

Міністерство освіти і науки України
Луцький національний технічний університет

М. П. Ярошевич

ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ЛУЦЬК – 2019

УДК 67.017(075.8)
Я 77

*Рекомендовано до друку вченою радою
Луцького національного технічного університету
(протокол № від лютого 2019 р.)*

Рецензенти:

Ланець О. С. – доктор технічних наук, професор, директор Інституту інженерної механіки та транспорту НУ «Львівська політехніка»;

Поліщук Л. К. – доктор технічних наук, професор, зав. кафедри галузевого машинобудування Вінницького НТУ;

Швабюк В. І. – доктор технічних наук, професор кафедри технічної механіки Луцького НТУ.

Я 77 Ярошевич М. П. Теорія механізмів і машин [Текст] : навчальний посібник / М. П. Ярошевич. – Луцьк : Луцький НТУ, 2019. – 238 с.

Посібник Навчальний посібник складений відповідно до діючої програми курсу «Теорія механізмів і машин» з метою отримання студентами необхідних знань, та вмінь в питаннях аналізу основних видів механізмів та їх проектування.

УДК 67.017(075.8)

© М.П. Ярошевич, 2019

ЗМІСТ

ВСТУП	
1. ТММ як наука. Початкові (вхідні) поняття та визначення	5
2. З історії науки	8
РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ І ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНІЗМІВ І МАШИН	
1. Структура та класифікація механізмів	
1.1. Ланки та кінематичні пари. Класифікація кінематичних пар	9
1.2. Кінематичні ланцюги.	16
1.3. Основні види механізмів та їх структурні схеми	17
1.4. Структурні формули кінематичних ланцюгів	22
1.5. Структурна класифікація плоских механізмів. Основний принцип створення механізмів	27
2. Кінематичне дослідження механізмів	
2.1. Задачі та методи кінематичного дослідження	35
2.2. Функція положень та кінематичні передатні функції механізму	36
2.3. Плани механізму	39
2.4. Дослідження руху механізмів методом кінематичних діаграм	45
2.5. Метод планів швидкостей та прискорень	52
2.6. Кінематичне дослідження механізмів аналітичними методами	69
3. Силовий розрахунок механізмів	
3.1. Сили, що діють на ланки механізмів та машин	76
3.2. Загальна методика силового розрахунку	77
3.3. Силовий розрахунок шарнірно-важільного механізму	82
3.4. Теорема Жуковського	92
4. Тертя в механізмах і машинах	
4.1. Тертя ковзання сухих тіл	97
4.2. Тертя гнучкої ланки	105
4.3. Основні відомості про рідинне тертя	106
4.4. Тертя кочення	107
4.5. Механічний коефіцієнт корисної дії	112
5. Дослідження руху машинного агрегату з жорсткими ланками	
5.1. Динамічна модель машинного агрегату з одним ступенем вільності	117
5.2. Зведення сил та мас	119
5.3. Рівняння руху механізму	122
5.4. Режими руху	124
5.5. Визначення закону руху механізму	126
5.6. Усталений режим. Нерівномірність руху механізму	129

5.7. Визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера	134
6. Зрівноваження механізмів	
6.1. Зрівноважування механізмів на фундаменті	144
6.2. Зрівноваження обертових ланок (роторів)	148
6.3. Динамічне балансування роторів при проектуванні	154
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ПРОЕКТУВАННЯ СХЕМ ОСНОВНИХ ВИДІВ МЕХАНІЗМІВ	
7. Синтез плоских важільних механізмів	
7.1 Умови існування кривошипа в плоских чотириланкових механізмах	159
7.2 Синтез чотириланкових механізмів за двома положеннями ланок	162
7.3 Синтез чотириланкових механізмів за коефіцієнтом зміни середньої швидкості та за середньою швидкістю вихідної ланки	165
8. Кулачкові механізми	
8.1 Загальні відомості. Види кулачкових механізмів	172
8.2 Кінематичний аналіз кулачкових механізмів	175
8.3 Закон руху вихідної ланки	177
8.4 Визначення основних розмірів кулачкового механізму	179
8.5 Побудова профілю кулачка	184
9. Зубчасті передачі	
9.1. Основна теорема зачеплення	190
9.2. Евольвента кола, її властивості та рівняння	195
9.3. Основні геометричні параметри циліндричних зубчастих передач	197
9.4. Якісні показники зубчастої передачі	201
9.5. Деякі відомості про способи нарізання зубчастих коліс	205
9.6. Початковий (вихідний) контур зубчастих коліс	207
9.7. Підрізання зубців. Мінімальне число зубців при виготовленні зубчастих коліс	208
9.8. Коригування (виправлення) зубчастих коліс евольвентного зачеплення	210
9.9. Вибір коефіцієнтів зміщення	211
9.10. Особливості евольвентної передачі внутрішнього зачеплення	213
9.11. Особливості геометрії косозубих циліндричних передач	214
9.12. Просторові зубчасті передачі	217
9.13. Кінематичний аналіз диференціальних та планетарних механізмів	229
Література	233

ВСТУП

Ефективна робота народногосподарського комплексу нашої держави в ринкових умовах не можлива без оснащення його високопродуктивними, енергетично малозатратними, надійними та довговічними машинами. Створення таких машин вимагає від інженерів-механіків глибоких і міцних знань, у першу чергу, у сфері теорії механізмів і машин (ТММ).

1. Теорія механізмів і машин як наука. початкові (вихідні) поняття та визначення

Використовують кілька варіантів визначень теорії механізмів і машин (ТММ) як науки. Наведемо деякі з них.

Теорія механізмів і машин – це наука про загальні методи дослідження механізмів і машин та про наукові основи їх проектування.

Теорія механізмів і машин – наука, що вивчає загальні (теоретичні та експериментальні) методи дослідження механізмів і машин та проектування їх схем незалежно від конкретного призначення.

Теорія механізмів і машин – наука про аналіз та синтез механізмів, механіку машин.

Підкреслимо методи ТММ, придатні для дослідження та проектування будь-яких механізмів і не залежать від технічного призначення машини, приладу чи апарата. Наприклад, механізм двигуна внутрішнього згорання, механізм кривошипного преса та лісопильної рами (не зважаючи на різне призначення та повну несхожість зовнішнього вигляду) мають в основі один і той же кривошипно-повзунний механізм (рис. 1.1). Це дає можливість застосовувати загальні методи їх дослідження та проектування. Один і той самий механізм для перетворення обертового руху, виконаний у вигляді зубчастих коліс, може застосовуватись в автомобілях, верстатах і годинниках, тому можна при дослідженні механізмів з різним функціональним призначенням застосовувати загальні методи, що базуються на основних принципах сучасної механіки.

Теорія механізмів і машин – наукове підґрунтя для створення нових машин. Проектування механізмів становить складну комплексну проблему, розв'язок якої розбивається на декілька етапів. У ТММ переважно розглядаються задачі першого етапу проектування, за допомогою яких розробляються кінематичні схеми механізмів, що відтворюють потрібний закон руху. Кінематична схема механізму є «скелетом» реальної конструкції машини. Зрозуміло, що всі наступні етапи проектування базуються на першому визначальному етапі. Тому важко переоцінити роль ТММ як теоретичної основи проектування машин.

ТММ – це одна із загальноінженерних дисциплін. Курс ТММ є з'єднувальною ланкою між циклом загальнонаукових дисциплін та циклом

спеціальних дисциплін, в яких вивчають машини та механізми окремих галузей техніки. Ця дисципліна є основою для вивчення курсів деталей машин, основ конструювання машин та підйимально-транспортних пристроїв, курсів з розрахунку і конструювання окремих видів машин залежно від спеціальності, за якою проводиться підготовка студентів, і т.ін. Курс ТММ є, по суті, вступним у фаховий підготовці майбутнього інженера.

В основі курсу лежать фундаментальні положення математики і механіки. Ці положення розвиваються і доповнюються відповідно до конкретних технічних задач, які виникають при дослідженні та проектуванні машини.

Найбільше ТММ ґрунтується на теоретичній механіці. Нагадаємо, механіка – наука про механічний рух та взаємодію матеріальних тіл. Механіку прийнято ділити на теоретичну та прикладну. Вони діалектично взаємопов'язані. У теоретичній механіці встановлюють загальні закономірності об'єктів, що вивчаються, без зв'язку з їх конкретним застосуванням.

Під терміном «Прикладна механіка» (крім ТММ, містить, як правило, Опір матеріалів та Деталі машин) розуміють галузь механіки, яка вивчає рух (та напружений стан) реальних технічних об'єктів-конструкцій, механізмів, машин, пристроїв з урахуванням загальних закономірностей, встановлених в теоретичній механіці. Враховуючи сказане, можна сформулювати ще одне визначення ТММ.

ТММ - наука, що вивчає структуру (будову), кінематику та динаміку механізмів і машин у зв'язку з їх аналізом та синтезом.

Задачі ТММ є досить різноманітними, але найважливіші з них можна згрупувати за трьома напрямками:

- *аналіз-дослідження існуючих механізмів та машин;*
- *синтез-проектування нових механізмів і машин;*
- *теорія машин-автоматів.*

Розвиток теорії машин-автоматів пов'язаний головним чином з побудовою схем систем керування машиною. Особливо важливим є створення методів побудови систем керування, що само налаштовуються із зміною робочого процесу. До теорії машин-автоматів відноситься також розробка методів проектування промислових роботів, які вже досить широко застосовуються у багатьох галузях техніки.

Наведемо деякі визначення.

Машина – пристрій, що виконує механічні рухи для перетворення енергії матеріалів та інформації з метою заміни або полегшення фізичної та розумової праці людини.

У ТММ основною ознакою машини, що відрізняє її від інших пристроїв, є наявність механічного руху. З погляду функцій, що виконують машини, їх можна поділити на наступні класи: енергетичні машини;

технологічні (робочі) машини; транспортні машини; інформаційні машини; кібернетичні машини.

Енергетичною машиною називається машина, що призначена для перетворення будь-якого виду енергії у механічну (і навпаки). У першому випадку вона називається машина-двигун, в другому випадку – машина-генератор.

У *технологічних машинах* (металообробні верстати та комплекси, ковальсько-пресове обладнання, прокатні стани, ливарне обладнання і т. ін.) змінюється форма, розміри, властивості, стан вихідних матеріалів та заготовок.

З допомогою *транспортних машин* та пристроїв відбувається переміщення вантажів, інструментів, людей та інших об'єктів у просторі з потрібною швидкістю.

Інформаційні машини – машини для одержання та перетворення інформації.

Кібернетична машина – це машина, що замінює або імітує різні механічні, фізіологічні або біологічні процеси, що притаманні людині і живій природі, та яка має елементи штучного інтелекту.

Зазначимо, що двигун і робочу машину, що з ним з'єднана, називають *машинним агрегатом*. Зазвичай до складу машинного агрегату входять передавальні механізми; деколи вони містять також керуючу або регулюючу систему, яка забезпечує оптимізацію робочого процесу.

Виконання машиною своїх функцій пов'язане з передачею та перетворенням механічного руху. Носієм руху в машинах є механізми. Механізми – основа кожної машини. Основними ознаками механізмів є рухомість ланок (твердих тіл), визначеність, взаємозалежність їх рухів. Більшість механізмів виконують функцію перетворення механічного руху твердих тіл.

Наведемо кілька визначень поняття «механізм».

Механізм – це штучно створена система твердих тіл, що рухомо з'єднані та які рухаються певним, потрібним чином відносно одного з них, яке прийняте за нерухоме.

Механізм – це система твердих тіл, що рухомо з'єднані між собою, яка призначена для перетворення руху одного чи кількох тіл у потрібний рух інших тіл.

Механізм – це система тіл, призначена для перетворення руху. Так, у двигуні внутрішнього згоряння (рис. 1.1.) зворотно-поступальний рух поршня перетворюється в обертальний рух колінчастого валу.

2. 3 історії науки

Механіка – одна з найдавніших наук. Відомості про перші механізми губляться в глибині століть. Перші з них – це майстерно виконані штучні механізми – пастки для відлову звірів, про що свідчать рисунки на скелях і стінах печер (кам'яний вік).

Прості механізми (важелі, гвинти, клини, поліспаст, зубчасті та інші) були відомі з давніх часів. Ще видатний давньогрецький математик і механік Архімед (287-212 р. до н.е.) пояснив їх дію.

Найпершою відомою працею про механізми та машини є праця «Механічні проблеми» Арістотеля (384-322 р. до н.е.). У ній описано важіль, криничний журавель, колесо, коток, гончарний круг, центрифуги, ваги, зубчасті механізми.

Поступово йшов процес дослідження механізмів, їх вдосконалення та впровадження в практику з метою полегшення та підвищення продуктивності праці людини.

Перші машини – водяні млини, використовували для розмелювання зерна. Водяний млин – це порівняно досконала машина. У ній був енергетичний агрегат (водяне колесо), передача і робочий орган (жорна). Інша галузь людської діяльності, яка стимулювала виникнення машин, – це військова справа (наприклад, машини для метання каміння та стріл).

Варто зазначити, що у часи Леонардо Да Винчі (1452-1519 роки) в принципі, вже були відомі майже всі основні типи механізмів та велика кількість верстатів – деревообробні, друкарські, ткацькі, волочильні тощо. Подальший розвиток техніки відбувався, переважно, не шляхом створення нових схем механізмів, а шляхом надання існуючим схемам нових якостей.

Як наука, теорія механізмів і машин виникла наприкінці XVIII ст., коли почався бурхливий розвиток промисловості в Англії, Франції, Німеччині. Потреби машинного виробництва спонукали розвиток науки. І в подальшому, розвиток ТММ був нерозривно пов'язаний з розвитком машинного способу виробництва.

Розвиток ТММ в Україні пов'язаний з такими відомими іменами, як С.Н. Кожевніков, Я.Л. Геронімус, О.С. Кореняко, Л.І. Цехнович, А.Ф. Попов, К.В. Тір та інші.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ТА ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

1. Структура та класифікація механізмів

Структура механізму – це його будова. Будовою механізму визначаються такі його важливі характеристики, як види виконуваних рухів, способи їх перетворення, число ступенів вільності.

Основними структурними елементами механізму є *ланки* (тверді тіла) та *кінематичні пари* (рухомі з'єднання твердих тіл). Тобто, з погляду ТММ, будь-який механізм чи машина складаються лише з ланок, які з'єднані між собою кінематичними парами.

1.1. Ланки та кінематичні пари. Класифікація кінематичних пар

Усі механізми та машини складаються з окремих деталей. Нагадаємо, *деталь* – це виріб, виготовлений без застосування складальних операцій, як правило, з цілого шматка матеріалу (або з окремих частин зварюванням), тому не може бути розібраний на простіші без руйнування.

При роботі машини є деталі, які рухаються як одне ціле відносно інших деталей. Тому в ТММ має місце таке поняття, як *ланка*.

Деталь або сукупність кількох деталей, які утворюють одну жорстку систему тіл і не мають рухів однієї відносно іншої, представляють собою ланку. Отже, кожна ланка може складатись з однієї або кількох деталей, які утворюють нерухомі з'єднання.

Наведемо таке визначення ланки. *Тверді тіла, з яких складається механізм, називаються ланками.* При цьому, маються на увазі як абсолютно тверді, так і деформівні та гнучкі тіла. Рідини та гази в ТММ за ланки не вважаються.

Для прикладу, розглянемо шатун двигуна внутрішнього згоряння (рис. 1.1, а, б, ланка 2). Це одна ланка, яка є сукупністю декількох деталей (рис. 1.1, в: тіло шатуна 1, втулка 2, вкладки 3, 4, рознімна головка 5, болти 6, гайки, контргайки, шайби, шплінти - 7), з'єднаних в одну геометричну незмінну систему. Оскільки всі ці деталі не мають між собою відносних рухів, утворюють одну жорстку систему тіл, і рухаються як одне ціле, то всі вони представляють собою одну ланку. Те саме можна сказати про зубчасте колесо, вал та шпонку які обертаються навколо спільної осі як одне ціле.

Ланки механізму рухомо з'єднані між собою. *Рухоме з'єднання двох ланок, що дотикаються, називають кінематичною парою.*

Точки, лінії, поверхні ланки, якими вона стикається (з'єднується) з іншою ланкою, утворюючи кінематичну пару, називають *елементами кінематичної пари*. Кінематична пара при взаємодії елементів допускає відносний рух ланок.

Для того, щоб елементи кінематичної пари перебували у постійному дотику (ланки в механізмі повинні бути постійно з'єднані між собою), пара повинна бути замкнена.

За характером замикання кінематичні пари поділяють на пари з *силовим* (за рахунок сил ваги, пружності, тиску рідини, газу і т.ін.) та *геометричним* (за рахунок конструктивних форм ланки) замиканням.

Класифікація кінематичних пар. За характером з'єднання ланок кінематичні пари поділяють на дві групи: *нижчі та вищі*. До *нижчих* відносяться пари, у яких ланки стикаються по поверхні, а до *вищих* - якщо елементами кінематичної пари є тільки лінії або точки. При цьому лінійний або точковий контакт розуміють як початковий – при дотиканні ланок без зусиль, а під навантаженням ланки, які утворюють вищу пару, будуть дотикатись по деякій дійсній поверхні, яка називається плямою контакту.

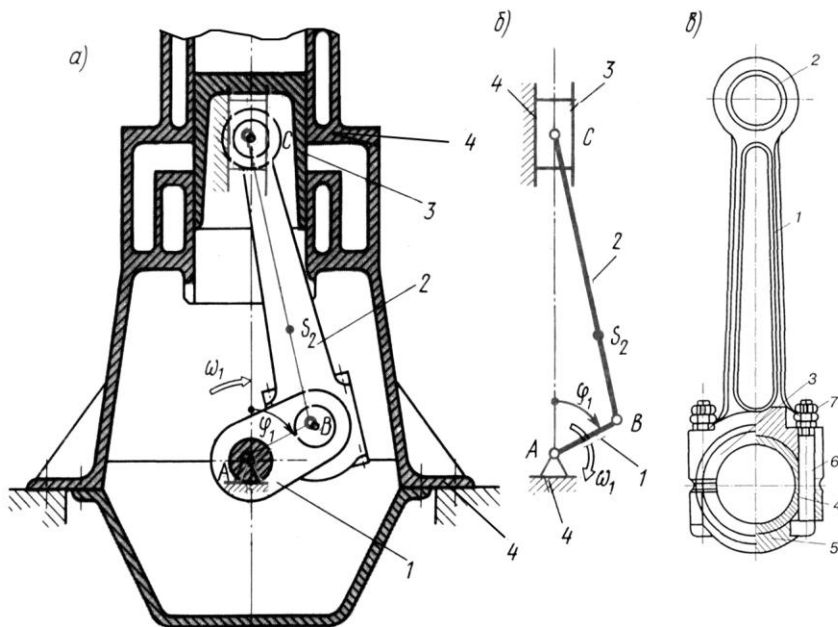


Рис. 1.1

Кінематичні пари класифікують за числом (S) умов зв'язку (обмежень), які накладає пара на рух однієї ланки відносно іншої, рідше - за числом (H) ступенів вільності у відносному русі ланок. Число ступенів вільності у відносному русі ланок визначає вид пари за рухомістю. Розрізняють кінематичні пари одно-, дво-, три-, чотири- і п'ятирухомі.

Числом ступенів вільності механічної системи називають число незалежних її можливих переміщень.

У загальному випадку для абсолютно твердого тіла, що вільно рухається в просторі, число ступенів вільності дорівнює шести. Рух такого тіла можна уявити як обертання навколо та ковзання вздовж трьох довільно взятих взаємно перпендикулярних координатних осей (незалежно і одночасно). При плоскому русі тіло матиме три ступені вільності.

Отже, вільне в просторі тіло має шість ступенів вільності, тобто $H=6$. Це означає, що на рух вільного тіла не накладено ніяких обмежень.

Як вже було сказано, в механізмі вільних (не зв'язаних між собою) ланок немає. Кінематичні пари накладають обмеження на рух ланок, "змушують" їх рухатись певним чином, виконувати потрібні, задані рухи. Або, інакше, для того, щоб ланка механізму рухалась певним чином, її рух необхідно обмежити кінематичною парою.

Входження ланки в кінематичну пару з іншою ланкою накладає на їх відносний рух певні обмеження - *умови зв'язку (в'язі) S*.

Очевидно, що число цих умов зв'язку не може бути більшим п'яти, інакше кінематична пара стане жорстким з'єднанням двох ланок, тобто вони утворять одну ланку. Так само не може бути кінематичної пари, яка не накладає жодного зв'язку, бо при цьому матимемо дві вільні ланки.

Отже, число S умов зв'язку, що накладають кінематичні пари на відносний рух ланок, може змінюватися в межах від 1 до 5, тобто

$$1 \leq S \leq 5.$$

Число ступенів вільності ланки, що входить до кінематичної пари, дорівнює $H=6-S$.

Клас кінематичної пари визначається числом умов зв'язку; його можна знайти з рівності

$$S = 6 - H.$$

Номер класу пари збігається з числом S умов зв'язку. Оскільки число умов зв'язку може змінюватися в межах від 1 до 5, то число класів кінематичних пар дорівнює п'яти.

На рис. 1.2 наведено основні види кінематичних пар, їх схеми та умовне позначення згідно з рекомендаціями міжнародних стандартів, стосовно структурних та кінематичних схем. Відзначимо, що тут наведено принципове зображення кінематичних пар, а конструктивні виконання можуть бути різними.

Найбільше застосування в механізмах машин, приладах та інших пристроях отримали обертові кінематичні пари V класу.

Обертова пара (рис. 1.2, а) – однорухома, допускає лише один відносний обертовий рух однієї ланки навколо іншої, тобто число ступенів вільності $H=1$; на відносний рух ланки накладено $S=6-H=5$ умов зв'язку (в'язей). Отже, це кінематична пара п'ятого класу. Елементи обертової пари – це циліндричні поверхні (ланки 1 та 2 дотикаються по циліндричній поверхні); нижча пара замкнена геометрично.

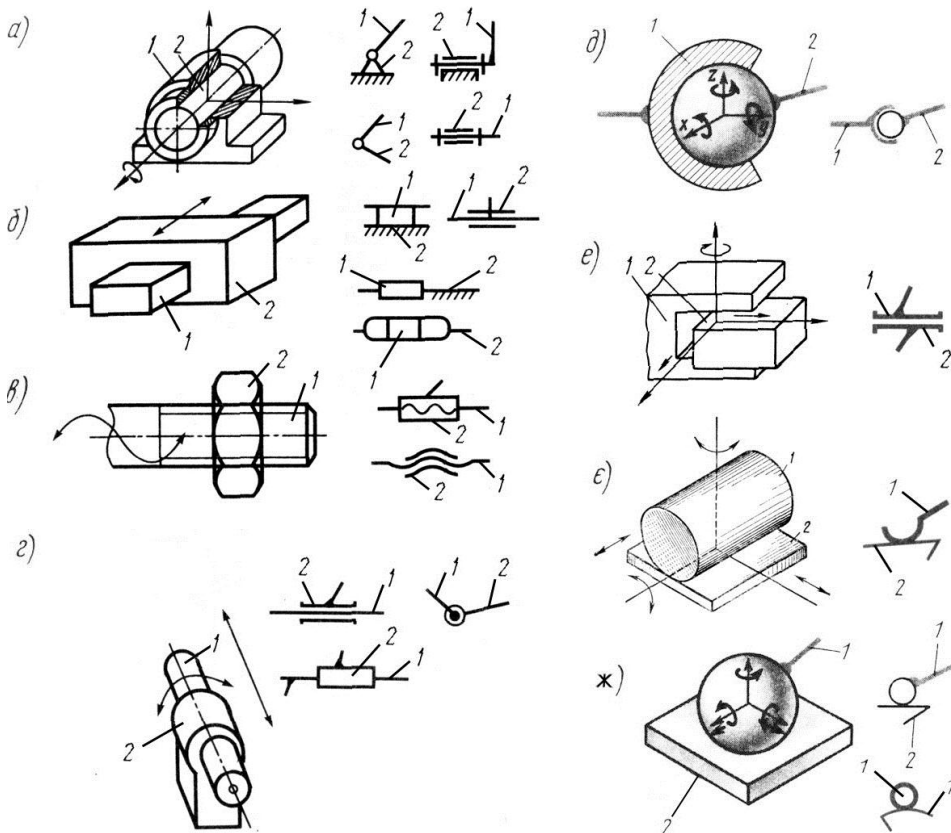


Рис. 1.2

Поступальна пара (рис. 1.2, б) – однорухома, допускає лише прямолінійний поступальний відносний рух ланок, тобто $H=1$ $S=5$; отже, це кінематична пара V класу, нижча, з геометричним замиканням.

