатів.....	575
11.4	Розрахунок пакету незв'язаних балок.....	580
11.5	Уточнений розрахунок підсилених балок методом приведених поперечних перерізів.....	590
	11.5.1. Постанова проблеми.....	590
	11.5.2. Розрахунок балок методом приведених перерізів.....	593
	11.5.3. Приклад розрахунку.....	596
	Короткі висновки.....	602
	Література до розділу 11.....	604
	РОЗДІЛ 12. ПОБУДОВА НЕКЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗГИНУ КОМПОЗИТНИХ КІЛЕЦЬ ТА АРОК ІЗ УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНОСТІ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ЗА ТОВЩИНОЮ	607
12.1	Розрахунок кривих стрижнів. Основні гіпотези та рівняння.....	608
12.2	Граничні умови. Формули для напружень.....	612
12.3	Згин криволінійного бруса силою P	615
12.4	Стиск композитного кільця зосередженими силами (задача С.П. Тимошенка).....	619
12.5	Контактна задача для кільця, обмеженого жорсткими плитами.....	625
12.6	Розрахунок замкнутої кругової головки шатуна.....	632
12.7	Міцність композитного кільця, пошкодженого тріщиною.....	638
12.8	Розрахунок на стійкість композитних кілець.....	648
12.9	Стойкість шарнірно обпертої кругової арки.....	651
	Короткі висновки.....	654
	Література до розділу 12.....	657
	ЧАСТИНА ІІІ. ДОДАТКИ.....	659
	КОПІЇ ДЕЯКИХ ВАЖЛИВИХ СТАТЕЙ З ДАНОЇ ТЕМАТИКИ, ОПУБЛІКОВАНИХ У МІЖНАРОДНИХ ЖУРНАЛАХ І ВИДАННЯХ, А ТАКОЖ МАТЕРІАЛАХ ДОПОВІДЕЙ НА МІЖНАРОДНИХ КОНФЕРЕНЦІЯХ.....	659
	Додаток 1. Урахування ефекту обтиснення нормалі в контактних задачах для трансверсально ізотропних плит.....	660
	Додаток 2. Згин ортотропної пластини, що містить тріщину, яка паралельна до серединної поверхні.....	674
	Додаток 3. Поширення тріщини в композитній шаруватій (круглій) пластині при згинанні.....	696
	Додаток 4. Уточнений розрахунок стаціонарних	

коливань круглих трансропних пластин середньої товщини.....	709
Додаток 5. Вплив поперечної анізотропії та типу граничних умов на напружений стан круглої трансропної плити.....	726
Додаток 6. Уточнений розв'язок задачі Тимошенка для ортотропної балки на жорсткій основі.....	741
Додаток 7. Згин композитної балки з поздовжнім розрізом.....	753
Додаток 8. До проблеми впливу поперечної анізотропії на розподіл контактних напружень у балці-смузі, навантаженій жорстким штампом.....	770
Додаток 9. Стиск кільця, обмеженого жорсткими поверхнями.....	782
Додаток 10. Міцність композитного кільця, пошкодженого тріщиною.....	789

Наукове видання

**Шваб'юк В. І., Ротко С. В.,
Шваб'юк В. В.**

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ
ДЕФОРМУВАННЯ КОМПОЗИТНИХ
ПЛИТ І БАЛОК: КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ІЗ
ШТАМПАМИ ТА ОСНОВАМИ. ВПЛИВ ТРІЩИН**

Монографія

Друкується в авторській редакції

Формат 60x84 1/16. Обсяг 46,73 ум. арк., 46,54 обл.-вид. арк.
Наклад 300 пр. Зам. 57. Видавець і виготовлювач – Вежа-Друк
(м. Луцьк, вул. Шопена, 12, тел. (0332) 29-90-65).
Свідоцтво Держ. комітету телебачення і радіомовлення України
ДК № 4607 від 30.08.2013р.