Відомим прикладом конструктивного виконання такої кінематичної пари є пара поршень – циліндр двигуна внутрішнього згоряння, поршневої помпи, компресора і т.ін.

Відзначимо, що кінематичні пари V класу трапляються в трьох варіантах. Крім названих, обертової та поступальної, до V класу відносять також кінематичну пару гвинт – гайка (рис. 1.2, в), оскільки одна ланка відносно іншої має тільки один незалежний рух (обертання навколо і поступальний рух вздовж осі гвинта взаємопов'язані між собою).

IV клас. *Циліндрична пара* (рис. 1.2, з) – дворухома кінематична пара, допускає незалежні обертовий та поступальний відносні рухи ланок, тобто $H=2$, а $S=4$, отже, це IV клас пари. Пара нижча (ланки дотикаються по циліндричній поверхні) з геометричним замиканням.

III клас. *Сферична пара* (кульковий шарнір, рис. 1.2, д), *площинна пара* (рис. 1.2, е) – трирухомі кінематичні пари. Рух однієї ланки відносно іншої зводиться до трьох незалежних відносних рухів (показано стрілками); $H=3$, $S=3$, тобто пари III класу; пари нижчі, з геометричним замиканням.

II клас. *Лінійна пара*. Наведена варіантом “циліндр-площина” (рис. 1.2, є). Чотирирухома кінематична пара; можливі незалежні відносні рухи ланок (обертові та поступальні) показані стрілками; тобто $H = 4$, $S = 2$, II клас. Це вища пара, тому що контакт елементів ланок лінійний.

I клас. *Точкова пара* (рис. 1.2, ж). П'ятирухома кінематична пара, що являє собою кулю 1, яка перекочується з ковзанням по площині 2. Куля може здійснювати п'ять простих незалежних рухів; $H=5$, а $S=1$. Рух кулі відносно площини може бути розкладений на три обертові рухи навколо осей x, y, z та ковзання вздовж двох осей x, y . Рух кулі вздовж вертикальної осі неможливий, тому що до низу він обмежений площиною, а при русі в протилежному напрямку порушується дотик ланок і кінематична пара перестане існувати. В даній кінематичній парі має бути передбачене силове замикання. Пара – вища, оскільки ланки дотикаються у точці.

Зазначимо: в загальному випадку, пари I класу одержують при лінійному дотику двох поверхонь, пари II класу – при точковому дотику.

Як бачимо, щоб визначити клас кінематичної пари, треба одну з ланок умовно прийняти за нерухому, зв'язати з нею просторову систему координат та порахувати можливі незалежні рухи іншої ланки, H (або порахувати накладені умови зв'язку, тобто обмеження на можливі прості рухи ланки, S). Клас кінематичної пари знаходимо з рівності $S = 6-H$.

Відмітимо, що в плоских механізмах можуть бути лише кінематичні пари IV та V класів.

До найбільш розповсюдженої пари IV класу, яка широко використовується у плоских механізмах, належить пара, утворена двома циліндричними поверхнями з паралельними осями (рис. 1.7, а). У цій кінематичній парі один циліндр може перекочуватися по поверхні іншого з

ковзанням, постійно дотикаючись по лінії. Ця пара у перетині площиною, перпендикулярною до осей циліндрів, дає дві криві, що дотикаються. Приклади таких кінематичних пар: зачеплення зубців зубчастих коліс (рис. 1.5); контакт ролика з поверхнею кулачка (рис. 1.6).

Відзначимо, що перевагою нижчих кінематичних пар, у порівнянні з вищими, є можливість передачі великих зусиль. Дія сил у нижчих парах розподіляється на більшу площу, у зв'язку з чим питомий тиск і стирання суттєво менші. Такі кінематичні пари є технологічнішими.

Перевагою вищих пар є можливість відтворення самих найрізноманітніших законів руху вихідної ланки та зменшення тертя при застосуванні кінематичних з'єднань.

Кінематичні з'єднання. Необхідно відмітити, що відносна рухомість ланок, що з'єднуються, може бути забезпечена також кінематичними з'єднаннями. Кінематичні з'єднання є аналогами кінематичних пар. Кінематичний ланцюг, що конструктивно замінює у механізмі кінематичну пару, називається *кінематичним з'єднанням*. Кінематичне з'єднання може складатися з декількох ланок та кінематичних пар, але тільки дві ланки з'єднання можуть бути з'єдані з іншими ланками механізму. Прикладами кінематичних з'єднань можуть бути кулькова вальниця, кульково-гвинтові передачі, роликові напрямні та інші (замінюють, відповідно, обертові, гвинтові та поступальні кінематичні пари). Застосування кінематичних з'єднань замість кінематичних пар дозволяє зменшити втрати на тертя та підвищити несучу здатність конструкції.

Структурні та кінематичні схеми механізмів. *Структурна* схема механізму являє собою його графічне зображення із застосуванням умовних позначень ланок і кінематичних пар (без дотримання масштабу).

Структурна схема надає загальну інформацію про механізм: про кількість ланок та кінематичних пар, послідовність, способи з'єднання ланок та види можливих рухів; нічого крім ланок та кінематичних пар, на відміну від *принципової схеми* механізму, вона не містить.

Кінематична схема механізму будується у вибраному масштабі з точним дотриманням всіх розмірів і форм, від яких залежить рух тієї чи іншої ланки. На кінематичній схемі повинно бути вказане все, що є необхідним для вивчення руху. Все зайве, що не впливає на рух, має бути вилучене, щоб не ускладнювати креслення.

На схемах ланки позначають арабськими цифрами 0, 1, 2, 3, ..., а кінематичні пари і різні точки ланок (наприклад, центри ваг) – латинськими літерами A, B, C, S₂ ... (рис. 1.1, б).

Ланки розрізняють за *конструктивними ознаками* (корпус двигуна, колінчастий вал, шатун, поршень, зубчасте колесо і т.п.), проте в ТММ найчастіше – *залежно від характеру їхнього відносного руху*. Наприклад:

- *кривошип* - ланка механізму, яка здійснює повний оберт навколо нерухомої осі (рис. 1.1, ланка 1);
- *коромисло* - ланка, яка здійснює коливальний рух;
- *повзун* - ланка, що здійснює поступальний прямолінійний рух (3);
- *шатун* - ланка важільного механізму, що здійснює плоскопаралельний рух (2);
- *куліса* - рухома ланка, яка є напрямною повзуна.

У кожному механізмі є одна нерухома ланка (або ланка, що приймається за нерухому) та одна чи кілька рухомих ланок. Нерухому ланку механізму називають *стояком*. Наприклад, у механізмі двигуна внутрішнього згоряння – блок двигуна, картер, головка циліндрів, циліндри, вальниці колінчастого вала і т.ін. утворюють в сукупності одну нерухому ланку – стояк (рис. 1.1, ланка 4). Стояк на схемі механізму позначають штриховкою. Поняття нерухомої ланки для транспортних машин є умовним. *Стояк* – це ланка, відносно якої визначають рух усіх інших ланок механізму.

Згідно з визначенням, у будь-якому механізмі є ланка (або декілька), рух якої є заданим. Ланка, якій задається рух, що перетворюється у потрібні рухи інших ланок називається *вхідною*. На схемах її позначають дугою зі стрілкою (рис. 1.1, ланка 1).

У деяких випадках застосовують терміни – *ведуча* ланка, *початкова* ланка. Якщо ланці приписується одна чи декілька узагальнених координат, то вона називається *початковою*.

Ведуча ланка – ланка для якої елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до неї, є додатна; якщо робота від’ємна або дорівнює нулю – ведена. Ланка механізму, яка здійснює потрібний рух, для виконання якого призначено механізм, називається *вихідною*.

Переважно у механізмі одна вхідна й одна вихідна ланки (механізм з одним ступенем вільності). Інші рухомі ланки – з’єднувальні, або проміжні. Вхідній ланці механізму з одним ступенем вільності переважно присвоюють номер 1, а вихідній номер *n*, проміжним ланкам порядкові номери: 2, 3, ..., *n-1*. Вхідна ланка отримує рух від двигуна, а вихідна з’єднується з робочим органом машини.

1.2. Кінематичні ланцюги

Кінематичним ланцюгом називають сукупність ланок, з'єднаних між собою кінематичними парами.

Отже, в основі кожного механізму лежить кінематичний ланцюг. Але при цьому не кожний кінематичний ланцюг є механізмом. Кінематичний ланцюг - це будь-яке з'єднання ланок кінематичними парами. Механізм, призначений для отримання певних, наперед заданих рухів. Тільки той кінематичний ланцюг буде механізмом, ланки якого здійснюють доцільні рухи, що слідують з інженерних розрахунків, виробничих потреб, для виконання яких сконструйовано механізм. Тобто, ланки в механізмі з'єднуються не будь-яким чином, а за певними правилами.

Кінематичні ланцюги бувають: *простими і складними, замкненими і незамкненими, плоскими і просторовими.*

У *простому* ланцюзі кожна ланка входить в одну або дві кінематичні пари (рис. 1.3, а). Якщо хоча б одна ланка входить більше як до двох кінематичних пар, то такий ланцюг називається *складним* (рис. 1.10, б, в, г).

Прості та складні кінематичні ланцюги, в свою чергу, поділяються на замкнені і незамкнені.

Незамкненим називається ланцюг, у якого є ланка, що входить лише в одну кінематичну пару (рис. 1.4, ж).

Замкненим називається ланцюг, кожна ланка якого входить не менш як у дві кінематичні пари (рис. 1.3, а). У замкненому ланцюзі ланки утворюють один або декілька контурів.

Плоским називають ланцюг, всі точки якого описують плоскі траєкторії або траєкторії, що лежать в одній чи паралельних площинах (рис. 1.3, а).

Просторовим називають ланцюг, у якого точки ланок описують просторові траєкторії або траєкторії, розташовані в пересічних площинах (рис. 1.4).

1.3. Основні види механізмів та їх структурні схеми

Найбільш поширеною є наступна класифікація механізмів.

За конструктивними ознаками:

1) важільні; 2) зубчасті; 3) кулачкові; 4) фрикційні; 5) механізми з гнучкими ланками; 6) механізми з пружними ланками; 7) механізми з зупинкою вихідної ланки.

Механізми поділяють, в першу чергу, на механізми з *нижчими* парами та механізми з *вищими* парами. Крім того, всі механізми можна поділити на *плоскі та просторові* (визначення плоских та просторових механізмів аналогічне до визначення плоских та просторових кінематичних ланцюгів).

Найпоширеніші механізми: з нижчими парами – важільні, клинові та гвинтові; з вищими парами - кулачкові, зубчасті, фрикційні, мальтійські та храпові (заскочкові).

Нижче наведено приклади основних механізмів (їх схем), що застосовують у різних машинах.

Важільні механізми – це механізми, в яких ланки утворюють лише обертові, поступальні, циліндричні або сферичні кінематичні пари.

Плоскі важільні механізми (механізми, які мають тільки обертові та поступальні пари). Ці механізми знайшли широке застосування в машино- та приладобудуванні завдяки можливості забезпечення потрібного перетворення руху при простоті геометричної форми ланок та елементів кінематичних пар. Перевагами таких механізмів є висока технологічність виготовлення, можливість виконання шарнірних з'єднань на вальницях котіння, здатність передавати відносно великі зусилля, довговічність та надійність у роботі.

Кривошипно-повзунний механізм (рис. 1.1) - один із найпоширеніших, застосовується в поршневих машинах (двигунах внутрішнього згорання, компресорах, помпах), у кувальних машинах та пресах, лісопильних рамах, приладах і т.ін. Цей механізм служить для перетворення обертового руху кривошипа 1 в поступальний рух повзуна 3, чи навпаки (ланка 2 – шатун, ланка 4 – стояк).

Шарнірний чотириланковик (ланки з'єднані лише обертовими парами) служить для перетворення одного виду обертового руху в інший. В залежності від розмірів ланок може бути кривошипно-коромисловим, двокривошипним або двокоромисловим механізмом; застосовується у пресах та кувальних машинах, конвеєрах, прокатних станах, порталних кранах, у приводі коліс тепловозів, електровозів, вагових механізмів і т.ін. На рис. 1.3, а ланка 1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – коромисло, 4 – стояк (випадок кривошипно-коромислового механізму).

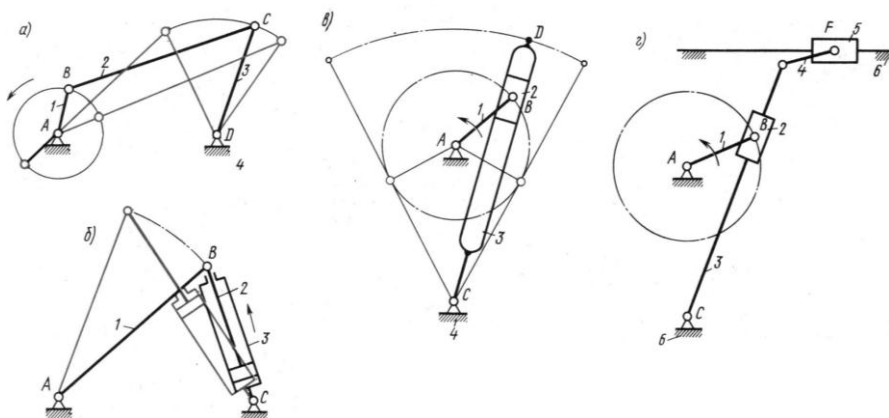


Рис. 1.3

Кулісний механізм призначений для перетворення одного виду неперервного обертового руху ланки 1- кривошипа в інший, ланки 3 – куліси (рис. 1.3, в), або обертового руху в поступальний - ланки 5 – повзуна (рис. 1.3, г). Ланка 2 – повзун, який в кулісних механізмах називається кулісним каменем. Особливістю кулісних механізмів є прискорений зворотній хід куліси. Такі чотири- та шестиланкові кулісні механізми застосовують у стругальних і довбальних верстатах, поршневих помпах та компресорах, гідроприводах (куліса з каменем являє собою циліндр 3 з поршнем зі штоком 2, рис. 1.3, б) і т.ін. В кулісному механізмі, залежно від розмірів ланок, куліса може виконувати коливальний, обертовий рух або рухатись поступально.

Зазначимо, що в назвах низки механізмів відображені їх конструктивні ознаки, назви (характер руху) вхідної і вихідної ланок та кількість ланок. Механізми, які мають тільки обертові пари, називають *шарнірними*.

Відмітимо, що в сучасному машинобудуванні найширше застосовують плоскі механізми. Механізми зі складними структурно-кінематичними схемами в більшості випадків, за основну перетворювальну рух частину мають один з розглянутих вище типів механізмів.

Просторові механізми з нижчими парами. Просторові важільні механізми в багатьох випадках забезпечують виконання потрібного виду руху точніше та меншим числом ланок порівняно з плоскими механізмами, тобто дозволяють уникнути застосування складних структурних схем: забезпечують передачу руху між осями, довільно розміщеними в просторі.

Просторовий шарнірний чотириланковик (рис. 1.4, а- модель, б- схема): 1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – коромисло, 4 – стояк.

Просторовий кривошипно-повзунний механізм (рис. 1.4, *в, з*) 1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – повзун, 4 – стояк.

Механізм універсального шарніра (шарніра Гука, карданна передача, шарнірна муфта рис. 1.4, *д, е*). Цей механізм призначений для передачі обертового руху між валами, осі яких перетинаються, при цьому кут між ними може змінюватися під час руху. Особливістю механізму є те, що при обертанні вхідного вала (вилки) 1 зі сталою кутовою швидкістю вихідний вал (вилка) 3 буде обертатися нерівномірно, при чому, чим більший кут між осями, тим більша нерівномірність обертання (ланка 2 – хрестовина). Карданна передача, це просторовий механізм, який складається з хрестовини та двох вилок.

На рис. 1.4, *ж* наведена структурна схема механізму маніпулятора промислового робота (ланки 1-6 – рухомі, 0 – стояк, *F* – захват).

Приклади механізмів (плоских і просторових) з *вищими парами*. Найширше застосування в машинах та приладах знаходять *зубчасті механізми*. Найпростіша зубчаста передача складається зі стояка та двох рухомих коліс, на ободі яких розміщені зубці. Зубці коліс входять по чергово у зачеплення між собою та завдяки взаємодії забезпечують передачу обертового руху. В зубчастій передачі розрізняють зовнішнє, внутрішнє та рейкове зачеплення (рис. 1.5, *а, б, в*). Менше з двох спряжених коліс називають шестірнею 1, більше - колесом 2 (або частковий випадок - рейка). За взаємним розміщенням осей коліс зубчасті передачі бувають:

- з паралельними осями (рис. 1.5, *а, б*, циліндричні передачі);
- з осями які перетинаються (рис. 1.5, *г*, конічні передачі);
- з мимобіжними осями (рис. 1.5, *д, е, є*, відповідно гвинтові, черв'ячні та гіпоідні передачі).

У *кулачкових* (плоских та просторових) механізмах вища пара утворена ланками, що називаються кулачок (шайба змінної кривини профілю) 1 і штовхач 2 (рис. 1.6, *а*), або кулачок та коромисло 2 (рис. 1.6, *б*). Потрібний закон руху забезпечується відповідним профілем кулачка.

Найважливішою позитивною властивістю кулачкових механізмів є можливість отримувати різноманітні закони руху вихідної ланки, у тому числі із зупинками; простота методів синтезу.

Зазначимо, що у курсі ТММ детальніше вивчаються три основні типи механізмів: плоскі важільні, зубчасті, кулачкові механізми.

У *фрикційному* механізмі передача обертового руху здійснюється за допомогою сил тертя. Найпростіша циліндрична фрикційна передача складається зі стояка та двох циліндричних коліс 1, 2, які робочими поверхнями притиснуті настільки, що сила тертя, яка виникає між ними, дає змогу їм передавати рух (рис. 1.7, *а*). Однією із важливіших переваг

фрикційних передач є можливість плавного безступінчастого регулювання передатного відношення. Лобова фрикційна передача (рис. 1.7, б), в якій ролик 1 може встановлюватися на різних відстанях від осі обертання ланки 2, забезпечує плавну зміну кутової швидкості і напрямку обертання вихідної ланки.

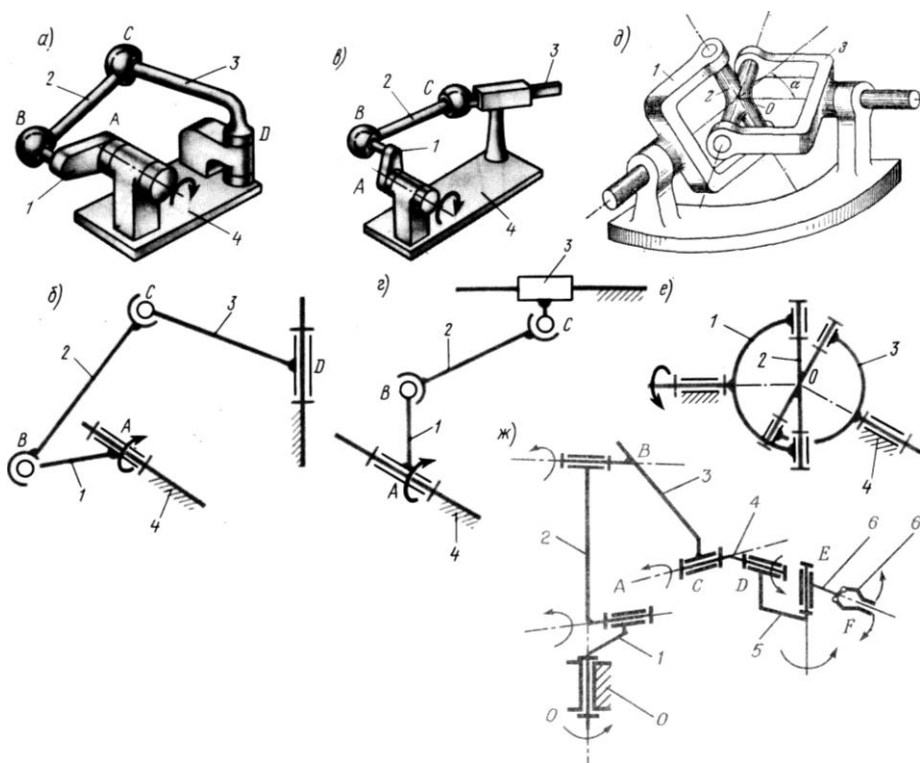


Рис. 1.4

У машинобудуванні та приладобудуванні застосовують велику кількість різноманітних механізмів, загальна кількість їх обчислюється тисячами. Розглянуті вище механізми є найтиповішими.

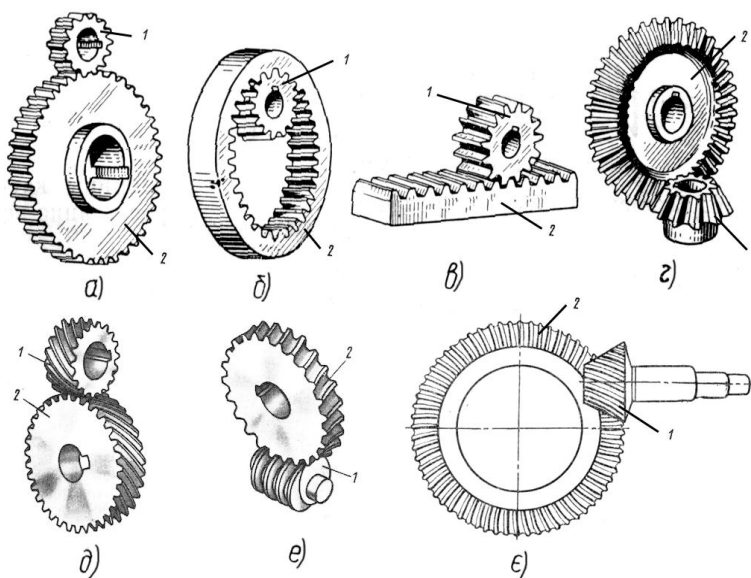


Рис. 1.5

Об'єм конспекту не дозволяє детальніше зупинитись на цьому питанні. Тим більше, що матеріал є оглядовий, з ним легко ознайомитись самостійно за рекомендованою літературою.

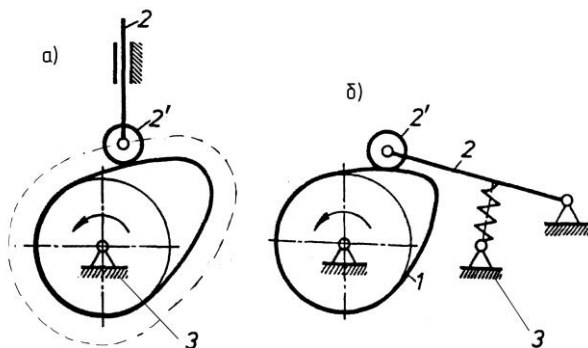


Рис. 1.6

Опис значно більшого числа механізмів наведений у спеціальних довідкових виданнях (Артоболевский И.И. Механизмы в современной технике. В 7т. - М.: Наука, 1979-1981; Кожевников С.Н. и др. Механизмы: Справочник. - М.: Машиностроение, 1976; Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам. - М.: Машиностроение, 1987).

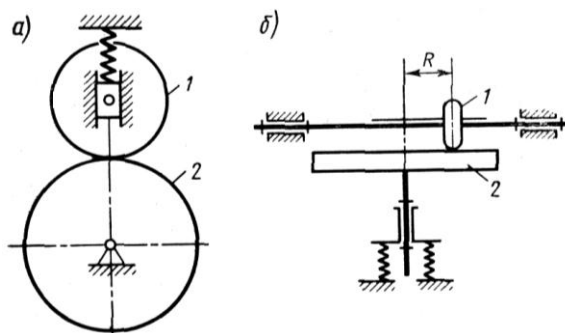


Рис. 1.7

Перерахувати усі існуючі на сьогодні механізми, звичайно, неможливо.

Розв'язок нових задач сучасної техніки пов'язаний не стільки з створенням нових механізмів, скільки з наданням їм нових якостей. Звідси слідує практична важливість вивчення основних механізмів та методів проектування їх схем.

1.4. Структурні формули кінематичних ланцюгів

Існують загальні закономірності в будові (структурі) найрізноманітніших механізмів, які проявляються у взаємозв'язку числа ступенів вільності механізму з числом ланок та числом і видом його кінематичних пар. Ці закономірності відображають структурні формули механізмів.

Просторові механізми. Нехай механізм складається з κ ланок. Якби всі ланки були вільними тілами, загальна кількість їх ступенів вільності була б рівна $H = 6\kappa$. В механізмі ланки з'єднані за допомогою кінематичних пар. Кожна з пар накладає на ланку відповідну кількість в'язей. Так, кінематична пара V класу накладає п'ять в'язей ("відбере" п'ять ступенів вільності), IV – чотири в'язі, III – три в'язі і т.ін. Позначимо число кінематичних пар V класу, що входять до складу механізму, через p_5 , IV класу – p_4 , III класу – p_3 і т. п. Тоді загальне число ступенів вільності всіх ланок, тобто число ступенів вільності, що їх має кінематичний ланцюг механізму, становитиме

$$H = 6\kappa - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1$$

Оскільки в механізмі одна із ланок вважається нерухомою, то загальне число ступенів вільності зменшиться на шість, $W = H - 6$. Позначимо число рухомих ланок механізму через $n = \kappa - 1$, тоді число ступенів вільності

кінематичного ланцюга відносно нерухомої ланки

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (1.1)$$

Це формула для визначення числа ступенів вільності (рухомості) просторових кінематичних ланцюгів, механізмів – *структурна формула кінематичного ланцюга загального виду*. В літературі її називають ще формулою Сомова-Малишева.

Ступінь вільності (рухомості) механізму W – це число ступенів вільності його рухомого кінематичного ланцюга відносно нерухомої ланки (стояка).

Плоскі механізми. На рух кожної з ланок плоского механізму накладено три загальні обмеження. Якщо б усі рухомі ланки на площині були вільними тілами, то загальне число ступенів вільності ланок дорівнювало б $(6 - 3)n = 3n$. У плоских механізмах кінематичні пари можуть бути лише V класу, однорухомі - нижчі та IV класу, дворухомі - вищі; відповідно пари п'ятого класу будуть накладати – $(5 - 3)p_5 = 2p_5$ в'язей (три загальні в'язі вже накладено площиною); пари четвертого класу – $(4 - 3)p_4 = p_4$ в'язей. В плоскі механізми пари I, II, III класів входити не можуть, оскільки вони володіють просторовим характером можливих відносних рухів. Структурна формула для плоского кінематичного ланцюга буде :

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (1.2)$$

Це *структурна формула Чебишева для визначення числа ступенів вільності плоских кінематичних ланцюгів, механізмів*.

За формулами (1.1), (1.2) проводять структурний аналіз існуючих механізмів і синтез структурних схем нових механізмів.

Аналіз ступеня вільності механізму. Наведемо визначення механізму, враховуючи нові поняття.

Механізмом називається такий кінематичний ланцюг, у якому при заданому русі однієї чи декількох ланок відносно будь-якої з них, всі інші ланки здійснюють однозначно визначені рухи.

Як видно з визначення, у будь-якому механізмі є ланка або декілька ланок, рух яких є заданим. Виникає запитання - скільки незалежних рухів можна задати даному механізму? Як було сказано, ступінь вільності механізму характеризує число ступенів вільності його кінематичного ланцюга відносно стояка. Отже, якщо механізм має один ступінь вільності, то одній з ланок механізму треба задати рух; при цьому всі інші ланки механізму отримують цілком визначені рухи, що є функціями заданого. Таким чином, для визначеності рухів усіх ланок механізму, який утворений кінематичним ланцюгом з одним ступенем вільності, необхідно і достатньо мати заданим

закон руху однієї з ланок. Якщо механізм має два ступені вільності, то необхідно задати одній з ланок два незалежних рухи або двом ланкам по одному незалежному руху. *Отже, ступінь вільності механізму вказує на число незалежних рухів, які треба задати в механізмі, щоб рух усіх інших ланок був цілком визначеним.*

Зазначимо, що при нульовому ступені вільності ні одна з ланок не може рухатися відносно нерухомої ланки і кінематичний ланцюг перетворюється у ферму.

Кожна з незалежних між собою координат, що визначає положення всіх ланок механізму відносно стояка, називається *узагальненою координатою механізму*. За узагальнену координату приймається кут повороту або лінійне зміщення ланки.

Ланка, якій приписується одна чи декілька узагальнених координат, називається *початковою* ланкою. Цей термін пов'язаний з тим, що знаходження положень усіх ланок механізму починають з побудови положень початкової ланки. Вибір початкової ланки визначається зручністю визначення положень ланок механізму та зручністю його аналізу. Початкові та вхідні ланки можуть як збігатися, так і не збігатися.

Число узагальнених координат механізму також визначається ступенем вільності механізму. Кожний незалежний рух визначається заданням закону зміни однієї узагальненої координати (кутової або лінійної).

Кривошипно-повзунний механізм (рис. 1.1) має ступінь вільності рівний одиниці, тобто $W=1$. Отже, для визначеності руху всіх ланок механізму треба задати йому один рух або треба мати заданою одну узагальнену координату. Нехай задано закон обертання ланки 1 у вигляді функції $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, де φ_1 – кут повороту кривошипа 1. В цьому разі всі інші ланки будуть мати цілком визначений рух. Ланка 1 механізму буде *вхідною (початковою)*. Нагадаємо, ланка (ланки) механізму, якій надається рух, що перетворюється в потрібний рух інших ланок механізму, називається *вхідною ланкою*.

Ступінь вільності механізму визначає число вхідних (початкових) ланок, тобто кількість ланок, яким необхідно задати рух, щоб усі інші ланки рухались цілком визначено.

Зазначимо, що, в основному, в конструкціях машин і приладів використовуються механізми з одним ступенем вільності. Значно рідше знаходять застосування механізми з двома та більше ступенями вільності. До таких конструкцій відносяться, наприклад, диференціали автомобілів, маніпулятори.

Пасивні (зайві) умови зв'язку. Необхідно зазначити, що під час дослідження структури механізму можуть виявитися умови зв'язку та ступені вільності, що не впливають на характер руху механізму в цілому. Такі умови

зв'язку називають *пасивними*, а ступені вільності – зайвими, оскільки їх можна вилучити без зміни загального характеру руху механізму.

Розглянемо для прикладу важільний п'ятиланковий механізм подвійного паралелограма, що на практиці трапляється у вагових механізмах, швейних двоголчастих машинах, спарниках тепловозів та електровозів (рис. 1.8, а). При значних навантаженнях ланки можуть недопустимо деформуватися. Крім того, шарнірний паралелограм, переходячи через своє граничне положення, може перетворитися в антипаралелограм. Для позбавлення цих недоліків у конструкцію механізму вводять додатковий шатун EF . При цьому розміри ланок задовольняють умови $AB = CD$, $AD = EF = BC$, $AE = BE$ і $DF = FC$.

З урахуванням другого шатуну ступінь рухомості механізму паралелограма

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0,$$

тобто, згідно з розрахунком, такий кінематичний ланцюг не має рухомості, а є фермою. Насправді, як це підтверджує практика, у разі приведення в рух кривошипа AB (чи іншої ланки) усі ланки даного кінематичного ланцюга мають цілком визначені рухи. Отже, це механізм, а кінематичні пари E та F і зв'язки, накладені ними на ланки, не впливають на рух механізму в цілому.

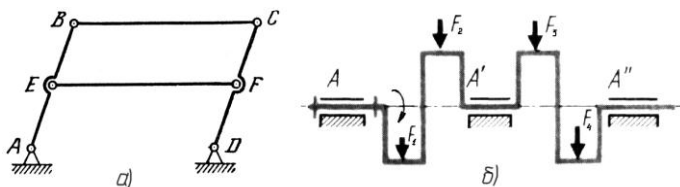


Рис. 1.8

Додаткові в'язі, що не впливають на рух механізму в цілому та на закон руху веденої ланки, називають *пасивними (зайвими)*. Пасивні в'язі дублюють інші в'язі, не зменшуючи рухомість механізму, а лише перетворюють його у статично невизначену систему.

Виконуючи структурний, кінематичний аналіз, пасивні в'язі треба вилучати; умовно відокремимо шатун EF від механізму. Тоді ступінь вільності механізму буде таким, як і є насправді, рівним одиниці

$$W = 3 - 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

Зазначимо, що пасивні зв'язки існують при виконанні певних геометричних співвідношень у механізмі; введення додаткового шатуну EF лише за умови $EF = AD$ не внесе нових зв'язків і число ступенів вільності

залишитись рівним одиниці. Якщо ж точність виконання вказаних геометричних співвідношень виявиться недостатньою, наприклад, $AE \neq FD$, то відстань EF вже не буде рівною AD і рух стане неможливим, тобто число ступенів вільності дійсно буде рівним нулю.

Отже, в загальне число накладених умов зв'язку може ввійти деяке число додаткових (пасивних) в'язей. Ступінь вільності просторового механізму з урахуванням пасивних зв'язків визначається за такою формулою Сомова-Малишева

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 + q, \quad (1.3)$$

де q – число пасивних (зайвих) в'язей.

У загальному випадку розв'язати рівняння (1.3) з двома невідомими (W, q) є важкою задачею. Проте, коли ступінь вільності механізму знайдено з геометричних міркувань, то з (1.3) можна знайти число пасивних зв'язків.

Для плоского механізму формула Чебишева з урахуванням пасивних зв'язків матиме вигляд

$$W_n = 3n - 2p_5 - p_4 + q$$

індекс “ n ” звертає увагу на те, що йдеться про ідеально плоский механізм або, точніше, про його плоску схему. Реальні плоскі механізми, через неточності виготовлення, деякою мірою є просторовими.

Механізми, які мають зайві зв'язки, є статично невизначеними; якщо $q = 0$ - механізм - статично визначена система. Якщо пасивних умов зв'язку немає, механізм складається без деформації ланок, останні ніби самовстановлюються; такі механізми називаються *самовстановлюваним або раціональними*. Якщо пасивні в'язі існують ($q \neq 0$), то механізми потребують підвищеної точності виготовлення. У разі недостатньої точності у процесі складання ланки механізму деформуються, що викликає навантаження кінематичних пар і ланок значними додатковими силами; тертя в кінематичних парах може значно збільшитися. Тому з цього погляду пасивні в'язі в механізмах небажані.

Але в цілому ряді випадків необхідно свідомо проектувати та виготовляти статично невизначені механізми із залишковими в'язями для забезпечення потрібної міцності та жорсткості системи, для кращого розподілу навантажень, особливо при передачі великих сил. Так, наприклад, для колінчатого вала чотирициліндрового двигуна (рис. 1.8, б), з погляду кінематики механізму з одним ступенем вільності, повністю достатньо однієї опори A з обертовою кінематичною парою V класу. Але, враховуючи велику довжину вала і значні зусилля, що навантажують колінчатий вал, вводять ще дві опори A' і A'' ; інакше система буде нероботоздатною з причини недостатньої жорсткості та міцності. Для такої конструкції необхідно забезпечити високу точність виготовлення, особливо співвісність усіх трьох опор, інакше вал буде деформуватись, і в матеріалі вала та вальніцях можуть

з'явитися недопустимо великі напруги. Зазначимо, що розрізняють пасивні умови зв'язку в кінематичних ланцюгах механізму – зайві контурні зв'язки, та – в кінематичних парах – локальні зв'язки (відповідно перший та другий розглянуті приклади).

Зайві ступені вільності. Розповсюдженням прикладом зайвих ступенів вільності є обертання роликів на їх осях. Як приклад розглянемо кулачковий механізм з роликівим штовхачем (рис. 1.6).

Ступінь вільності кулачкового механізму за формулою Чебишева

$$W=3n-2p_5-p_4=3\cdot3-2\cdot3-1=2.$$

Виходячи з того, що $W=2$ можна зробити висновок, що у механізмі має бути дві вхідні ланки. Проте очевидно, що для визначеності руху штовхача достатньо задати лише один рух кулачку. Зайвий ступінь вільності створює ролик. Він може обертатися навколо своєї осі, не впливаючи на характер руху всього механізму. Кінематика механізму не зміниться, якщо ролик вивести, а профіль кулачка виконати за еквідистантою (штрихова лінія на рис. 1.6). Ролик являє собою конструктивний елемент, який зменшує сили тертя і спрацювання ланок.

У подальшому при вивченні руху ланок механізмів, будемо припускати, що всі зайві умови зв'язку попередньо вилучені.

1.5. Структурна класифікація плоских механізмів. Основний принцип створення механізмів

У сучасному машинобудуванні особливо поширені плоскі механізми, ланки яких входять в кінематичні пари IV і V класів. Розглянемо принципи їх структурної класифікації.

Структурна класифікація Ассура-Артоблевського є однією з найраціональніших класифікацій плоских механізмів. Перевагою цієї класифікації є те, що вона пов'язується з методами кінематичного та динамічного дослідження механізмів. Класифікація універсальна, охоплює усі існуючі і можливі нові механізми; визначає напрямки дослідження механізмів, вказує шляхи утворення нових механізмів.

В основі її лежить основний принцип створення механізмів, сформульований в 1914 р. Л.В. Ассуром. Ним був запропонований метод створення механізмів шляхом послідовного нашарування кінематичних ланцюгів, що мають певні структурні властивості: *будь-який механізм може бути створений шляхом послідовного приєднання до однієї (чи декількох) початкових ланок та стояка кінематичних ланцюгів з нульовим ступенем вільності*. Такі кінематичні ланцюги з нульовим ступенем вільності називають *структурними групами* або *групами Ассура*, а початкову ланку та стояк - *механізмом I класу*.

Таким чином, будь - який механізм можна отримати послідовним приєднанням до механізму I класу (одного чи декількох) груп Ассура.

Структурною групою Ассура називається кінематичний ланцюг, приєднання якого до механізму не змінює ступеня вільності механізму.

Існують інші визначення, наприклад: кінематичний ланцюг, число ступенів вільності якого відносно елементів його зовнішніх кінематичних пар дорівнює нулю, називають групою Ассура, якщо з нього не можна виділити простіші кінематичні ланцюги, що задовільняють цій умові. Отже, основною ознакою групи Ассура є рівність нулю її ступеня вільності, $W_{Гр} = 0$.

Сукупність стояка та початкової ланки, що утворюють кінематичну пару V класу, умовно називають механізмом I класу (найпростішим, початковим механізмом); число механізмів I класу дорівнює числу ступенів вільності механізму.

Отже, механізми I класу являють собою найпростіші дволанкові механізми, що складаються з рухомої ланки та стояка, що з'єднані між собою або однією обертовою, або - поступальною кінематичною парою V класу (рис. 1.9); ступінь вільності механізму I класу рівний одиниці. Механізми I класу, що мають обертову пару, досить поширені в техніці. Це механізми таких машин, як електродвигуни, генератори, турбіни, вентилятори, відцентрові помпи і т.ін.

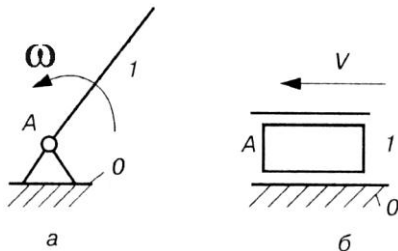


Рис. 1.9

Усі складніші можуть бути отримані шляхом приєднання до механізмів I класу додаткових кінематичних ланцюгів - структурних груп Ассура.

Очевидно, щоб створити новий механізм з одним ступенем вільності, $W = 1$ (з іншими властивостями), до механізму I класу треба приєднати лише такі кінематичні ланцюги, які мають $W = 0$, тобто групи Ассура.

При розгляді питань класифікації механізмів зручно обмежитися розглядом механізмів, у яких всі вищі пари IV класу попередньо замінені відповідними кінематичними ланцюгами, що утворені лише кінематичними парами V класу, $p_4 = 0$. Тоді, для структурних груп Ассура, справедлива рівність

$$W_{Гр} = 3n - 2p_5 = 0. \quad (1.4)$$

З (1.4) дістанемо співвідношення $p_5 = \frac{3}{2}n$. Оскільки кількість кінематичних пар завжди ціле число, то кількість ланок в групі Ассура завжди парна; умові (1.4) відповідають лише такі співвідношення ланок і кінематичних пар, що входять у групу Ассура:

Таблиця 1.1

n	2	4	6	8	...
p_5	3	6	9	12	...

Зауважимо, що групи Ассура можуть мати лише парне число ланок, бути дво-, чотири-, шестиланковими і т.ін. Задаючись співвідношеннями ланок і кінематичних пар (табл. 1.1), можна дістати різні групи Ассура. Усі одержані таким чином групи Ассура поділено на класи: II, III, IV і т.д. У свою чергу, приєднуючи до механізму (чи механізмів) I класу групи Ассура різних класів, можна отримати найрізноманітніші механізми, відповідно механізми II, III, IV і т.д. класів.

Відзначимо що поділ груп за класами зумовлено методами кінематичного і силового аналізу, що властиві групам кожного класу.

Отже, найпростіша група Ассура складається з двох ланок і трьох кінематичних пар V класу - *група Ассура II класу II порядку або двоповодкова група*. Оскільки пари V класу в плоских механізмах можуть бути обертовими та поступальними, то залежно від співвідношення їх числа та розташування можливі 5 видів (модифікацій) такої групи. На рис. 1.10, а зображено групи Ассура II класу II порядку I, II, III, IV, V видів; штриховими лініями показані ланки (поводки), до яких приєднуються дані структурні групи; це можуть бути рухома ланка або стояк механізму I класу, або ж ланки інших, вже приєднаних груп Ассура, при цьому не можна приєднувати структурну групу до однієї ланки.

Зазначимо, що, приєднуючи до механізму I класу групу Ассура II класу II порядку I виду, дістанемо шарнірний чотириланковик, рис. 1.3, а ; - II виду – кривошипно-повзунний механізм, рис. 1.1; - III виду - кулісний механізм, рис. 1.3, в. Механізми, до складу яких входять групи Ассура не вище другого класу - це механізми II класу.

Наступна, більш складна група Ассура складається з чотирьох ланок і шести кінематичних пар - *група III класу III порядку або триповодкова група*. Характерною особливістю цієї групи є наявність ланки, що входить у три кінематичні пари й утворює жорсткий трикутник; таку ланку називають базисною. Найпростіша група III класу, з одними обертовими парами, зображена на рис. 1.10, в. В частинному випадку базисна ланка може бути прямолінійною, а деякі кінематичні пари - поступальними (рис. 1.10, б). Механізми, до складу яких входять групи Ассура не вище третього класу -

механізми III класу.

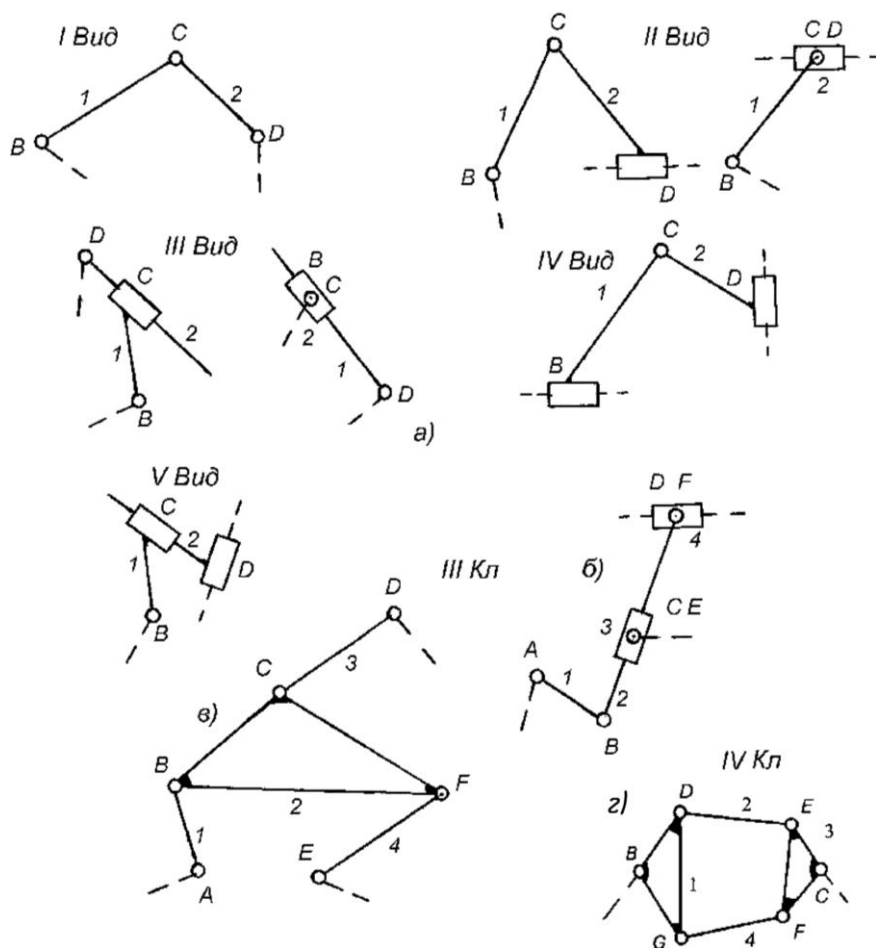


Рис. 1.10

Другий можливий кінематичний ланцюг, що складається з чотирьох ланок і шести пар (рис. 1.10, з) – група IV класу II порядку. Особливістю цієї групи є наявність рухомого чотиристороннього замкнутого контуру. Очевидно, можливо отримати різні модифікації цих груп, якщо обертові пари комбінувати з поступальними.

Більш складні групи V і вищих класів використовуються обмежено і тут не розглядаються.

Таким чином групи Ассура діляться на класи і порядки. Клас групи

Ассура визначається найвищим класом контура, що входить до її складу (за І.І. Артоболевским, клас структурної групи Ассура визначається числом кінематичних пар, що утворюють найбільш складний замкнутий контур). Основою структурної групи є замкнутий контур. Клас контура визначається кількістю кінематичних пар, у які входять ланки, що його утворюють. Механізму I класу присвоюють I клас контура (контур виродився у точку; є лише одна кінематична пара); ланка з двома парами – II клас (також частковий випадок замкнутого контура – контур виродився у пряму); жорстка ланка з трьома парами – III клас (рис. 1.11, в – трикутник); контур з чотирма парами – IV клас і т.ін.

Порядок групи Ассура визначається кількістю вільних (зовнішніх) елементів кінематичних пар (поводків), якими група Ассура приєднується до існуючого механізму.

Вид групи Ассура для груп III та вищих класів не визначається.

Клас механізму в цілому визначається найвищим класом групи, яка входить до його складу. Зазначимо що, визначаючи клас механізму, потрібно вказати, яка з ланок є початковою, оскільки залежно від її вибору може змінюватися клас механізму.

Структурний аналіз механізму належить проводити шляхом розбивки його на структурні групи Ассура та механізми I класу у послідовності, зворотній до утворення механізму.

Основою для проведення структурного аналізу є принципова схема механізму. Проводити структурний аналіз механізму краще за структурною схемою. При побудові структурної схеми дотримуються таких правил:

1) ланки зображають у вигляді простих геометричних фігур довільних розмірів (прямі лінії, трикутники, чотирикутники тощо); 2) прямолінійним відрізком зображають прості ланки; 3) трикутниками, чотирикутниками зображають складні ланки.

Послідовність виконання структурного аналізу.

1. Будують структурну схему механізму. Дають характеристику ланок і кінематичних пар.

2. Визначають ступінь вільності механізму.

3. Вилучають пасивні умови зв'язку та зайві ступені вільності.

4. Якщо механізм має вищі кінематичні пари IV класу, їх замінюють на нижчі пари V класу.

5. Розкладають механізм на структурні групи Ассура та механізм (механізми) I класу. Кількість механізмів I класу має дорівнювати числу ступенів вільності механізму.

6. Визначають клас і порядок виділених груп Ассура.

7. За класом старшої групи Ассура визначають клас (і порядок) механізму в цілому.

8. Записують формулу будови механізму.

При розкладі механізму на групи Ассура (п.5) слід пам'ятати, що в групу Ассура входять лише рухомі ланки; число ланок в групі завжди парне, а число кінематичних пар кратне трьом; розпочинати виділення групи треба з ланок, найвіддаленіших від початкової ланки. Оскільки в практиці найбільше груп Ассура II класу, то спочатку намагаються відокремити кінематичний ланцюг, що містить дві ланки та три кінематичні пари. Ступінь рухомості механізму, що залишається, має бути таким, як і в п.2, а виділеного кінематичного ланцюга – звичайно нуль. Якщо виділити двоповодкову групу не вдається, то роблять спробу виділити ланцюг із 4 ланок і 6 кінематичних пар. Після відокремлення однієї групи Ассура виділяють наступну і так доти, доки не залишиться механізм I класу.

Приклад структурного аналізу. На рис. 1.11 наведена структурна схема шестиланкового механізму поршневої помпи: 1 – кривошип; 2, 4 – шатуни; 3 – коромисло; 5 – повзун; 6 – стояк. Число рухомих ланок дорівнює п'яти, $n = 5$.

Число кінематичних пар: $p_5 = 7$, це пари: A(1, 6); B(1, 2); C(2, 3); D(3, 6); E(3, 4); F(4, 5) – обертові пари та F'(5, 6) – поступальна пара; $p_4 = 0$, тобто вищих кінематичних пар немає.

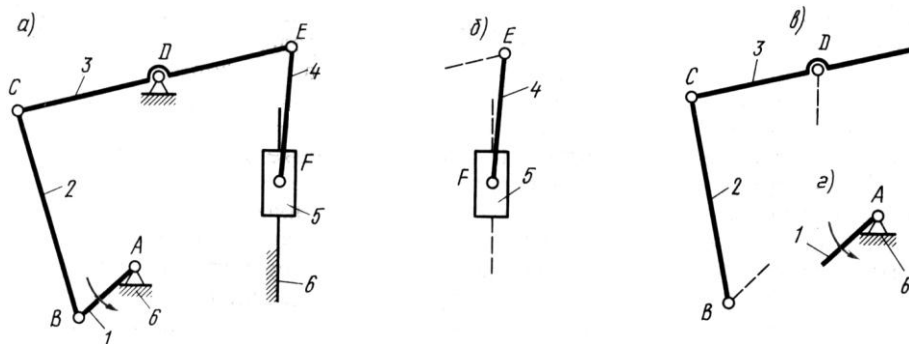


Рис. 1.11

Ступінь вільності механізму за формулою Чебишева

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 1 \cdot 0 = 1.$$

Даний механізм має один ступінь вільності і, відповідно, має бути один механізм I класу, - одна початкова ланка.

Розкладаємо механізм на групи Ассура. Послідовно від'єднуємо від механізму дві групи Ассура II класу II порядку, одна з них II виду (ланки 4, 5), друга I виду (ланки 3, 2). В результаті залишається механізм I класу (ланки 1, 6).

Враховуючи, що групи 2, 3 та 4, 5 є групами II класу, можна зробити висновок, що даний шестиланковий механізм належить до другого класу.

Склад механізму та послідовність приєднання груп Ассура в механізмі виражають формулою будови механізму. У цій формулі римськими цифрами позначають клас початкового механізму та групи Ассура, а в круглих дужках арабськими цифрами – номери ланок, які їх утворюють. Так, наприклад, для механізму, наведеного на рис. 1.11, формула будови має вигляд

$$I(1, 6) \rightarrow II(2, 3) \rightarrow II(4, 5).$$

З цієї формули видно, що до механізму I класу, який утворений ланками 1 та 6, послідовно приєднали групу Ассура II класу, утворену ланками 2, 3, і групу Ассура II класу – ланки 3, 4.

Умовна заміна в плоских механізмах вищих пар нижчими. Замінюючі механізми. Під час класифікації, вивчення структури та кінематики плоских механізмів з вищими парами в багатьох випадках зручно умовно замінювати вищі пари нижчими. При цьому, треба задовольнити умови структурної та кінематичної еквівалентності замінюючого і реального механізмів: замінюючий механізм повинен мати такий самий ступінь вільності і необхідно, щоб характер миттєвого відносного руху всіх його ланок не змінився.

У плоских механізмах вища кінематична пара утворюється шляхом дотику двох кривих, по яких окреслені її елементи (рис. 1.12). Інколи одним з елементів пари може бути точка або пряма. Для кожної з кривих можна знайти у точці їх дотику радіус та центр кривини. Обидва центри та точка дотику розміщені на спільній прямій – нормалі до кривих. У ТММ доведено, що вища кінематична пара IV класу еквівалентна до ланки та двох нижчих пар V класу. Положення додаткової ланки співпадає зі спільною нормаллю до кривих у точці їх дотику, а довжина дорівнює сумі радіусів кривини елементів вищої пари. Нижчі кінематичні пари розміщують у центрах кривини профілів, що дотикаються, тобто на кінцях додаткової ланки.

Розглянемо приклад. Нехай заданий механізм з вищою парою, елементи ланок якої являють собою довільні криві a та b (рис. 1.12, a). Для заміни вищої пари нижчими та побудови схеми замінюючого механізму проведемо нормаль nn в точці C дотику кривих a та b і відмітимо на ній центри O_1 , O_2 кривини. В точках O_1 , O_2 розміщуємо обертові кінематичні пари V класу і з'єднуємо їх з центрами A і B . Отже, вища пара IV класу в точці C замінюється умовною ланкою O_1O_2 та двома кінематичними парами V класу O_1 і O_2 . Даний механізм буде еквівалентний плоскому шарнірному чотириланковому AO_1O_2B - замінюючий механізм. Значимо, що якщо профілями вищої пари є криві змінної кривини, у кожному положенні розміри замінюючого механізму змінюються.

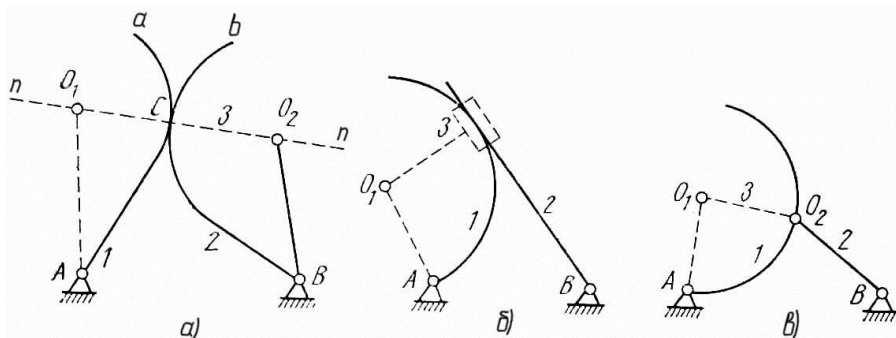


Рис. 1.12

На рис. 1.12, б, в наведено інші приклади заміни вищих кінематичних пар нижчими. Якщо одна з ланок, що утворює вищу пару, буде мати прямолінійний профіль, то замість обертової пари вводиться поступальна (центр кривини такого профілю знаходиться на нескінченності). У випадку, коли одним з елементів є точка (загострення), то радіус кривини звичайно дорівнює нулю, і, відповідно, одна з обертових пар буде знаходитися у даній точці.

Питання для самоконтролю

1. Що вивчає ТММ?
2. Дайте визначення механізму, машини.
3. Назвіть дві основні проблеми ТММ.
4. Що називається ланкою, кінематичною парою?
5. За якими ознаками класифікують кінематичні пари?
6. Що називається кінематичним ланцюгом? Як їх класифікують?
7. Яка різниця між механізмом та кінематичним ланцюгом?
8. Запишіть формулу Чебишева.
9. За якою формулою визначають ступінь рухомості просторового механізму?
10. Наведіть приклади основних механізмів з нижчими парами та їх структурні формули.
11. Наведіть приклади основних механізмів з вищими парами
12. Сформулюйте основний принцип утворення механізмів.
13. Дайте визначення групі Ассура.
14. Як визначається клас і порядок груп Ассура?
15. Який порядок структурного аналізу механізмів?
16. Який механізм називається механізмом I класу. Як визначається клас механізму?

ГЛАВА 2. КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ

2.1. Задачі та методи кінематичного дослідження

Кінематикою називається розділ механіки, в якому вивчається рух тіл у просторі та часі без урахування їх інертності (мас) і діючих на них сил. Кінематичне дослідження механізму, тобто дослідження руху ланок з точки зору структури (будови) механізму без урахування сил, що обумовлюють цей рух, полягає, в основному, в розв'язку трьох таких задач:

- визначення положень, переміщень ланок механізму і траєкторій окремих точок ланок;
- визначення швидкостей характерних точок і кутових швидкостей ланок;
- визначення прискорень характерних точок та кутових прискорень ланок.

Переміщення, траєкторії, швидкості та прискорення точок і кутові швидкості та прискорення ланок механізму є основними кінематичними характеристиками руху.

Кінематичне дослідження полягає у визначенні названих кінематичних характеристик за заданим законом руху початкової (вхідної) ланки та кінематичною схемою.

Закон руху початкової ланки, якщо вона виконує обертальний рух, в загальному випадку задають у вигляді рівняння $\varphi = \varphi(t)$, що виражає залежність кута її повороту (узагальненої координати) від часу. При поступальному русі початкової ланки цей закон може бути заданий у вигляді рівняння $s = s(t)$, що виражає залежність переміщення вхідної ланки від часу.

Функції переміщення $\varphi = \varphi(t)$, $s = s(t)$ можуть бути також задані графічно. У деяких інженерних задачах закон руху може бути заданий у вигляді функцій швидкості $\omega = \omega(t)$, $v = v(t)$, або прискорення - $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $a = a(t)$.

Кінематичне дослідження механізмів виконують графічними, графоаналітичними, аналітичними й експериментальними методами. В ТММ широке розповсюдження отримали графічні та графоаналітичні методи. Це зумовлено тим, що ці методи універсальні (їх можна застосовувати для механізмів будь-якої структури), досить прості і наочні; в той час як аналітичні методи призводять до дуже громіздких формул і складних результатів. Для більшості практичних задач точність цих методів достатня. У свою чергу, графічні методи неефективні, коли необхідна висока точність і коли необхідно провести великий об'єм побудов. В наш час, завдяки широкому розповсюдженню ЕОМ та прикладних математичних програм, приділяють все більшу увагу аналітичним методам. З допомогою цих методів дослідження можна виконати з будь-якою ступінню точності. Крім того,

суттєвим є те, що аналітичні методи дозволяють встановити взаємозв'язок кінематичних характеристик з його метричними параметрами, тобто розмірами ланок; результати аналітичного дослідження зручні для програмування та реалізації на ЕОМ, особливо з використанням сучасних систем комп'ютерної математики (Mathcad, Mathematica, Maple, MATLAB та інших).

Знання кінематичних параметрів необхідне для оцінки роботи існуючих машин або ж для практичного використання при конструюванні нових. Наприклад, траєкторії окремих точок механізму потрібні для визначення ходу ланок, для з'ясування можливого їх зіткнення з іншими ланками, окреслення габаритів картерів і корпусів машин. Для виконання силового розрахунку механізму необхідно визначити сили інерції та опір рухові ланок, для чого повинні бути відомі їх швидкості та прискорення. За кінематичними параметрами конструктор робить висновок про те, наскільки успішно виконана одна з основних задач проектування механізму - вибрана кінематична схема.

2.2. Функція положень та кінематичні передатні функції механізму

До числа кінематичних характеристик відносяться також і ті, що не залежать від закону руху початкових ланок (часу), а визначаються лише будовою механізму, розмірами його ланок і, в загальному випадку, залежать від узагальнених координат механізму. Це функції положень та кінематичні передатні функції.

Досить часто при проектуванні механізмів дійсний закон руху початкової ланки вдається визначити лише на наступних стадіях проектування, після динамічного аналізу. У таких випадках вводять кінематичні передатні функції, що не залежать від часу. А кінематичне дослідження виконується в два етапи - спочатку встановлюються залежності кінематичних параметрів ланок від узагальненої координати, тобто визначаються відносні функції (функції положення та кінематичні передатні функції механізму). І тільки після визначення закону руху початкової ланки знаходять залежності кінематичних параметрів вихідних і проміжних ланок від часу.

Функція положень механізму. Функцією положень будь-якої ланки механізму називають залежність координати, що відображає положення даної ланки, від узагальненої координати і геометричних параметрів механізму. Функція положень вихідної ланки є функцією положення механізму. Тобто це залежність $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1)$ для третьої ланки механізму на рис. 2.1, або в загальному вигляді $\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1)$ при обертовому русі n -ї ланки; при поступальному русі ланки, наприклад, ланки 5 механізму на рис. 1.3, z – залежність $s_F = s_F(\varphi_1)$. Треба зазначити, що в загальному випадку

механізму з декількома ступенями вільності функція положень механізму є функцією усіх узагальнених координат $\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s)$, де $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$ - узагальнені координати механізму.

Отже, функція положень є геометричною характеристикою механізму, яка не залежить від закону руху початкової ланки (часу, абсолютних значень швидкостей ланок і т.ін.) і визначається лише структурною схемою механізму та розмірами його ланок. Також відзначимо, що функція положень навіть для найпростіших важільних механізмів виражається складними рівняннями. Однак одержати її у графічній формі розміткою траєкторій неважко. Зупинимось на цій задачі нижче.

Перша та друга кінематичні передатні функції механізму. Диференціюючи двічі функцію положень по узагальненій координаті, отримаємо вирази

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} &= \varphi'_n, & \frac{ds_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} &= s'_n, \\ \frac{d^2\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1^2} &= \varphi''_n, & \frac{d^2s_n(\varphi_1)}{d\varphi_1^2} &= s''_n. \end{aligned}$$

Одержані функції φ'_n , s'_n і φ''_n , s''_n є геометричними характеристиками n -ої ланки механізму і називаються, відповідно, *першою та другою передатними функціями механізму*. Або s'_n – кінематична передатна функція швидкості точки (аналог швидкості); φ'_n – кінематична передатна функція кутової швидкості ланки (аналог кутової швидкості або передатне відношення); s''_n , φ''_n – відповідно передатна функція прискорення або кутового прискорення (аналог прискорення точки або аналог прискорення ланки).

Встановимо зв'язок між вказаними геометричними та кінематичними характеристиками механізму з одним ступенем вільності при обертальному русі n -ої ланки. Продиференціюємо функцію положення за часом

$$\omega_n = \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{dt} = \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = \varphi'_n \cdot \omega_1,$$

тобто, $\omega_n = \omega_1 \cdot \varphi'_n = \omega_1 \cdot u_{n1}$,

де ω_1 , ω_n - кутові швидкості відповідно ланок 1 та n ; $u_{n1} = \frac{\omega_n}{\omega_1}$.

Як бачимо, функція перша передатна функція механізму $\varphi'_n = \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} \frac{dt}{dt} = \frac{\omega_n}{\omega_1}$ є відношенням миттєвих швидкостей ланок (миттєве передатне відношення); в загальному випадку її називають передатною функцією. Відношення $\frac{\omega_n}{\omega_1}$ називається *передатним відношенням* і позначається u_{n1} .

Відношення кутової швидкості однієї ланки до кутової швидкості другої ланки називається *передатним відношенням*, позначається буквою u , як правило, з цифровими індексами, що відповідають номерам розглядуваних ланок $u_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}$. Передатне відношення є величиною безрозмірною. Це одна з основних характеристик механізмів передач.

З допомогою другої похідної функції положення за часом визначають кутові прискорення ланок механізму

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \frac{d^2\varphi_n(\varphi_1)}{dt^2} = \frac{d\omega_n}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_1 \cdot \varphi'_n) = \\ &= \omega_1 \frac{d\varphi'_n}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \varphi'_n \frac{d\omega_1}{dt} = \omega_1^2 \cdot \varphi''_n + \varphi'_n \cdot \varepsilon_1.\end{aligned}$$

Якщо $\omega_1 = \text{const}$, $\varepsilon_1 = 0$, то $\varepsilon_i = \varphi''_n \cdot \omega_1^2$.

Таким чином, дійсна кутова швидкість n -ої ланки механізму дорівнює добутку кутової швидкості ω_1 початкової ланки на першу передатну функцію (передатне відношення u_{n1}); помноживши другу передатну функцію на ω_1^2 (при $\omega_1 = \text{const}$), дістанемо, відповідно, прискорення n -ої ланки. Фізичний зміст передатних функцій такий: перша $\varphi'_n = u_{1n}$ та друга φ''_n передатні функції являють собою відповідно швидкість $\omega_n = \varphi'_n \cdot 1$ та прискорення $\varepsilon_n = \varphi''_n \cdot 1^2$ n -ої ланки механізму за умови, що $\omega_1 = 1$. Тому зазначені передатні функції називають також аналогами швидкостей та прискорень.

При поступальному русі ланки викладки аналогічні:

$$v_n = \frac{ds_n(\varphi_1)}{dt} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} = s'_n \cdot \omega_1,$$

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{d(s'_n \omega_1)}{dt} = \omega_1 \frac{ds'_n}{dt} \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} + s'_n \frac{d\omega_1}{dt} = s''_n \cdot \omega_1^2 + \varepsilon_1 \cdot s'_n.$$

Якщо $\omega_1 = \text{const}$, $\varepsilon_1 = 0$, тоді $a_n = s''_n \cdot \omega_1^2$.

Передатні функції швидкості та прискорення мають розмірність довжини, кутові передатні функції є безрозмірними величинами.

Оскільки для даної кінематичної схеми механізму передатні функції залежать лише від узагальненої координати і не залежать від закону руху початкової ланки, то кінематичне дослідження можна виконувати суто геометричними методами. Передатні функції дозволяють легко порівнювати закони руху ланок, а отже і знаходити оптимальні параметри механізму за заданими умовами роботи. Кінематичне дослідження за допомогою передатних функцій є ефективним у випадку кількох можливих рухів початкової ланки.

Якщо при проектуванні чи дослідженні механізму задана чи визначена функція положення або одна з передатних функцій механізму, то інші залежності можуть бути встановлені методами диференціювання чи інтегрування як числовими, так і графічними.

2.3. Плани механізму

Визначення переміщень, положень ланок і траєкторій, що описують окремі точки ланок, тобто розв'язання першої основної задач кінематики, можна виконати графічними або аналітичними методами. Досить широко використовується графічний метод - за допомогою побудови планів механізму.

Зображення кінематичної схеми механізму у вибраному масштабі при відповідному положенні початкової ланки називається планом механізму.

Графічне розв'язування задач теорії механізмів потребує зображення різноманітних фізичних величин (шляху, довжин ланок, швидкостей, прискорень, сил і т. ін.) у вигляді ліній тієї чи іншої довжини. Для цього користуються масштабним коефіцієнтом.

Масштабний коефіцієнт (масштаб) є відношення дійсного значення зображуваної величини до довжини відрізка, який цю величину зображує на кресленні. Масштаб позначається літерою μ з індексом того параметра, який зображується графічно.

$$\mu_x = \frac{x}{ab} \frac{\text{— деяка фізична величина, яку зображають графічно}}{\text{— довжина відрізка, який зображає дану величину на кресленні}}$$

Масштаб має розмірність: у чисельнику – розмірність зображуваної величини, а у знаменнику - мм (розмірність довжини відрізка на кресленні).

Таким чином, масштаб довжини – це відношення натурального розміру ланки в метрах до довжини відрізка в міліметрах, який зображує цю ланку на кресленні (плані механізму),

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB}, \frac{м}{мм},$$

де l_{AB} - справжній розмір; AB - масштабний розмір на кресленні.

При виборі масштабу рекомендують дотримуватися стандартних креслярських масштабів, а також міркувань зручності підрахунків та наочності зображення. Наприклад, масштабу $M1:1$ відповідає масштабний коефіцієнт $\mu_l=0,001м/мм$, масштабу $M1:2$ відповідає $\mu_l=0,002м/мм$ і т.ін.

Для побудови планів механізму повинні бути задані розміри всіх його ланок, а якщо будується одне конкретне положення механізму і положення початкової ланки.

У русі більшості механізмів спостерігається циклічність, при цьому усі кінематичні параметри механізмів змінюються періодично. Тому, зазвичай, при дослідженні механізмів будують ряд послідовних положень механізму. При виконанні курсових проектів, як правило, кінематична схема механізму будується для 12 положень.

Послідовність побудови планів механізму:

- ☐ вибирають масштаб побудови μ_l ;
- ☐ знаходять довжини відрізків, якими на кресленні зображатимуться

ланки (рис. 2.1 – $\mu_l = \frac{l_{AO_1}}{AO_1}$, отже $AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l}$, $BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l}$, $O_1C = \frac{l_{O_1C}}{\mu_l}$);

☐ перш за все, на креслення наносять положення нерухомої ланки (намічаються нерухомі точки механізму, наносяться, при наявності, нерухомі напрямні; на рис. 2.1 - т. O_1 , C);

☐ викреслюють задане положення початкової ланки. Якщо будується n планів механізму, то знаходять початкові (“мертві”, крайні) положення механізму і, відповідно, початкової ланки;

☐ лише після цього викреслюють групи Ассура в порядку їх приєднання при утворенні механізму.

Наголосимо, що доцільно за початкове положення механізму (кривошипа) вибрати те, яке відповідає одному з крайніх положень вихідної ланки (ланки, до якої прикладена сила корисного опору, або рушійна сила). У кривошипно-повзунному механізмі чи шарнірному чотириланковому (або якщо вони лежать в основі розглядуваних механізмів) вихідна ланка перебуватиме у крайніх положеннях, коли кривошип накладатиметься на шатун, або витягуватиметься в одну лінію з ним. У кулісному механізмі

вихідна ланка (куліса CD , рис. 1.3, в) перебуватиме у крайніх положеннях, коли кривошип AB і куліса утворять прямий кут. Зазначимо, що з двох крайніх положень механізму за початкове вибирають те, що відповідає початку робочого ходу. Оскільки в більшості машин робочий хід здійснюється повільніше (рівномірніше) ніж холостий, то він відповідає руху кривошипа з одного крайнього положення до іншого через більший з центральних кутів. Більший з центральних кутів, що описує кривошип при русі механізму з одного крайнього положення до іншого, називається *кутом робочого ходу*.

Розглянемо побудову 12 планів механізму на прикладі шарнірного чотириланкового, структурна схема якого зображена на рис. 1.3, а. Виконуємо перші три пункти наведеної вище послідовності побудови планів. Після цього, радіусом O_1A (рис. 2.1) проводимо коло з центром у т. O_1 , яке є геометричним місцем миттєвих положень т. A кривошипа 1. Як відомо, закон руху початкової ланки в загальному випадку задається у вигляді рівняння $\varphi = \varphi(t)$.

В технічних задачах при кінематичному дослідженні механізмів закон руху початкової ланки беруть лінійним, тобто швидкість її руху вважають сталою ($\omega_1 = \text{const}$, дорівнює проєктованій середній кутовій швидкості; в дійсності кривошип може обертатися нерівномірно, навіть із зупинками). Таким чином, за рівні проміжки часу кривошип повертається на рівні кути. При побудові 12 планів механізму коло, що описує т. A кривошипа, ділиться на 12 рівних частин, починаючи з початкового положення механізму. Для його знаходження з центра обертання кривошипа O_1 досить зробити засічки радіусами $R=AB-O_1A$ і $R=O_1A+AB$ на траєкторії руху т. B - дузі $\alpha_3-\alpha_3$ (відповідно кривошип O_1A накладатиметься на шатун AB або витягуватиметься з ним в одну лінію). За початкове положення т. A візьмемо т. A_0 , яка відповідає початку робочого ходу ($\varphi_p > \varphi_x$), при заданому напрямі обертання кривошипа. Зрозуміло, що т. A'_0 не завжди збігається з точками поділу траєкторії т. A на рівні частини, послідовні положення якої позначені $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{11}$.

Для визначення положення ланок 2 і 3 достатньо встановити положення кінематичної пари B , що шарнірно з'єднує ці ланки між собою. Для цього умовно роз'єднуємо шарнір у т. B і розглядаємо можливі рухи цієї точки. Оскільки нерухомий центр обертання C займає цілком певне положення, то т. B , яка знаходиться на сталій відстані BC від т. C , може описати тільки дугу $\alpha_3-\alpha_3$ кола радіуса BC . З іншого боку, внаслідок незмінності довжини шатуна AB точка B може описати навколо т. A тільки дугу радіуса AB . Таким чином, геометричним місцем можливих положень центра шарніра B є дві дуги кіл радіусів AB та BC . Точка перетину цих дуг і дасть дійсне положення т. B для конкретного положення кривошипа.

Отже, якщо потрібно побудувати, наприклад, 3-тє положення механізму, то з точки A_3 радіусом $R=AB$ робимо засічку на дузі $\alpha_3 - \alpha_3$. Точка перетину дуг дає шукане положення т. B_3 . Дану побудову називають способом *засічок*. Для знаходження положень ланок 2 і 3 достатньо з'єднати відповідні точки (центри кінематичних пар A та B , B та C) відрізками. Аналогічно будемо всі інші положення механізму.

Якщо до складу механізму входять декілька груп Ассура, то їх плани будуються аналогічно.

На планах механізму, у разі необхідності, можна побудувати траєкторії, що описують окремі точки ланок. Траєкторії різних точок шатуну мають різноманітну форму, оскільки шатун здійснює плоскопаралельний рух. Траєкторії точок, що розміщені на ланках, які здійснюють плоскопаралельний рух, називають *шатунними кривими*. Точність побудованої траєкторії залежить від вибраного числа положень механізму і масштабу μ_l .

На рис. 2.1 показано, наприклад, послідовні положення т. S шатуну 2. З'єднавши плавною кривою намічені точки S_i для кожного з положень механізму, одержимо траєкторію т. S . Відмітимо, що шатунні криві можуть бути також описані аналітичними співвідношеннями, але в цьому випадку задача значно ускладнюється. Наприклад, для шарнірного чотириланкового траєкторія т. S описується кривою шостого порядку.

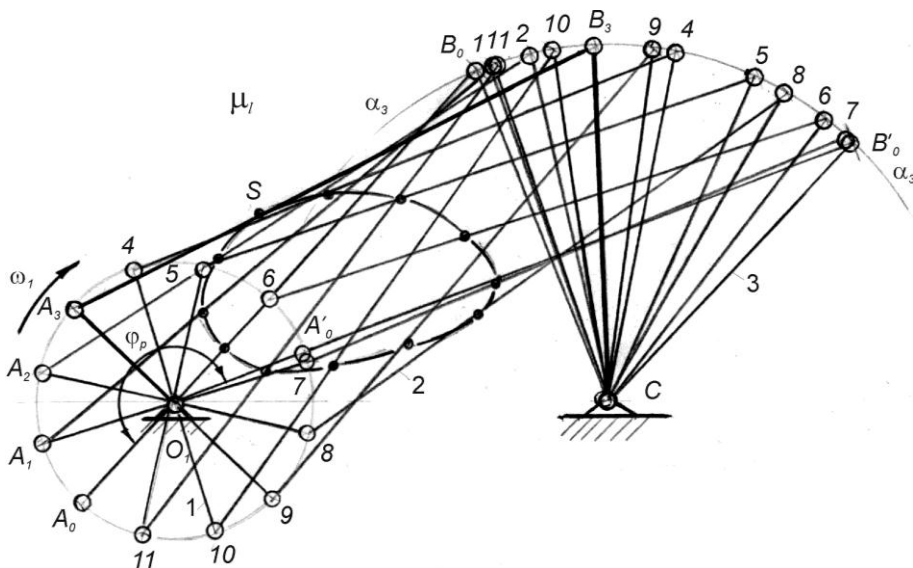


Рис. 2.1

Подібно будуються плани механізму (кінематичні схеми) інших важільних механізмів другого класу.

A diagram of a mechanism with two degrees of freedom. It consists of a fixed frame with two revolute joints at points D and C. A crank of length $AD = 100$ mm is pivoted at D and has a pin joint at A. A connecting rod of length $AB = 150$ mm is pivoted at A and B. A slider block is pivoted at B and has a vertical guide surface at C. A second crank of length $BC = 100$ mm is pivoted at C and has a pin joint at G. A slider block is pivoted at G and has a horizontal guide surface at H. The mechanism is shown in a specific configuration with dashed lines indicating the paths of points A, B, and G.

У випадку механізмів з вищими кінематичними парами (наприклад, кулачковими) доводиться враховувати, що профілі, або один з них, мають складні контури. Викреслювання послідовно декількох складних профілів є трудомісткою процедурою. У цих випадках доцільно застосувати *метод обернення руху (метод інверсії)*. Суть його полягає в тому, що всьому механізмові (разом зі стояком) надають обертання з кутовою швидкістю, яка дорівнює за величиною, але протилежна за напрямом кутовій швидкості ланки, що має складний профіль (кулачок). Таким чином, рухому ланку зі складним контуром умовно роблять нерухомою; це дозволяє викреслювати її лише один раз. Відносне положення усіх ланок при цьому не змінюється.

Приклад використання методу обернення руху буде розглянуто при вивченні кулачкових механізмів.

При побудованих планах механізму неважко побудувати діаграми переміщення та отримати функції положень ланок механізму.

Побудова діаграм переміщення. При дослідженні механізмів будують діаграми лінійних або, при колиальному русі ланки, кутових переміщень. Розглянемо побудову графіка $s_B(t)$ переміщень повзуна B кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.3):

- викреслюють 12 рівновіддалених за кутом повороту кривошипа планів механізму в масштабі $\mu_l, \frac{м}{мм}$; за початок відліку прийнято нижнє крайнє положення повзуна;

- будують прямокутну систему координат. На осі абсцис відкладають відрізок l , що в масштабі μ_t зображає період T одного оберту кривошипа,

тобто $\mu_t = \frac{T}{l}, \frac{с}{мм}$;

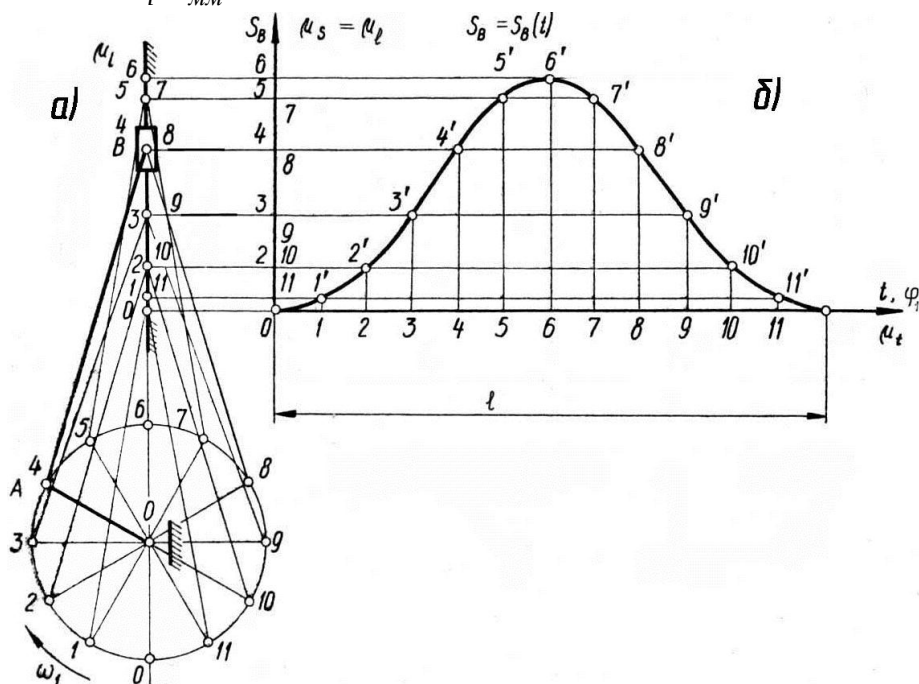


Рис. 2.3

- ділять відрізок l на 12 рівних частин. Від точок поділу $1, 2, 3, \dots, 11$, паралельно осі ординат, відкладають відрізки $1-1', 2-2', 3-3', \dots$, які у вибраному масштабі μ_s зображають переміщення повзуна від крайнього нижнього положення. Якщо переміщення відкладаються безпосередньо з планів механізму (як у прикладі на рис. 2.3), то $\mu_s = \mu_l$.

З'єднавши одержані точки $0, 1', 2', \dots, 11'$ плавною кривою, отримують діаграму переміщень повзуна, $s_B(t)$. Оскільки у задачах кінематики прийнято рух кривошипа рівномірним (за однакові проміжки часу він повертається на рівні кути), то можна вважати, що по осі абсцис відкладено і час t і кут повороту кривошипа φ_1 . Тобто графік $s_B(t)$ одночасно є графіком $s_B(\varphi_1)$, який *представляє собою функцію положення механізму*. Масштаб μ_φ цього графіка буде:

$$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{l}, \frac{rad}{mm}, \text{ або } \mu_\varphi = \frac{360^\circ}{l}, \frac{grad}{mm}.$$

2.4. Дослідження руху механізмів методом кінематичних діаграм

Якщо один з кінематичних параметрів механізму заданий у вигляді графіка чи таблиці значень, то в цьому випадку ефективними є графічні або чисельні методи диференціювання та інтегрування. Зазначимо, що при експериментальному дослідженні такі графіки викреслюються за допомогою самописних приладів.

Задачі дослідження закономірності зміни переміщень, швидкостей і прискорень за повний цикл (період) руху досліджуваного механізму простіше розв'язуються за допомогою *кінематичних діаграм (графіків руху)*.

У практичних задачах ТММ кожна *кінематична діаграма* - це графічне зображення зміни одного з кінематичних параметрів ланки: переміщення, швидкості або прискорення як функції від часу або переміщення початкової ланки механізму (як функції від узагальненої координати). Наприклад, у випадку кривошипно-повзунного механізму для т.В повзуна (рис. 2.3) - це залежності $s_B(t)$, $v_B(t)$, $a_B(t)$ або $s_B(\varphi_1)$, $v_B(\varphi_1)$, $a_B(\varphi_1)$. Якщо дослідженню підлягає i -та ланка механізму, яка здійснює обертальний рух, то можна побудувати діаграми $\varphi_i(t)$, $\omega_i(t)$, $\varepsilon_i(t)$, або $\varphi_i(\varphi_1)$, $\omega_i(\varphi_1)$, $\varepsilon_i(\varphi_1)$.

Розглядуваний метод дозволяє при заданій будь-якій з цих діаграм без значних зусиль отримати інші. Методом кінематичних діаграм часто користуються для наочності та виявлення можливих помилок при обчисленні. Переваги цього методу – простота у використанні й те, що результатом є

наочне графічне зображення зміни одного з кінематичних параметрів руху від часу чи узагальненої координати. Варто мати на увазі, що методи графічного диференціювання та інтегрування не завжди можуть забезпечувати достатню точність результатів.

Зазначимо, що до графічного диференціювання та інтегрування необхідно деколи звертатись навіть у тих випадках, коли кінематична функція задана аналітично, але не має достатньо простих формул для визначення похідної чи інтеграла.

Графічне диференціювання. Метод дотичних. Графічне диференціювання використовується, коли є графік функції, а потрібно отримати графік її похідної. Так, наприклад, побудовано графік переміщення повзуна кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.3), а необхідно побудувати графіки швидкості, прискорення.

Розглянемо теоретичні основи графічного диференціювання. Використаємо відому залежність $v = \frac{ds(t)}{dt}$. Геометрично, похідна функції визначається тангенсом кута нахилу дотичної до графіка функції, проведеної у точці, абсциса якої є точка диференціювання, $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$.

Нехай крива AB (рис. 2.4) є графік деякої функції $y = f(x)$. Проведемо дотичну до графіка у т. M_1 , що відповідає заданій абсцисі x_1 . Відкладемо на осі абсцис вліво від початку прямокутної системи координат відрізок OP (полюсну відстань), що дорівнює одиниці масштабу. З точки P (полюса) проведемо пряму, паралельну дотичній до перетину з віссю ординат. Відрізок $01''$ буде виражати значення похідної $f'(x)$, при заданому значенні x_1 .

$$01'' = OP \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = f'(x)$$

Проведемо з точки $1''$ пряму, паралельну осі Ox , до перетину з ординатою т. M_1 . Ордината точки перетину $1'$ і дає значення похідної $f'(x)$ при заданому значенні x_1 . Тобто, точка $1'$ буде точкою шуканої диференціальної кривої. У загальному випадку, ордината диференціальної кривої у будь-якій точці є відрізок, пропорційний до кута нахилу дотичної, що проведена у відповідній точці заданої кривої.

Таким чином, для того, щоб побудувати графік похідної за графіком функції, поділимо ділянку AB , заданої кривою, на деяке число частин. Далі, розглянувши методом, неважко знайти у точках поділу заданої кривої значення похідної - тобто точки диференціальної кривої. З'єднавши отримані точки плавною кривою, дістанемо графік функції $y = f'(x)$.

Диференціювання методом дотичних має відносно низьку точність, оскільки досить складно проводити дотичні до кривих. Більшого поширення набув метод хорд, який відрізняється більшою точністю. Відмінність методу хорд полягає лише у тому, що значення похідної функції знаходять не у точках поділу кривої, а у точках, що ділять навпіл кожний з інтервалів (рис. 2.5, точки $M_1, M_2, M_3, \dots$). Перевагою є те, що при цьому замість дотичних беруться, як правило, з досить великою точністю, хорди, що з'єднують кінцеві точки кожного інтервалу. Метод ґрунтується на відомій теоремі про скінченний приріст функції: якщо функція, що задана графічно, та її перша похідна неперервні, то в будь-якому інтервалі хорда, що стягує дану дугу, паралельна дотичній до кривої, принаймні, в одній точці, яка лежить у середині цього інтервалу.

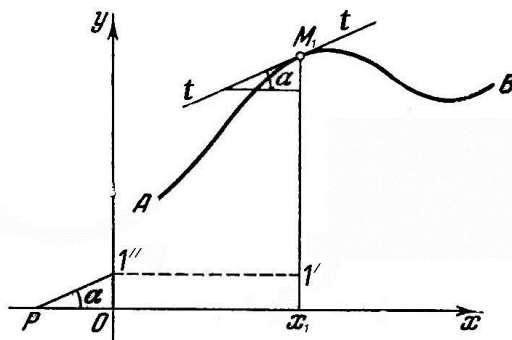


Рис. 2.4

Зазначимо, що графік похідної буде точнішим при більшій кількості частин поділу кривої. Інтервали не обов'язково повинні бути рівними між собою; їх розмір вибирається з урахуванням того, щоб відповідні частини кривої менше відхилялись від прямої. Особливу увагу треба звернути на ділянки, де крива, яку диференціюють, має екстремуми; ділянки, у яких лінія значно звивається, слід розбивати на більше число частинок.

Масштаби при графічному диференціюванні. Припустимо, що задана крива (рис. 2.5) зображає діаграму переміщень, $s_B(t)$. Знаючи масштаб μ_s переміщень та масштаб μ_t часу, для будь-якої точки $M(x, y)$ кривої можна записати $s = y \cdot \mu_s$, $t = x \cdot \mu_t$. Тоді

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \frac{dy}{dx} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.1)$$

Підставимо в (2.1) $v = y'_i \cdot \mu_v$ та $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_i}{H}$,

де y'_i - відрізки $01''$, $02''$, $03''$, ..., які зображають в масштабі μ_v швидкості у відповідних положеннях механізму; H - полюсна відстань OP . Тоді масштаб графіка швидкості μ_v можна визначити за формулою

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{H \cdot \mu_t},$$

або в загальному випадку масштаб диференціальної кривої $\mu_{y'} = \frac{\mu_y}{H \cdot \mu_x}$.

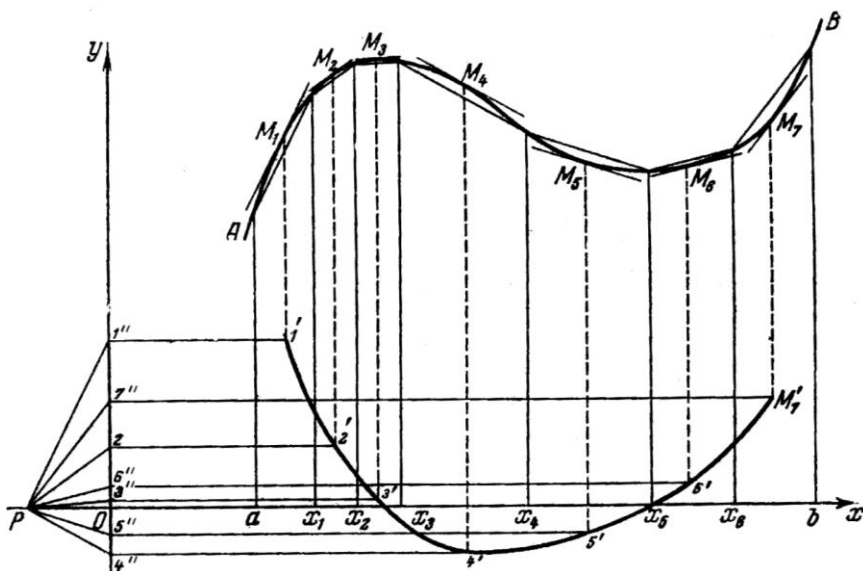


Рис. 2.5

Послідовність диференціювання методом хорд. Задано діаграму переміщення кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.6, а). Побудуємо діаграму швидкості:

- на заданій кривій відмічають ряд точок $1'$, $2'$, $3'$, ..., які з'єднують хордами, тобто, замінюють задану криву ламаною лінією;

- під діаграмою переміщень будуємо нову систему координат так, щоб осі абсцис були паралельними, а ординат - лежали на одній прямій (рис. 2.6, б). Ділимо вісь абсцис на такі ж інтервали, як і на попередньому графіку;

- відкладаємо по осі абсцис ліворуч від початку системи координат довільний відрізок OP_1 - полюсну відстань;

Діаграма переміщень

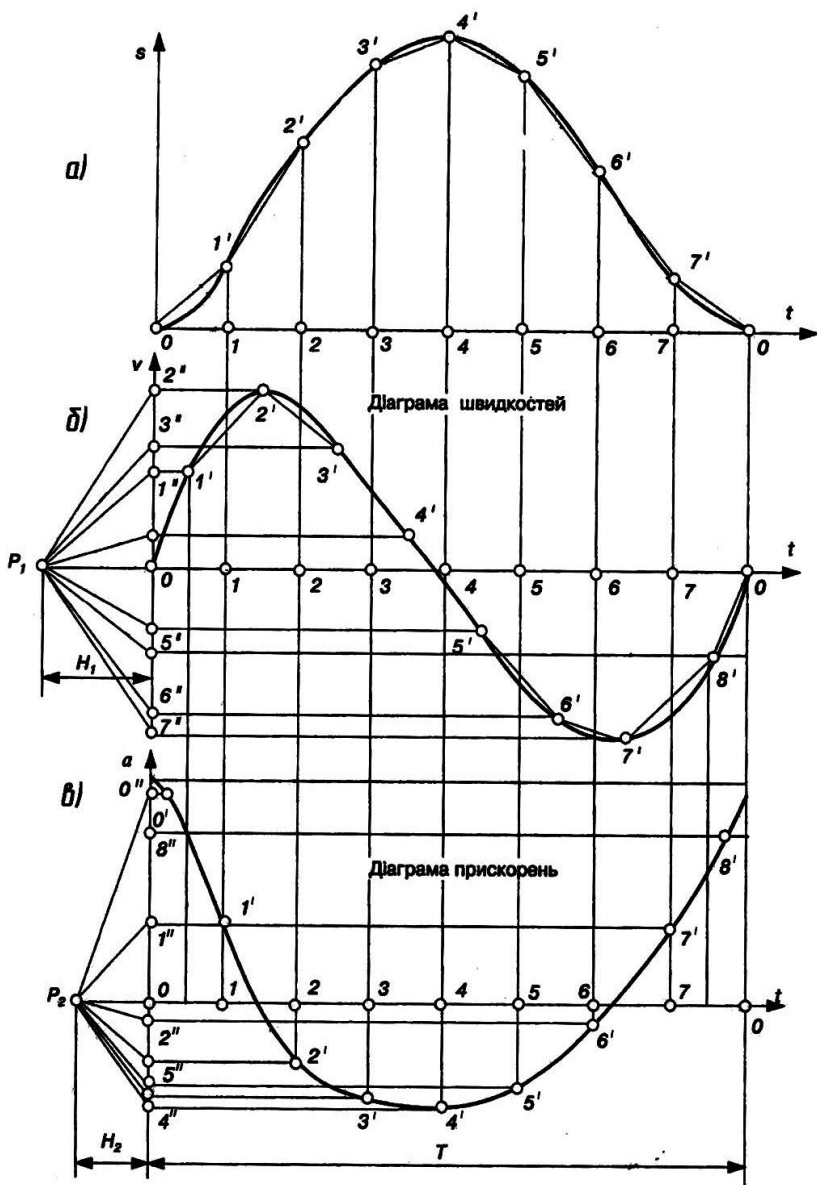


Рис. 2.6.

- з точки P_1 проводимо промені $P_11'', P_12'', P_13'', \dots$, паралельні до відповідних хорд кривої переміщень. Ці промені відтинають на осі ординат відрізки $01'', 02'', 03'', \dots$, що пропорційні середній швидкості повзуна посередині відповідних інтервалів часу;

- перенесемо точки $01'', 02'', 03'', \dots$, на середини ординат відповідних ділянок. З'єднаємо точки $0, 1', 2', \dots$ плавною кривою. Отримана крива і буде діаграмою швидкості.

Маючи діаграму швидкості, аналогічно методом хорд будують, за потреби, діаграму прискорень (рис. 2.6, в).

Зазначимо, якщо діаграму переміщень задано у вигляді функції $s_B(\varphi_1)$, то в результаті графічного диференціювання отримуємо відповідно графіки кінематичних передатних функцій швидкості $s'_B(\varphi_1)$ та прискорення $s''_B(\varphi_1)$ (аналогів швидкості та прискорення).

Масштаби по осях ординат визначаються за формулами:

$$- \text{ для діаграм швидкостей та прискорень } \mu_v = \frac{\mu_s}{H_1 \cdot \mu_t}, \mu_a = \frac{\mu_v}{H_2 \cdot \mu_t},$$

$$- \text{ для діаграм аналогів швидкостей та прискорень } \mu_{s'} = \frac{\mu_s}{H_1 \cdot \mu_\varphi}, \mu_{s''} = \frac{\mu_{s'}}{H_2 \cdot \mu_\varphi},$$

де H_1, H_2 – відрізки в мм, взято з креслення (рис. 2.6).

Масштаби по осях абсцис μ_φ усіх графіків залишаються звичайно такими ж, як і на графіку переміщень.

Порівнюючи графіки (рис. 2.6), можна встановити такий зв'язок між кінематичними діаграмами:

- зростанню ординат кривої функції, що диференціюється, відповідають додатні значення ординат диференціальної кривої, а зменшенню – від'ємні значення;

- екстремальним значенням функції (максимуми та мінімуми) відповідають нульові значення графіка похідної.

- точкам перегину графіка функції відповідають екстремальні значення диференціальної кривої.

Графічне інтегрування. Побудову графіків швидкості за заданим графіком прискорень та графіків переміщень - за графіком швидкостей виконують так званими прийомами графічного інтегрування.

Існує декілька способів побудови інтегральної кривої: спосіб *хорд*, *площ* та інші.

Розглянемо спосіб хорд. Інтегрування – це дія, обернена диференціюванню. Відповідно послідовність графічного інтегрування за способом хорд обернена послідовності диференціювання за цим способом. Нехай заданим є графік функції швидкості $v(t)$. Знайдемо графік функції переміщення $s(t)$.

Послідовність графічного інтегрування.

1. Ділимо задану криву (рис. 2.7, а) на інтервали - точки 1, 2, 3,...на осі абсцис.

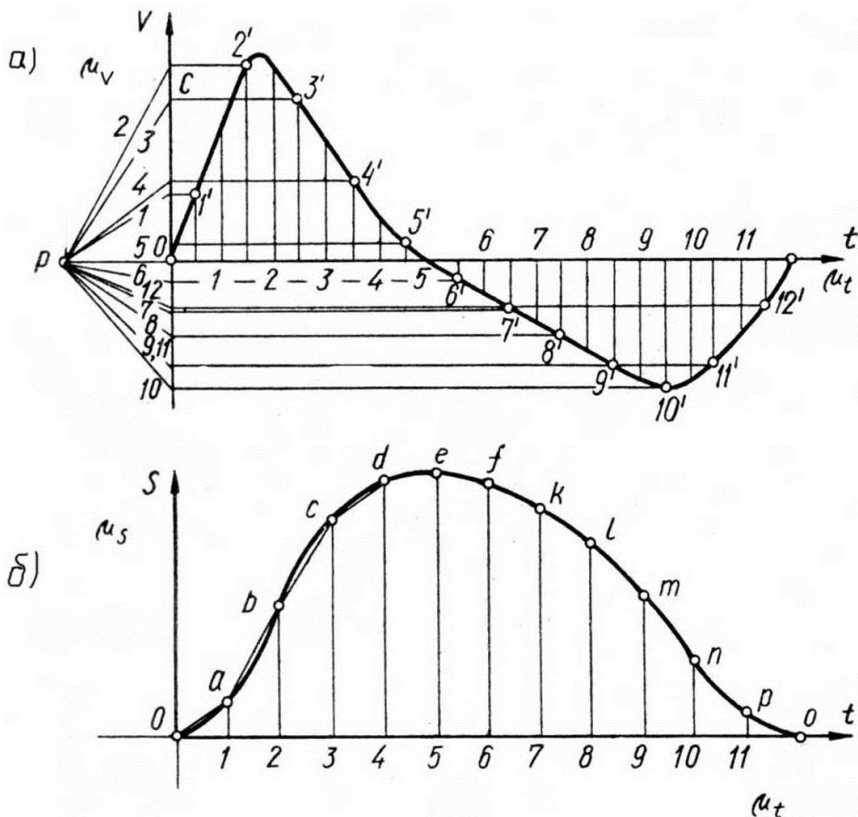


Рис. 2.7

2. Проводимо полюсну відстань OP . Ординати $1', 2', 3', \dots$ середини кожного інтервалу проєктують на вісь ординат і отримані точки з'єднують з полюсом P .

3. Під діаграмою швидкості будуємо нову систему координат (рис. 2.7, б). Ділимо вісь абсцис на такі ж інтервали, як і на попередньому графіку.

4. З початку нової системи координат O проводять у першому інтервалі лінію $0a$ паралельно до променя $P1$; з кінця відрізка $0a$ проводять у другому інтервалі відрізок ab паралельний променю $P2$, і так далі, $bc//P3$, $cd//P4$,... Отриману ламану лінію замінюють плавною кривою, одержують графік переміщень

Масштаб одержаної інтегральної кривої знаходять за формулою

$$\mu_s = \mu_v \mu_t H$$

або, в загальному випадку, $\mu_y = \mu_v \mu_x H$.

2.5. Метод планів швидкостей та прискорень

Методи графічного диференціювання та інтегрування при всій їх простоті та наочності не розв'язують повністю питання кінематики. Діаграми переміщень, швидкостей та прискорень дають лише скалярні кінематичні величини, а напрями векторів цих величин невідомі. Цього недоліку позбавлений графоаналітичний метод, що ґрунтується на побудові планів швидкостей та прискорень (*векторний спосіб*); метод достатньою мірою розроблений, точний і зручний у практичному застосуванні, особливо, коли треба визначити швидкості і прискорення для конкретного положення механізму.

Теоретичні основи побудови планів швидкостей і прискорень розглядаються в курсі теоретичної механіки. За основу цього методу взята можливість розкласти складний рух точки або ланки на прості рухи шляхом введення додаткової (рухомої) системи відліку. Залежності між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного та відносного рухів точки (ланки) записуються у векторній формі та представляються у вигляді планів швидкостей та прискорень.

Нагадаємо: складним рухом ланки (точки) називається такий рух, при якому ланка одночасно бере участь у двох або більше простих рухах. Рух, що здійснює ланка (точка) по відношенню до рухомої системи відліку, називається відносним рухом. Рух, що здійснює рухома система відліку по відношенню до нерухомої системи, називається переносним рухом. Рух, що здійснює ланка (точка) по відношенню до нерухомої (основної) системи відліку, називається абсолютним або складним.

Теорема про додавання швидкостей та прискорень точки в її складному русі: абсолютна швидкість v_a точки дорівнює векторній сумі її переносної v_e і відносної v_r швидкостей, тобто

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Дана теорема ще носить назву паралелограма або трикутника швидкостей. Абсолютна швидкість знаходиться шляхом побудови паралелограма швидкостей. Вектори $\vec{v}_a$, $\vec{v}_e$, $\vec{v}_r$ швидкостей мають напрямки по дотичній до відповідної траєкторії.

Абсолютне **прискорення** a_a довільної точки ланки дорівнює векторній сумі переносного a_e , відносного a_r і коріолісового a_c прискорень, тобто

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

Якщо переносний рух поступальний, то абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі двох прискорень: переносного та відносного. В свою чергу, при відносному обертальному русі прискорення a_r можна розкласти на два прискорення

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r = \vec{a}_e + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^t.$$

Методика побудови планів швидкостей та прискорень для двоповідкових груп полягає у складанні аналогічних векторних рівнянь для кожної ланки та спільному їх графічному розв'язку.

Планом швидкостей (прискорень) механізму називають креслення, на якому зображені у вигляді напрямлених відрізків вектори, які у масштабі визначають модуль та напрям швидкостей (прискорень) різних точок ланок для даного положення механізму. План швидкостей (прискорень) механізму є сукупністю планів швидкостей (прискорень) окремих ланок, що побудовані з одного полюса, спільного для всі ланок. Плани викреслюються у відповідних масштабах, що дозволяє отримати числові значення кінематичних характеристик.

Кінематичний аналіз механізму проводиться у такому порядку:

- спочатку визначаються кінематичні параметри початкової ланки;
- далі виконується кінематичне дослідження окремих структурних груп

Ассура в послідовності їх приєднання до початкової ланки при утворенні механізму. При цьому, кожна ланка механізму розглядається як така, що здійснює плоский рух; необхідно визначити швидкість і прискорення щонайменше двох її точок. Цими точками є центри шарнірів обертальних пар і однойменні точки елементів поступальних кінематичних пар. Як сказано, побудова планів виконується за структурними групами в порядку їх приєднання, починаючи з початкової ланки. У цьому випадку у кожній групі Ассура будуть відомі швидкості та прискорення зовнішніх кінематичних пар,

якими приєднується дана група. Дослідження кожної групи повинно розпочинатись з визначення кінематичних параметрів внутрішньої пари, яка є спільною для ланок, що утворюють цю пару. Потім, за потреби, визначаються кінематичні параметри інших характерних точок групи та кутові швидкості і прискорення ланок.

При кінематичному аналізі механізму спочатку будується план швидкостей, а потім план прискорень.

Плани швидкостей початкової ланки. Зазвичай, початкова ланка механізму здійснює обертальний рух (рис. 2.8, а). Швидкість v_A точки A перпендикулярна до кривошипа OA (напряmlена по дотичній до траєкторії т. A) і спрямована у бік його обертання. Зобразимо швидкість точки A деяким вектором, відкладеним з довільної точки p_v , яку приймаємо за полюс плану швидкостей (рис. 2.8, б). Цей вектор перпендикулярний до прямої OA і напрямлений в бік обертання кривошипа. В кінці вектора поставимо точку a . Довжина відрізка $p_v a$ може бути прийнята довільною. Переважно вона вибирається при визначенні масштабу $\mu_v = \frac{v_A}{p_v a}$, $\frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$, з урахуванням

рекомендацій з вибору масштабів; модуль швидкості т. A визначається за формулою $v_A = \omega l_{OA}$, м/с, для визначення кутової швидкості користуються

формулою $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$, с^{-1} ; де n – частота обертання. Аналогічні міркування

проводять, при потребі, відносно будь-якої іншої точки кривошипа. Звичайно, швидкості та прискорення точок, що належать осі обертання, дорівнюють нулю і, відповідно, на планах вони знаходяться в полюсі (т. O , S).

Отже, вектор $p_v a$ представляє собою план швидкостей початкової ланки для положення, що визначається кутовою координатою ϕ_1 .

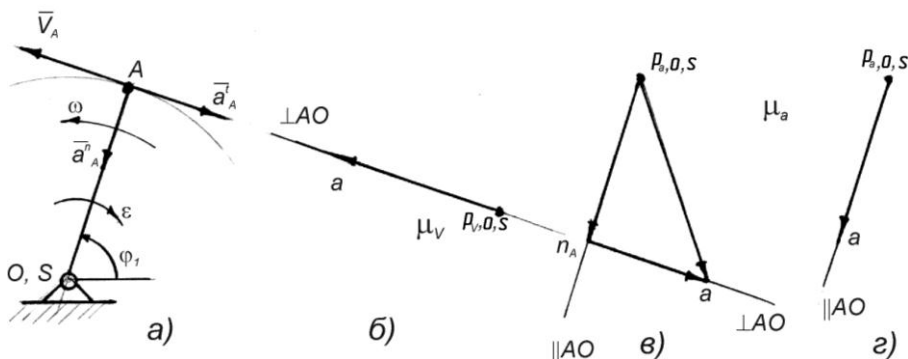


Рис. 2.8

Зазначимо, що зображення точок ланок (для розглядуваного прикладу O, S, A) на плані швидкостей позначаються малими літерами (o, s, a).

Плани прискорень початкової ланки. На рис. 2.8, в, зображений план прискорень початкової ланки. Він побудований за відомими співвідношеннями:

- повне прискорення т. A при обертальному русі ланки дорівнює геометричній сумі нормального і дотичного (тангенціального) прискорень,
 $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^t$;

- модуль нормального прискорення т. A : $a_A^n = \omega_1^2 l_{AO}$;

- модуль дотичного прискорення т. A : $a_A^t = \varepsilon_1 l_{AO}$.

Масштаб плану прискорень визначається за формулою $\mu_a = \frac{a_A^n}{p_a n_A}$,

$\frac{m/c^2}{mm}$, попередньо задавши довжиною відрізка $p_a n_A$, що зображує $\bar{a}_A^n$ нормальне прискорення на плані. Приймавши довільну точку p_a за полюс плану прискорень, відкладемо вектор $\bar{a}_A^n$ у вигляді відрізка $p_a n_A$. При цьому вектор нормального прискорення, яке ще називають доцентровим, направлений по радіусу обертання до центра кривини траєкторії, $\bar{a}_A^n \parallel AO$,

має напрям від точки A до O . Далі визначають $n_A a = \frac{a_A^t}{\mu_a}$ – довжину відрізка,

що зображає $\bar{a}_A^t$ дотичне прискорення на плані прискорень.

Вектор дотичного прискорення напрямлений по дотичній до траєкторії руху (перпендикулярно радіусу обертання) в бік напрямку кутового прискорення ε , $\bar{a}_A^t \perp AO$. Відкладаємо з точки n_A плану відрізок $n_A a$ і отримуємо вектор $\overline{p_A a}$ повного прискорення точки A .

Відзначимо, що переважно в задачах кінематики приймається, що початкова ланка обертається рівномірно ($\omega_1 = const$), тобто $\varepsilon_1 = 0$, а отже $a_A^t = 0$, і $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$. У цьому випадку план прискорень має вигляд, зображений на рис. 2.8, г.

Плани швидкостей та прискорень при складному русі ланки.

Для прикладу розглянемо групу Ассура II класу II порядку першого виду (рис. 2.9). Швидкості точок A і C (якими група приєднується до механізму) відомі. Знайдемо швидкість точки B , яка є спільною для ланок 2 та 3. Для цього рух ланки 2 розкладаємо на переносний поступальний зі швидкістю v_A точки A і відносний обертальний рух навколо цієї точки зі швидкістю v_{BA} . Для ланки 3 аналогічно – на переносний поступальний зі швидкістю v_C т. C і відносний обертальний - навколо точки C зі швидкістю v_{BC} . Скориставшись теоремою про додавання швидкостей точки в її складному русі, запишемо векторні рівняння, що зв'язують швидкості точок B , A та C

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad (2.2)$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{v}_{BC}.$$

Деколи, для наочності, праві частини співвідношень (2.2) прирівнюють

$$\underline{\underline{\bar{v}_a}} + \underline{\underline{\bar{v}_{BA}}} = \underline{\underline{\bar{v}_C}} + \underline{\underline{\bar{v}_{BC}}}. \quad (2.3)$$

Зазначимо, що такі векторні рівняння розв'язуються графічно, якщо вони містять не більше двох невідомих параметрів. Розглядувана група Ассура може бути приєднана лише до початкової ланки та стояка чи до раніше приєднаних (і відповідно розглянутих) груп Ассура, кінематичні параметри яких вже відомі. Отже, параметри переносного руху будуть визначеними. Вектори відносних швидкостей $\bar{v}_{BA}, \bar{v}_{BC}$ в обертальному русі відомі лише за напрямком - перпендикулярні до відповідної ланки (по дотичній до траєкторії руху).

Відзначимо, що при аналізі векторних рівнянь часто прийнято підкреслювати вектор двома рисками, якщо він відомий як за величиною, так і за напрямком, і однією – якщо тільки за величиною або напрямком.

Графічний розв'язок рівняння (2.3) наведено на рис. 2.9, б у вигляді плану швидкостей.

Для його побудови вибираємо довільну точку p_v - полюс плану швидкостей. Від неї відкладаємо вектор відомої швидкості v_A . Отримуємо точку a на плані швидкостей. Далі, згідно з рівнянням (2.3), до вектора швидкості v_A треба додати вектор швидкості v_{BA} . Для цього проводимо через точку a лінію, яка показує напрямок вектора відносної швидкості – перпендикуляр до ланки AB ($v_{BA} \perp AB$). Такі ж міркування можна навести при розгляді правої частини рівняння (2.3).

У розглядуваному прикладі точка C ланки 3 приєднана до стояка, $v_C = 0$. Отже, на плані швидкостей т. C знаходиться у полюсі. До вектора швидкості v_C треба додати вектор швидкості v_{BC} . Для цього проводимо через полюс p_v лінію, яка показує напрямок вектора відносної швидкості – перпендикуляр до ланки BC ($v_{BC} \perp BC$). Точка перетину в цих ліній визначить величину та напрямок швидкості точки B .

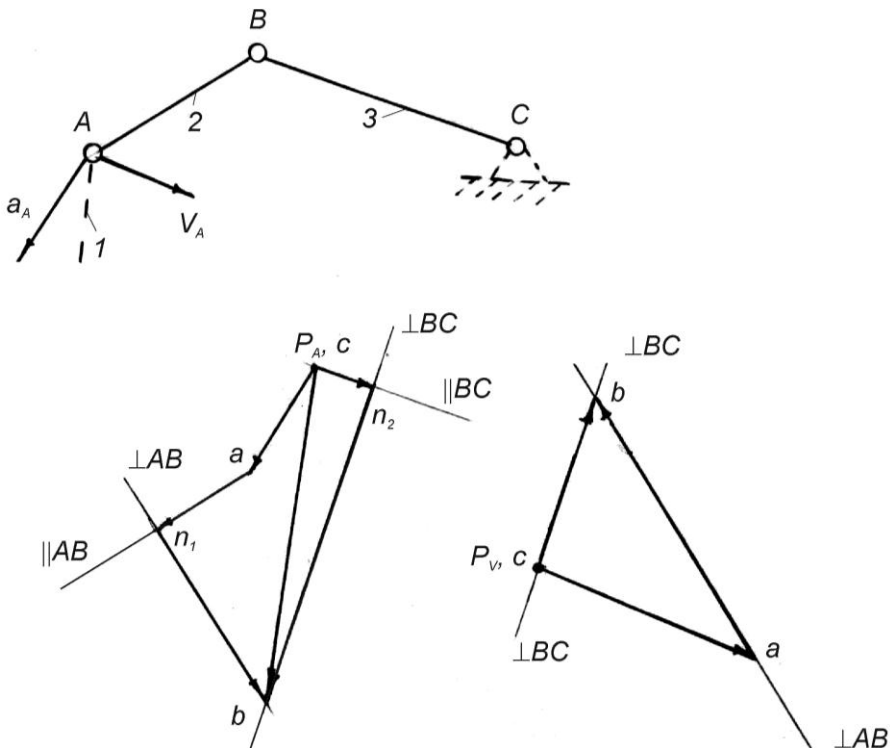


Рис. 2.9

Рівняння, які використовуються при побудові **плану прискорень**, відрізняються лише тим, що невідомі відносні прискорення точки в обертальному русі розкладають на складові

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t, \quad (2.4)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^t.$$

Виконаємо графічне додавання векторів згідно з рівняннями (2.4). З довільної точки p_a полюса плану прискорень відкладаємо в масштабі μ_a вектор відомого прискорення т.А. З кінця цього вектора, точка a , відкладемо вектор $\bar{a}_{BA}^n$ нормального прискорення точки B навколо т.А. Нормальне прискорення напрямлене по лінії AB до центра обертання - точки A . Модуль його порахований після побудови плану швидкостей за формулою $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot l_{AB}$. Довжина відрізка, який зображає $\bar{a}_{BA}^n$ на плані прискорень, дорівнює $an_1 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}$. Через його кінець (точку n_1) проводимо лінію дотичного прискорення a_{BA}^t , направлено перпендикулярно до AB .

Розглянемо друге рівняння. З полюса p_a ($a_c = 0$) відкладемо вектор, який зображає $\bar{a}_{BC}^n$, нормальне прискорення, у вигляді відрізка $p_a n_2 = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a}$ ($\bar{a}_{BC}^n$ $\perp BC$, має напрям від точки B до C). Через його кінець (точку n_2) проведемо лінію-напрямок дотичного прискорення $a_{BC}^t \perp BC$ до перетину з лінією напрямком прискорення a_{BA}^t . Точка перетину в цих ліній визначить величину та напрямок прискорень точки B та величини дотичних прискорень (у масштабі μ_a).

Розглянуті положення використовуються при побудові планів швидкостей і прискорень плоских механізмів. Розглянемо методику побудови планів швидкостей та прискорень механізмів II класу.

Приклад кінематичного дослідження важільного механізму. Шестиланковий важільний механізм зі структурними групами Ассура II класу першого та другого видів (рис. 2.10). Задано план механізму та закон руху початкової ланки ($\omega_1 = const$). Кінематичне дослідження будемо проводити у такій послідовності: спочатку побудуємо плани для початкової ланки 1, потім для групи Ассура II (2, 3), а далі для групи II (4, 5).

Визначимо модуль лінійної швидкості т. A ланки $O_1 A$, при обертанні її навколо т. O_1 , за формулою $v_A = \omega_1 \cdot l_{O_1 A} = \frac{\pi n_1}{30} l_{O_1 A}$, м/с.

З довільно взятої точки p_v полюса плану швидкостей відкладаємо відрізок $p_v a$, перпендикулярний до ланки $O_1 A$ і напрямлений в бік руху кривошипа. Швидкість т.А на плані швидкостей показано відрізком $p_v a$, тобто масштаб плану швидкостей $\mu_v = \frac{v_A}{p_v a}$, $\frac{м/с}{мм}$.

Переходимо до побудови плану швидкостей першої групи Ассура. Швидкості точок A та O_2 , що належать до зовнішніх кінематичних пар цієї групи, відомі ($v_A = v_{A_1} = v_{A_2}$; $v_{O_2} = 0$).

Для визначення швидкості т. B , що одночасно належить ланкам 2 та 3, запишемо два векторні рівняння

$$\underline{\underline{\bar{v}_B}} = \underline{\underline{\bar{v}_A}} + \underline{\underline{\bar{v}_{BA}}},$$

$$\underline{\underline{\bar{v}_B}} = \underline{\underline{\bar{v}_{O_2}}} + \underline{\underline{\bar{v}_{BO_2}}}.$$

Розв'язуємо цю систему рівнянь графічно. Згідно з першим рівнянням, через точку a плану швидкостей проводимо пряму, перпендикулярну до ланки AB (до вектора швидкості $\bar{v}_A$ додаємо вектор швидкості $\bar{v}_{BA}$). Згідно з другим рівнянням, через полюс p_v проводимо пряму, перпендикулярну до ланки BO_2 (до швидкості т. O_2 , яка дорівнює нулю і, отже, знаходиться в полюсі, додаємо вектор швидкості $\bar{v}_{BO_2}$). Точка перетину b цих перпендикулярів є кінцем вектора $p_v b$, що зображує на плані у масштабі μ_v абсолютну швидкість т. B . Величини невідомих швидкостей визначають за формулами

$$v_B = \mu_v \cdot p_v b, \quad v_{BA} = \mu_v \cdot ab,$$

тобто, вимірявши відповідні відрізки на плані швидкостей в mm , множимо їх на масштаб μ_v і одержуємо модулі шуканих швидкостей.

Кутові швидкості ланок 2 та 3 визначаються рівностями

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{BA}}, \quad \omega_3 = \frac{v_B}{l_{BO_2}}.$$

Визначимо швидкості інших точок, що належать до ланок даної групи. Аналогічно до точки B , розглянемо рух точки C по відношенню до точок B та O_2 і запишемо два векторні рівняння

$$\underline{\underline{\bar{v}_C}} = \underline{\underline{\bar{v}_B}} + \underline{\underline{\bar{v}_{CB}}},$$

$$\underline{\underline{\bar{v}_C}} = \underline{\underline{\bar{v}_{O_2}}} + \underline{\underline{\bar{v}_{CO_2}}}.$$

Швидкості точок B та O_2 відомі. Відносні швидкості v_{CB} і v_{CO_2} , як швидкості в обертальному русі, перпендикулярні, відповідно, до ланок BC та

CO_2 . Отже, згідно з першим рівнянням, проведемо через точку b на плані швидкостей лінію, перпендикулярну до ланки BC , а згідно з другим – через точку p_v – лінію, перпендикулярну до ланки CO_2 . На їх перетині дістанемо точку c , яка є кінцем вектора $p_v c$, що зображає на плані швидкостей в масштабі μ_v абсолютну швидкість т.С; $v_C = \mu_v \cdot p_v c$.

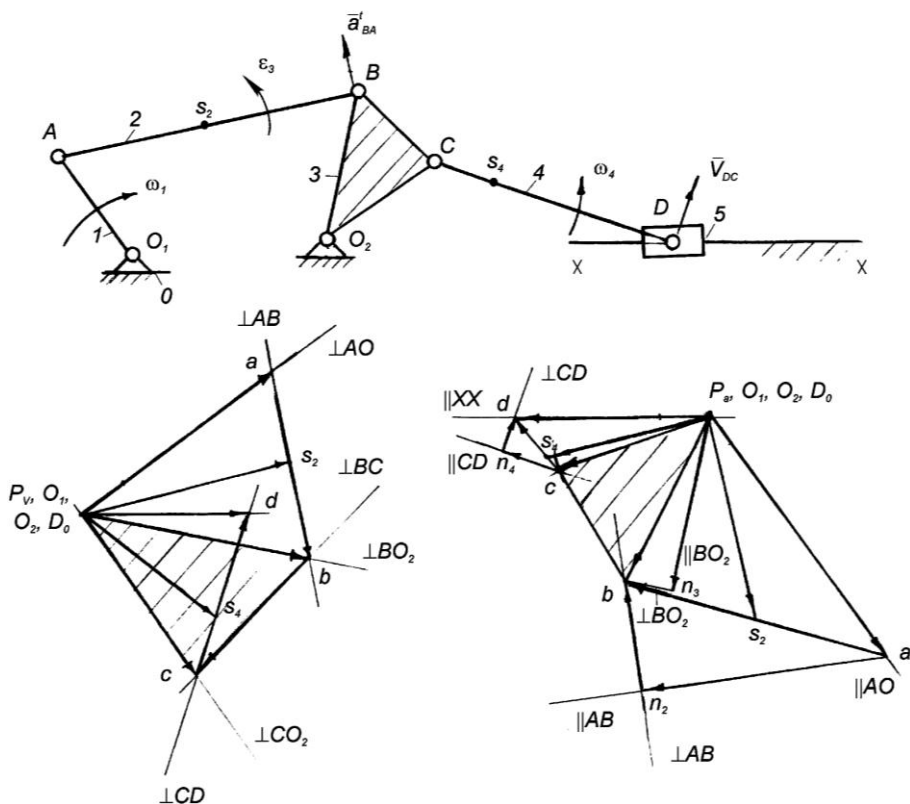


Рис. 2.10

Як випливає з виконаної побудови, трикутник BO_2C на плані механізму, подібний до трикутника $bp_v c$ на плані швидкостей ($bc \perp BC$, $bp_v \perp BO_2$, $cp_v \perp CO_2$). При цьому, трикутники BO_2C та $bp_v c$ повернуті, один відносно одного, на прямий кут в напрямку миттєвого обертання. Цю властивість подібності фігури відносних швидкостей на плані швидкостей (прискорень), до фігури ланки на схемі механізму, називають *теоремою подібності: план відносних швидкостей (прискорень) точок однієї і тієї ж ланки, подібний до відповідної фігури на схемі механізму*.

Відзначимо, що теорема подібності дійсна також при побудові планів прискорень. Вона дає можливість легко визначити швидкості будь-яких точок ланки, якщо відомі швидкості двох інших точок цієї ланки.

Таким чином, швидкість точки C зручніше знаходити за теоремою подібності. Для цього на відрізку $p_v b$, на плані швидкостей будемо трикутник $p_v bc$, подібний до трикутника $O_2 BC$ на плані механізму. Згідно з теоремою подібності можна записати такі пропорції

$$\frac{BC}{bc} = \frac{BO_2}{bp_v} = \frac{CO_2}{cp_v}, \text{ або } \frac{l_{BC}}{bc} = \frac{l_{BO_2}}{bp_v} = \frac{l_{CO_2}}{cp_v},$$

з яких визначаємо довжини відрізків cp_v та bc :

$$cp_v = bp_v \frac{CO_2}{BO_2}, \quad bc = bp_v \frac{BO_2}{BC},$$

де $l_{BC}, l_{BO_2}, l_{CO_2}$ – дійсні розміри ланок, BC, BO_2, CO_2 – розміри ланок на схемі механізму; bc, bp_v, cp_v – відповідні відрізки на плані швидкостей.

Зробивши засічки з точки p_v плану швидкостей радіусом $p_v c$, а з точки b – радіусом bc , знайдемо точку c . Щоб не допустити помилки при визначенні положення точки c на плані швидкостей (засічку можна зробити по обидва боки від лінії $p_v b$), потрібно користуватися правилом обходу: якщо обходити план швидкостей і ланку в одному напрямку, наприклад, за рухом стрілки годинника, починаючи відповідно з точок p_v і O_2 , то порядок літер для них має бути однаковим - $p_v \rightarrow b \rightarrow c$ та $O_2 \rightarrow B \rightarrow C$. Зазначимо, що теорема подібності справедлива лише для незмінної системи твердого тіла, тобто однієї ланки. Одночасно для декількох ланок, групи Ассура чи механізму в цілому вона не дійсна.

Швидкості центрів мас ланок знаходять, користуючись теоремою подібності. Наприклад, якщо задано, що центр мас другої ланки - точка S_2 лежить на середині ланки AB , то на плані швидкостей т. S_2 знаходиться також на середині відрізка ab . З'єднавши на плані точку s_2 з полюсом, знаходимо вектор швидкості $\overline{p_v s_2}$ центра мас шатуна 2. Модуль вектора швидкості визначається за формулою

$$v_{s_2} = \mu_v \cdot p_v s_2.$$

Переходимо до визначення швидкостей точок другої групи Ассура, яка складається з ланок 4 та 5. Знайдемо швидкість центра шарніра D , що

з'єднує ланки 4 та 5 ($v_D = v_{D_4} = v_{D_5}$). Розглядаючи рух т.*D* по відношенню до т.*C*, а потім – до т.*D*₀ (точки, що належить напрямній *xx*, і в даному положенні механізму співпадає з точкою *D* на повзуні), запишемо два векторні рівняння

$$\begin{aligned}\underline{\bar{v}}_D &= \underline{\bar{v}}_C + \underline{\bar{v}}_{DC}, \\ \underline{\bar{v}}_D &= \underline{\bar{v}}_{D_0} + \underline{\bar{v}}_{DD_0}.\end{aligned}$$

Відзначимо, що для таких структурних груп обмежуються першим рівнянням; повзун 5 рухається по нерухомій напрямній і абсолютна швидкість кожної його точки паралельна напрямній, $v_D // xx$. При графічному розв'язку цих рівнянь достатньо через точку *c* плану швидкостей провести пряму, перпендикулярну до ланки *CD* на плані механізму, а через полюс *p_v* – пряму, паралельну до напрямної *xx*. На перетині цих прямих і буде шукана точка *d*.

Швидкість центра мас *S*₄ знаходимо за теоремою подібності, в загальному випадку, із співвідношення

$$\frac{l_{CD}}{l_{CS_4}} = \frac{cd}{cs_4}, \text{ або } \frac{CD}{CS_4} = \frac{cd}{cs_4}, \text{ звідки } cs_4 = cd \frac{l_{CD}}{l_{CS_4}},$$

де l_{CD} , l_{CS_4} – дійсні розміри ланок, *CD*, *CS*₄ – розміри ланок на схемі механізму; *cd*, *cs*₄ – відповідні відрізки на плані швидкостей.

З'єднавши з полюсом знайдену точки *s*₄, отримуємо вектор, який зображає на плані швидкість даної точки.

Підкреслимо, що, маючи план швидкостей механізму, можна визначити абсолютну та відносну швидкості будь-якої з точок механізму: вимірявши відповідний відрізок в *мм* на плані швидкостей, множимо його на масштаб плану μ_v і одержуємо величину відповідної швидкості. Наприклад,

$$v_D = \mu_v \cdot pd, \quad v_{DC} = \mu_v \cdot dc, \quad v_{s_4} = \mu_v \cdot ps_4.$$

Кутову швидкість ланки 4 визначаємо за формулою $\omega_4 = \frac{v_{DC}}{l_{DC}}$.

Напрямки кутових швидкостей ланок знаходимо за допомогою умовного переносу векторів відносних швидкостей на схему механізму. Наприклад, для ланки 4 швидкість $\bar{v}_{DC}$, яка на плані швидкостей зображена вектором $\overline{cd}$, умовно переносимо в точку *D* на схемі механізму. Вектор $\bar{v}_{DC}$ вказує на

умовне обертання ланки 4 навколо точки C проти ходу годинникової стрілки і, отже, ω_4 також напрямлена проти руху стрілки годинника.

Побудова плану прискорень. Послідовність побудови плану прискорень така ж, як для плану швидкостей.

Повне прискорення точки A кривошипа 1 дорівнює геометричній сумі нормального та дотичного прискорень. У розглядуваному прикладі початкова ланка обертається рівномірно ($\omega_1 = \text{const}$, $\varepsilon_1 = 0$, $a_A^t = 0$), тому $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$. Модуль цього прискорення знаходять зі співвідношення $a_A^n = \omega_1^2 l_{O_1A}$

$$\text{або } a_A^n = \frac{v_A^2}{l_{O_1A}}, \quad \text{м/с}^2.$$

З точки p_a відкладемо паралельно до кривошипа O_1A (у напрямку від точки A до точки O_1) відрізок довільної довжини $p_a a$. Тоді масштаб плану

$$\text{прискорень } \mu_a = \frac{a_A}{p_a a}, \quad \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Розглянемо групу Ассура II(2, 3). Для неї відомі прискорення точок A та O_2 . Визначимо прискорення центра шарніра B . Розглядаючи рух т. B по відношенню до т. A , а потім - до т. O_2 , запишемо, відповідно, два векторні рівняння

$$\begin{aligned} \underline{\bar{a}}_B &= \underline{\bar{a}}_A + \underline{\bar{a}}_{BA}^n + \underline{\bar{a}}_{BA}^t, \\ \underline{\bar{a}}_B &= \underline{\bar{a}}_{O_2} + \underline{\bar{a}}_{BO_2}^n + \underline{\bar{a}}_{BO_2}^t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обчислимо величини нормальних складових $a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB}$,

$$a_{BO_2}^n = \omega_3^2 l_{BO_2}, \quad \text{м/с}^2 \text{ та довжини відрізків, які будуть зображати їх на плані,}$$

$$a n_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}, \quad p_a n_3 = \frac{a_{BO_2}^n}{\mu_a}, \quad \text{мм}.$$

Після цього можна векторні рівняння (2.5) розв'язувати графічно. Згідно з першим рівнянням, з точки a плану прискорень відкладаємо відрізок $a n_2$, що напрямлений паралельно до ланки AB у напрямку від т. B до т. A . Через його кінець - т. n_2 проводимо пряму, перпендикулярну до AB (напрямок $\bar{a}_{BA}^t$). Згідно з другим рівнянням, з полюса p_a паралельно до BO_2 , у напрямку від т. B до т. O_2 , відкладаємо відрізок $p_a n_3$. Через т. n_3 проводимо перпендикуляр до BO_2 (напрямок $\bar{a}_{BO_2}^t$). На перетині дотичних складових (перпендикулярів) отримаємо шукану точку b .

Відрізок $p_a b$ зображає, в масштабі μ_a , абсолютне прискорення точки b ; відрізки $n_2 b$ та $n_3 b$ – відповідно, невідомі дотичні складові a_{BA}^t , $a_{BO_2}^t$, а відрізок ab - повне відносне прискорення a_{BA} т.*B* відносно т.*A*.

Прискорення точок S_2 та C знайдемо за теоремою подібності: точку s_2 на плані прискорень розмістимо на середині відрізка ba (у даному прикладі центр мас S_2 знаходиться посередині ланки AB). Відрізок $p_a s_2$ зображає прискорення т. S_2 ; з пропорції $\frac{BO_2}{bp_a} = \frac{BC}{bc} = \frac{CO_2}{cp_a}$ вираховуємо довжини

відрізків bc та cp_a та методом засічок знаходимо точку c на плані прискорень. При цьому має бути збережена схожість фігур BCO_2 на схемі механізму та bcp_a на плані прискорень.

Наступна структурна група утворена ланками 4 та 5. Повзун 5 рухається по нерухомій напрямній. Абсолютне прискорення кожної його точки паралельне цій напрямній. Така умова дозволяє записати одне рівняння для визначення прискорення точки D

$$\underline{\bar{a}}_D = \underline{\bar{a}}_C + \underline{\bar{a}}_{DC}^n + \underline{\bar{a}}_{DC}^t.$$

Визначаємо нормальне прискорення $a_{DC}^n = \omega_4^2 l_{DC}$ та відрізок, що буде зображати його на плані прискорень,

$$cn_4 = \frac{a_{DC}^n}{\mu_a}, \text{ мм.}$$

Виконаємо графічну побудову. З точки c плану прискорень паралельно до ланки CD в напрямку від т. D до т. C відкладемо відрізок cn_4 . Через точку n_4 проводимо перпендикуляр до CD (напрямок вектора $\bar{a}_{DC}^t$). Через полюс p_a проводимо пряму, паралельну до напрямної (напрямок вектора абсолютного прискорення $\bar{a}_D$). Ці лінії перетнуться в шуканій точці d . Згідно

співвідношення $\frac{CD}{cd} = \frac{CS_4}{cs_4}$ на відрізку dc розмістимо точку s_4 . План

прискорень побудований. Величини прискорень точок механізму дорівнюють добутку довжини відповідного відрізка з плану прискорень на масштаб плану. Наприклад:

$$a_D = \mu_a \cdot p_a d, \quad a_{DC}^t = \mu_a \cdot dn_4.$$

Визначимо кутові прискорення ланок

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{l_{BA}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{BO_2}^t}{l_{BO_2}}, \quad \varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^t}{l_{DC}}.$$

Для визначення напрямку кутового прискорення, наприклад, другої ланки ε_2 , уявно переносимо вектор дотичного прискорення a_{BA}^t (на плані прискорень зображений відрізком n_2b) у точку B . Перенесений вектор a_{BA}^t вказує на умовне обертання ланки 2 навколо т.А проти руху годинникової стрілки. Це і буде напрям кутового прискорення ε_2 .

Основні властивості плану швидкостей та прискорень.

- 1) Усі точки механізму, швидкості (прискорення) яких дорівнюють нулю, на плані швидкостей (прискорень) знаходяться в полюсі.
- 2) Усі вектори, що виходять з полюса плану швидкостей (прискорень), є векторами абсолютних швидкостей (прискорень).
- 3) Усі вектори плану, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей (прискорень), є векторами відносних швидкостей (прискорень). Замірявши відповідні відрізки (в мм) на плані швидкостей (прискорень) та помноживши їх на масштаб $\mu_v (\mu_a)$, знаходимо дійсні (за модулем) значення швидкостей (прискорень).
- 4) Для плану швидкостей та прискорень дійсна теорема подібності.

Приклад 2. На рис. 2.11, а показана кінематична схема механізму поперечно-стругального верстата. До його складу входять початкова ланка 1 та дві групи Ассура II класу: група, що складається з ланок 2 та 3 третього виду, та група II(4,5) п'ятого виду.

Необхідно побудувати плани швидкостей і прискорень для положення визначеного кутом φ_1 . Кутова швидкість кривошипа $\omega_1 = \text{const}$.

Знаходимо швидкість т.В, яка належить ланці 1, $v_B = \omega_1 \cdot l_{AB}$, м/с.

Від полюса p_v плану швидкостей відкладаємо відрізок $p_v b \perp AB$, який зображує вектор швидкості v_B (Рис. 2.11, б). При цьому масштаб плану швидкостей дорівнює

$$\mu_v = \frac{v_B}{p_v b}, \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

Переходимо до визначення швидкостей точок ланок першої структурної групи. Відомі швидкості точок B і C , які належать зовнішнім кінематичним парам групи: швидкість т. B_2 , яка належить ланці 2 (повзуну), дорівнює швидкості т. B кривошипа (першої ланки), тобто $v_{B_2} = v_{B_1} = v_B$, $v_C = 0$. Невідома швидкість точки B_3 , яка належить ланці 3, кулісі і в даному положенні механізму, співпадає з т. B , що лежить на кривошипі (повзуні). Для її визначення записуємо систему векторних рівнянь

$$\bar{v}_{B_3} = \bar{v}_B + \bar{v}_{B_3B},$$

$$\bar{v}_{B_3} = \bar{v}_C + \bar{v}_{B_3C}.$$

За першим рівнянням з точки b , кінця вектора $\overline{p_v b}$ (швидкості т.В) проводимо пряму, паралельну до ланки CD (v_{B_3B} є швидкість відносного поступального руху повзуна 2 по напрямній 3; напрямлена вздовж неї). За другим рівнянням з точки c , яка співпадає з полюсом p_v ($v_c = 0$), проводимо пряму, перпендикулярну до BC . На перетині цих прямих одержуємо точку b_3 . Вектор $\overline{p_v b_3}$ зображує швидкість $\bar{v}_{B_3}$ точки B_3 , що належить кулісі.

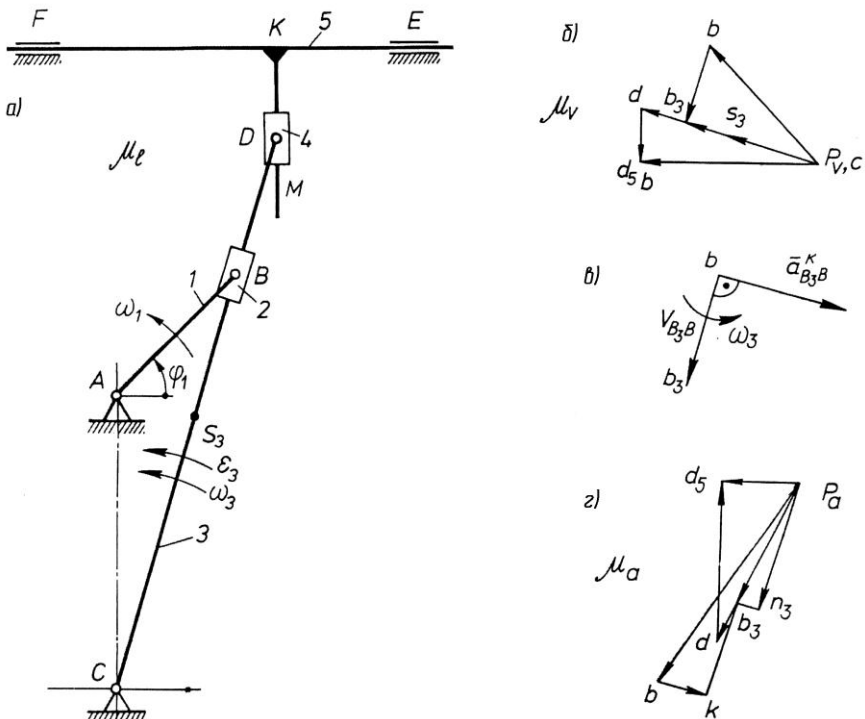


Рис. 2.11

Використовуючи теорему подібності, знаходимо положення точки D на плані швидкостей

$$\frac{cd}{cb_3} = \frac{CD}{CB}; \quad cd = cb_3 \frac{CD}{CB}, \text{ мм.}$$

Відкладаємо відрізок cd на продовженні відрізка cb_3 ($p_v b_3$), знаходимо точку d .

Швидкість т. D_5 , яка належить ланці 5, визначаємо з рівняння

$$\bar{v}_{D5} = \bar{v}_D + \bar{v}_{D5D}.$$

Усі точки ланки 5 рухаються вздовж напрямної EF , тобто абсолютна швидкість т. D_5 паралельна напрямній, $\bar{v}_{D5} // EF$. Таким чином, з полюса p_v проводимо пряму, паралельну до EF , а з точки d – пряму, паралельну до KM . На перетині одержуємо точку d_5 . Сполучаємо її з полюсом p_v .

Положення т. S_3 знаходимо за теоремою подібності з пропорції

$$\frac{cs_3}{cd} = \frac{CS_3}{CD}; \quad cs_3 = cd \frac{CS_3}{CD}.$$

Вимірявши відповідні відрізки в mm , множимо їх на масштаб μ_v і одержуємо величини шуканих швидкостей

$$\begin{aligned} v_{B3} &= \mu_v \cdot p_v b_3; v_D = \mu_v \cdot p_v d; v_{D5} = \\ &= \mu_v \cdot p_v d_5; v_{B3B} = \mu_v \cdot b b_3; v_{D5D} = \mu_v \cdot d d_5. \end{aligned}$$

Кутову швидкість ланки 3 визначимо за формулою $\omega_3 = v_{DC} / l_{DC}$. Напрямок цієї швидкості знаходимо за допомогою вектора швидкості $\bar{v}_{DC}$. Умовно переносимо цей вектор у т. D механізму та спостерігаємо за умовним обертанням ланки 3 відносно точки C проти руху стрілки годинника. Таким чином, ω_3 напрямлена у той же бік.

Побудова плану прискорень. Прискорення т. B , яка належить ланці 1 кривошипу, визначається за формулою

$$a_B = a_{BA}^n = \omega_1^2 l_{AB}, m/c^2.$$

Від полюса p_a (рис. 2.11, з) відкладаємо відрізок $p_a b$ паралельно до ланки AB (у напрямку від т. B до т. A), який зображує прискорення $\bar{a}_B$

($\bar{a}_B = \bar{a}_{B_1} = \bar{a}_{B_2}$). Масштаб плану прискорень при цьому $\mu_a = \frac{a_B}{p_a b}, \frac{m/c^2}{mm}$.

Визначаємо прискорення т. B_3 , що належить ланці 3,

$$\bar{a}_{B_3} = \bar{a}_B + \bar{a}_{B_3B}^K + \bar{a}_{B_3B}^r,$$

$$\bar{a}_{B_3} = \bar{a}_C + \bar{a}_{B_3C}^n + \bar{a}_{B_3C}^t.$$

У першому рівнянні $\bar{a}_{B_3B}^K$, - коріолісове прискорення, яке з'явилося у результаті складання відносного поступального руху повзуна 2 по напрямній 3 зі швидкістю $\bar{v}_{B_3B}$ та переносного обертального руху цієї напрямної зі швидкістю ω_3 . Модуль цього прискорення визначається за формулою

$$a_{B_3B}^K = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_{B_3B}.$$

Щоб знайти напрямок вектора $\bar{a}_{B_3B}^K$, необхідно повернути вектор відносної швидкості $\bar{v}_{B_3B}$ на кут 90° в напрямку переносної кутової швидкості ω_3 (рис. 2.11, в). Прискорення $\bar{a}_{B_3B}^r$ є прискоренням відносного поступального руху повзуна 2 по напрямній 3 і напрямлене вздовж ланки CD . Величина (модуль) його невідома. Нормальне прискорення $a_{B_3C}^n$ визначається за формулою $a_{B_3C}^n = \omega_3^2 l_{BC}$, воно напрямлене від точки B до точки C паралельно до ланки CB . Дотичне прискорення $\bar{a}_{B_3C}^t$ напрямлене перпендикулярно до ланки BC . Визначаємо відрізки bk і $p_a n_3$, які зображують прискорення $\bar{a}_{B_3B}^K$ і $\bar{a}_{B_3C}^n$ на плані

$$bk = \frac{a_{B_3B}^K}{\mu_a}; \quad p_a n_3 = \frac{a_{B_3C}^n}{\mu_a}.$$

Відкладаємо від точки b плану прискорень відрізок bk , а від полюса p_a відрізок $p_a n_3$. З точки k проводимо лінію, паралельну до BC , а з точки n_3 - лінію, перпендикулярну BC до їх перетину між собою. Точку перетину b_3 з'єднуємо з полюсом і одержуємо відрізок $p_a b_3$, який зображує прискорення $\bar{a}_{B_3}$ точки B_3 . Для визначення положення точки D на плані прискорень складаємо рівняння, використовуючи теорему подібності,

$$\frac{cd}{cb_3} = \frac{CD}{CB}, \text{ звідки } cd = cb_3 \frac{CD}{CB}.$$

Щоб знайти прискорення точки D_5 , яка належить ланці 5, записуємо векторне рівняння

$$\bar{a}_{D_5} = \bar{a}_D + \bar{a}_{D_5D}^r,$$

$$\bar{a}_{D_5} \parallel EF.$$

Прискорення $\bar{a}_{D_5}$ напрямлене вздовж напрямної EF , а відносно (релятивне) прискорення $\bar{a}_{D_5D}^r$ - вздовж KM . З полюса p_a проводимо лінію, паралельну до EF , а з точки d – лінію, паралельну до KM . На перетині цих ліній одержуємо точку d_5 . Величини знайдених прискорень дорівнюють

$$a_{B_3} = \mu_a \cdot p_a b_3; \quad a_{D_5} = \mu_a \cdot p_a d_5; \quad a_B = \mu_a \cdot p_a b;$$

$$a_{B_3C}^r = \mu_a \cdot n_3 b_3; \quad a_{s3} = \mu_a \cdot p_a s_3.$$

Модуль кутового прискорення ε_3 ланки 3 знайдемо за формулою

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{B_3C}^t}{l_{BC}}.$$

Напрямок ε_3 знаходимо з допомогою дотичного прискорення $\bar{a}_{B_3C}^t$.

Переносимо вектор $b_3 n_3$, що зображає $\bar{a}_{B_3C}^t$ на плані, у точку B механізму і бачимо, що він вказує на умовне обертання ланки 3 навколо точки C проти руху стрілки годинника.

2.6. Кінематичне дослідження механізмів аналітичними методами

Широке розповсюдження ЕОМ з різноманітним програмним забезпеченням сприяє все більшому застосуванню аналітичних методів кінематичного дослідження. З великої кількості праць з аналітичного розв'язку задач кінематики, якщо розглядати лише загальні методи, які можна застосувати для будь-яких механізмів, виділяють два їх різновиди: *метод замкнених векторних контурів*, розроблений В.А. Зінов'євим, та *метод перетворення координат (матричний метод)*, запропонований Ю.Ф. Морошкіним.

Аналітичне розв'язування задач кінематики просторових механізмів рекомендують виконувати *методом перетворення координат*. Застосування цього методу дає змогу визначати кінематичні параметри звичайними алгебричними методами із застосуванням матриць. Перевага матричної форми запису полягає, головним чином, у застосуванні формул множення матриць.

Аналітичне дослідження плоских механізмів зручніше виконувати методом замкнених векторних контурів.

Метод замкнених векторних контурів. Метод полягає у тому, що кінематичні параметри визначаються у вигляді аналітичних залежностей, що одержують, якщо представити схему механізму замкненими векторними контурами, утвореними ланками цього механізму. Вихідними даними є структурна схема механізму, розміри ланок та залежності узагальнених координат механізму від часу. Якщо останні не задано, то рівняння записують як функції узагальнених координат, тобто визначають кінематичні передатні функції.

Суть методу замкнених векторних контурів полягає у такому:

- ланки механізму зображають у вигляді векторів, які утворюють на схемі механізму один або декілька замкнених векторних контурів (відповідно до кількості груп Ассура);
- складають векторні рівняння замкненості кожного контуру;
- вибирають прямокутну систему координат та проєктують рівняння замкнутості контурів на осі вибраної системи координат.

У результаті отримують аналітичні залежності положення ланок від узагальнених координат механізму та його розмірів, тобто функцію положень ланок механізму;

- диференціюють двічі за часом рівняння замкненості контурів у проєкціях на осі x , y та отримують, відповідно, систему рівнянь для визначення швидкостей та прискорень ланок механізму. Якщо диференціюють по узагальненій координаті – отримують, відповідно, рівняння для визначення аналогів швидкостей та прискорень.
- визначають координати, проєкції швидкостей та прискорень характерних точок механізму. Визначають модулі швидкостей та прискорень цих точок.

Деякі рекомендації щодо застосування методу замкнених векторних контурів:

- напрямки векторів слід вибирати так, щоб вони вказували послідовність побудови схеми механізму. Спочатку у вигляді вектора зображають початкову ланку механізму. Початок цього вектора – нерухома точка (центр шарніра). Вектори, що зображають ланки в групах Ассура, рекомендують напрямляти до внутрішньої кінематичної пари. Напрямок векторів на нерухомій ланці вибирають довільно;
- записуючи умови замкненості векторних контурів, треба враховувати знаки векторів. Для цього користуються правилом обходу: обходячи кожний векторний контур схеми у довільно вибраному напрямі, векторам, напрям яких збігається з напрямом обходу, присвоюють знак плюс і, навпаки, для векторів, що мають напрям проти напрямку обходу, присвоюють знак мінус;
- прямокутну систему координат зв'язують зі стояком. За початок відліку можна прийняти центр шарніру, що з'єднує початкову ланку зі стояком.

Якщо у механізмі є нерухома напрямна для повзуна, то одну з осей координат доцільно проводити паралельно до цієї напрямної.

Зазначимо, якщо механізм утворює декілька замкнених векторних контурів, то послідовність їх розгляду визначається послідовністю приєднання.

Методику одержання розрахункових залежностей розглянемо на прикладі кривошипно-повзунного механізму двоступінчастого двоциліндрового повітряного компресора, структурна схема якого зображена на рис. 2.12, *а*. Задані розміри всіх ланок та частота обертання n_1 кривошипа 1. Необхідно визначити усі кінематичні параметри ланок та їх характерних точок (центрів мас) S_2, S_4 .

Представимо схему механізму у вигляді двох замкнутих векторних контурів: $OABO$ та $OCDO$ (рис. 2.12, *б*). У кожен контур входить структурна група Ассура другого класу: $\Pi(2, 3)$ та $\Pi(4, 5)$. Ланки механізму зобразимо у вигляді векторів $\overset{1}{l}_1, \overset{1}{l}_1', \overset{1}{l}_2, \overset{1}{l}_4$, положення повзунів 3, 5 визначатиметься векторами $\overset{1}{l}_3, \overset{1}{l}_5$.

Складемо векторні рівняння замкнутості кожного контура

$$\overset{1}{l}_1 + \overset{1}{l}_2 = \overset{1}{l}_3, \quad (2.6)$$

$$\overset{1}{l}_1' + \overset{1}{l}_4 = \overset{1}{l}_5. \quad (2.7)$$

Рівняння (2.6), (2.7) спроекуємо на осі вибраної прямокутної системи координат xOy (за початок відліку якої прийнято центр шарніра O , а вісь Oy направлено вздовж напрямної повзунів) та запишемо рівняння проєкцій.

$$\left. \begin{aligned} l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= 0; \\ l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= l_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} l_1 \sin(\varphi_1 + \pi) + l_4 \sin \varphi_4 &= 0; \\ l_1 \cos(\varphi_1 + \pi) + l_4 \cos \varphi_4 &= l_5 \end{aligned} \right\}, \quad (2.9)$$

де l_1, l_2, l_4 – відповідно довжини ланок 1, 2, 4; l_3, l_5 – відповідно відстані між центром шарніра O та центрами шарнірів B, D повзунів; φ_1 - узагальнена координата механізму (кут повороту кривошипа); φ_2, φ_4 – відповідно кути повороту ланок 2, 4.

Відлік кутів φ_1 , які визначають положення ланок, проводимо від додатного напрямку осі Oy за рухом годинникової стрілки (в напрямку

обертання кривошипа). Отже, для визначення величини та напрямку кута повертаємо вісь Oy за годинниковою стрілкою доти, доки стрілка осі Oy не зійдеться зі стрілкою вектора. Це й буде позитивним напрямом кута.

Розв'язуючи системи (2.8), (2.9) відносно невідомих φ_2 , l_3 та φ_4 , l_5 , отримаємо аналітичні залежності положень ланок 2, 3, 4, 5 від узагальненої координати, тобто функції положень ланок. Так для першого контура, з першого рівняння системи (2.8) одержимо:

$$\varphi_2 = \arcsin\left(-\frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_2}\right), \quad (2.10)$$

а з другого рівняння (2.8) врахувавши (2.10), отримаємо

$$l_3 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \left[\arcsin\left(-\frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_2}\right) \right].$$

Для другого контура всі викладки аналогічні.

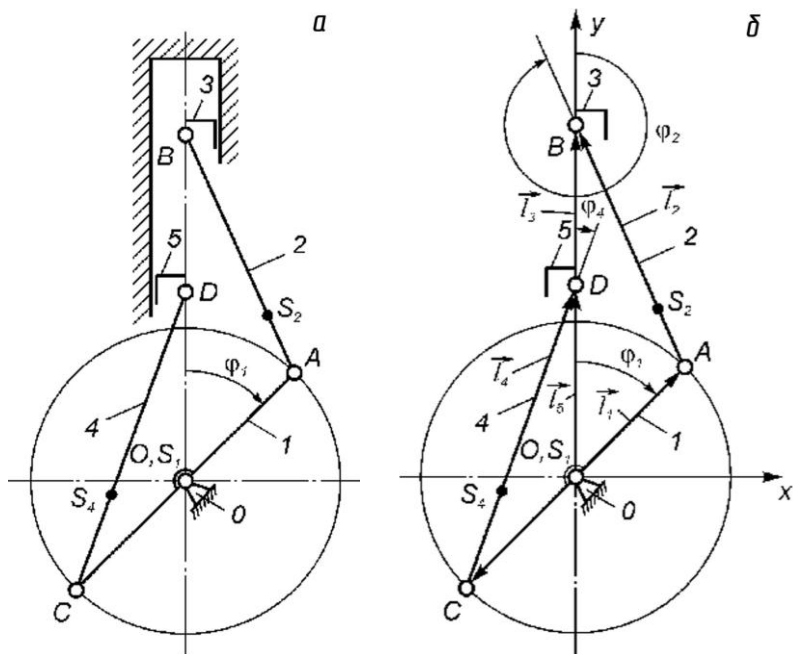


Рис. 2.12

Диференціюючи систему (2.8) за часом,

$$l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 + l_2 \omega_2 \cos \varphi_2 = 0, \quad (2.11)$$

$$-l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - l_2 \omega_2 \sin \varphi_2 = v_3, \quad (2.12)$$

з (2.11) отримаємо вираз для кутової швидкості шатуна 2, а з (2.12) – лінійної швидкості повзуна 3

$$\omega_2 = -\frac{l_1 \omega_1 \cos \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2},$$

$$v_3 = -l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 + l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2.$$

У випадку, коли закон руху початкової ланки невідомий, визначають аналоги швидкостей та прискорень, продиференціювавши системи (2.8) і (2.9) за узагальненою координатою.

Для визначення прискорень двічі диференціюємо за часом систему (2.8), що приводить до рівнянь

$$-l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 - l_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2 + l_2 \varepsilon_2 \cos \varphi_2 = 0, \quad (2.13)$$

$$l_1 \omega_1^2 \cos \varphi_1 - l_2 \omega_2^2 \cos \varphi_2 - l_2 \varepsilon_2 \sin \varphi_2 = a_3. \quad (2.14)$$

З (2.13) визначаємо кутове прискорення шатуна 2

$$\varepsilon_2 = \frac{l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 + l_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2}.$$

Підставивши значення ε_2 в рівняння (2.14), можна визначити лінійне прискорення повзуна 3.

Координати будь-якої характерної точки механізму, її швидкість та прискорення визначають, використовуючи рівняння проєкцій даної точки на осі координат. Наприклад, для т. S_2 будемо мати

$$x_{S_2} = l_1 \sin \varphi_1 + l_{AS_2} \sin \varphi_2,$$

$$y_{S_2} = l_1 \cos \varphi_1 + l_{AS_2} \cos \varphi_2.$$

Модулі швидкостей та прискорень цієї точки знаходяться за відомими формулами

$$v_{s2} = \sqrt{\dot{x}_{s2}^2 + \dot{y}_{s2}^2}, \quad a_{s2} = \sqrt{\ddot{x}_{s2}^2 + \ddot{y}_{s2}^2}.$$

Наведені результати аналітичного дослідження зручні для програмування та реалізації на ЕОМ. Для складніших механізмів II класу з багатьма групами Ассур метод замкнутих векторних контурів може призвести до громіздких математичних виразів. Реалізація відповідних алгоритмів на ЕОМ призводить до складних програм. З метою спрощення методики дослідження механізмів II класу рекомендується *погруповий метод кінематичного дослідження*. Враховуючи, що будь-який механізм отримується послідовним приєднанням до початкового механізму обмеженої кількості груп Ассур, доцільно аналітичне дослідження механізмів виконувати за структурними групами. При цьому рух ланок для кожної групи розглядається окремо, з урахуванням кінематичних характеристик її зовнішніх кінематичних пар, якими вона приєднується до механізму. Створені уніфіковані блоки (підпрограми) для початкових механізмів та груп Ассур. Такий метод зводить дослідження механізмів до розгляду окремих структурних груп, методика кінематичного дослідження яких не залежить від механізму, у який вони входять.

Для кінематичного дослідження механізмів високих класів рекомендують метод замкнутих векторних контурів.

Питання для самоконтролю

1. Що вивчає кінематика? Основні задачі кінематики кінематичного дослідження механізмів.
2. Основні задачі методи кінематичного дослідження механізмів.
3. Послідовність побудови планів положень механізму. Визначення масштабу побудови та початкових положень основних важільних механізмів.
4. Що таке шатунні криві та кут робочого ходу? Сутність методу засічок та методу обернення рухів при побудові планів положень механізму.
5. Визначення функцій положень механізму. Побудова діаграми переміщення.
6. Перша та друга передатні функції механізму. Передатне відношення.
7. Формули зв'язку між передатними функціями механізму та його кінематичними характеристиками.
8. Переваги аналітичних методів кінематичного дослідження. Сутність методу замкнених векторних контурів.
9. Послідовність графічного диференціювання та інтегрування.
10. Масштаби при графічному диференціюванні та інтегруванні. Зв'язок між кінематичними діаграмами.
11. Дослідження механізмів методом кінематичних діаграм.
12. Послідовність кінематичного дослідження методом планів швидкостей та прискорень.
13. Теорема подібності для планів швидкостей та прискорень.
14. Основні властивості плану швидкостей та прискорень.
15. Як визначити величину та напрямку кутових швидкостей та прискорень?

ГЛАВА 3. ДИНАМІЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ

3.1. Вступ в динаміку машин

У кінематиці дослідження руху ведеться тільки з врахуванням будови механізмів та геометричних співвідношень між розмірами ланок. Передбачається, що рух вхідних ланок відомий. Рух вихідних ланок вивчається залежно від заданого руху вхідних ланок. За цих умов сили, які діють на ланки механізму, не враховуються.

Динаміка вивчає дійсний рух механізмів з урахуванням усіх факторів, що на нього впливають. Лише динамічний аналіз може виявити дійсну картину взаємодії ланок механізму і закони їх руху.

Динамікою називається розділ механіки, у якому вивчається рух матеріальних тіл під дією сил. Розрізняють дві основні задачі динаміки:

- визначення сил, які діють на ланки механізмів за заданим законом руху, та встановлення способів зменшення динамічних навантажень, що виникають при русі механізмів;
- визначення дійсного закону руху механізмів під дією прикладених до нього сил та встановлення способів забезпечення заданих режимів руху механізму.

Перша задача має назву силового аналізу механізмів, а друга – динаміки механізмів.

У динаміку входять і низка інших задач, що мають важливе технічне значення: визначення потужності двигуна, яка необхідна для відтворення заданого закону руху; тертя у кінематичних парах; механічний коефіцієнт корисної дії механізмів; коливання у механізмах; зрівноваження та віброзахист машин і т. ін.

Крім цього у динаміці можна виділити два класи задач – аналіз механізмів і машин та синтез механізмів і машин за заданими динамічними умовами.

3.2. Сили, що діють на ланки механізмів та машин

Сили (моменти), прикладені до ланок, можна поділити на дві групи: задані сили та реакції зв'язків. До заданих сил належать: рушійні; сили опору; сили тяжіння ланок та сили пружності.

1. Рушійні сили. Створюються двигунами, які здійснюють перетворення якогось виду енергії (теплової, електричної, гідравлічної) у механічну роботу. Вони здійснюють додатну роботу за час своєї дії або за один цикл. Рушійні сили збільшують кінетичну енергію машини і прикладені до ланок механізму, що називаються ведучими; з напрямом швидкості точок прикладання утворюють гострі кути, зокрема ці кути можуть дорівнювати і

нулю.

2. *Сили опору*. Здійснюють від'ємну роботу за час своєї дії, або за один цикл. Вони діляться на сили виробничого (корисного, технологічного) опору та сили шкідливого опору - опір середовища (повітря, чи якогось іншого газу, рідини), в якому рухаються ланки механізму. Сили опору середовища переважно малі порівняно з іншими силами і в задачах курсу ТММ не враховуються. Особливе місце посідає шкідливий опір у кінематичних парах – тертя. Сили тертя – це дотичні складові реакції зв'язків у кінематичних парах машин. Тому доцільно сили тертя умовно перенести до категорії заданих, а під реакціями зв'язків розуміти ті складові реакції, які не виконують роботу. Часто при вивченні динаміки машин силами тертя в кінематичних парах нехтують, розглядаючи механізми як системи з ідеальними в'язями. Тертя в механізмах розглядатимемо окремо.

Сили корисного опору з'являються при виконанні технологічних процесів. Це сили, для подолання яких створено машину. Сили опору напрямлені проти переміщення точок їх прикладання – з напрямом швидкості точок прикладання утворюють тупі кути, або, зокрема, кути, що дорівнюють 180° ; сили опору зменшують кінетичну енергію машини.

3. *Сили тяжіння* (ваги) окремих ланок та сили пружності пружин. На деяких ділянках руху механізму ці сили можуть здійснювати як додатну, так і від'ємну роботу (у випадку сил тяжіння залежно від того, чи піднімається, або опускається центр ваги ланки). Але за повний кінематичний цикл робота даних сил дорівнює нулю, оскільки точки їх прикладання рухаються циклічно. Сили тяжіння ланок завжди напрямлені вертикально вниз (до центра тяжіння землі); модуль цих сил обчислюється за відомою формулою $G = mg$, де g – прискорення вільного падіння. Врахування цих сил не викликає труднощів. Сили пружності пружин визначаються за їх характеристиками чи за коефіцієнтами жорсткості.

4. *Сили взаємодії між ланками механізму*, тобто сили, що діють у кінематичних парах. Ці сили являють собою реакції на дію активних сил. Згідно третього закону Ньютона реакції завжди взаємообернені. Їх нормальні складові роботи не виконують, в той час як дотичні складові тобто сили тертя здійснюють від'ємну роботу.

Сили перших трьох груп відносяться до категорії активних, вони переважно відомі. Ці сили прикладені до механізму ззовні, а тому є зовнішніми. Сили четвертої групи реакції, якщо розглядати механізм в цілому, є внутрішніми силами. Реакції наперед невідомі. Вони залежать від активних сил та від прискорень ланок механізму.

Найбільший вплив на закон руху механізму чинять рушійні сили та сили корисного опору. Їх величина та характер дії визначається робочим процесом машини чи приладу, в яких використаний даний механізм. Ці сили

можуть бути постійними, але в більшості випадків вони є функціями кінематичних параметрів – переміщення, швидкості або часу. Рушійні сили та сили опору звичайно визначають експериментальним шляхом за допомогою відповідних приладів (індикаторів, динамометрів, різних давачів і т.п.) для ряду положень механізму за цикл його роботи. Вивчення робочих процесів та їх характеристик є задачею відповідних спеціальних наукових дисциплін та виходить за рамки курсу ТММ, а тому при розв’язуванні задач дані сили вважають відомими і заданими у вигляді так званих механічних характеристик.

Механічною характеристикою машини називають функціональну залежність силового параметру від часу чи його кінематичного параметру, представлену графічно, масивом чисел або аналітично.

Розглянемо механічні характеристики деяких машин, двигунів та технологічних машин.

Характеристики сил, що залежать від швидкості. На рис. 3.1, а, б, показані механічні характеристики для електродвигунів постійного струму з паралельним і послідовним збудженнями. Зазначимо, що характеристики двигунів прийнято визначати для усталених, стаціонарних режимів роботи, тому характеристики часто називають статичними. Отже, залежність обертового моменту M від швидкості визначається за умови $d\phi/dt = \text{const}$.

Поширеним типом двигунів змінного струму є асинхронні двигуни. Серед них найбільше поширення в електроприводах робочих машин мають асинхронні двигуни з короткозамкнутим ротором. Вони дешевші, крім того, обслуговування двигуна з цим ротором простіше. При дослідженні як усталених так і перехідних режимів близьких до усталених у електромеханічних системах з асинхронним двигуном, на відміну від систем з двигунами постійного струму, можна нехтувати електромагнітними перехідними процесами і користуватися статичною характеристикою двигуна. Аналітично вона може бути описана залежністю

$$M = \frac{2M_{\max}}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}},$$

де s , s_k – відповідно біжуче та критичне ковзання двигуна;

$$s = \frac{\omega_c - \omega}{\omega_c}, \quad s_k = \frac{\omega_c - \omega_k}{\omega_c}.$$

На рис. 3.2, а зображена механічна характеристика асинхронного

електродвигуна трифазного струму з короткозамкнутим ротором – залежність крутного моменту від кутової швидкості ротора. Точка O діаграми визначає початковий пусковий момент M_o двигуна при нульовій кутовій швидкості ротора. Точка a – визначає максимальний перехідний момент $M_{\max}$ та мінімальну допустиму кутову швидкість. При деякому значенні кутової швидкості ω , що відповідає номінальному моменту M_n двигуна і номінальній швидкості ω_n , двигун розвиває максимальну потужність. Кутова швидкість, при якій $M_o = 0$, називається синхронною ω_c ; з цією швидкістю ротор обертається при марноході. Робочою частиною характеристики є ділянка ab .

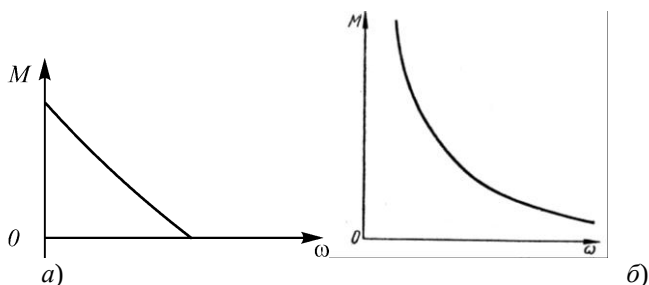


Рис. 3.1

Ця частина характеристики є стійкою, оскільки на цій ділянці двигун має здатність до саморегулювання: при збільшенні навантаження швидкість двигуна зменшується, а електромагнітний обертовий момент зростає, і навпаки. Стійка ділянка характеристики з достатньою точністю може бути апроксимована лінійною залежністю

$$M = a - b\omega,$$

$$\text{де } a = M_n \frac{\omega_c}{\omega_c - \omega_n}, \quad b = \frac{M_n}{\omega_c - \omega_n}.$$

Зазначимо, що лінеаризація нелінійної функції зводиться до розкладу її в ряд Тейлора та збереження в цьому розкладі перших двох доданків. Геометрично лінеаризація інтерпретується як заміна ділянки кривої в околі точки ділянкою дотичної, яка проходить через цю точку. Так, статична робоча характеристика електродвигуна може бути подана у вигляді

$$M = M_n - k(\varphi - \omega_n),$$

де φ – кутова швидкість ротора двигуна; ω_n – номінальна кутова швидкість,

яка відповідає моменту M_n ; k – коефіцієнт пропорційності, який дорівнює тангенсу кута нахилу робочої характеристики у точці ω_n , M_n (для електродвигунів усіх типів $k > 0$.)

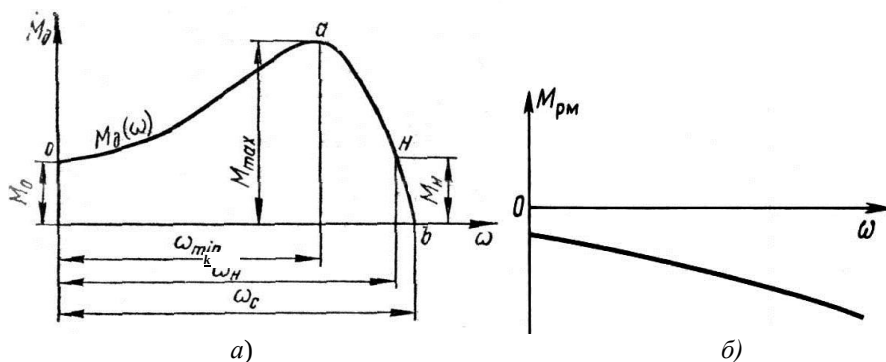


Рис. 3.2

Від швидкості залежать сили та моменти, що діють у таких робочих машинах як електрогенератори, вентилятори, відцентрові помпи і т.ін. (рис. 3.2, б). Відмітимо, що при зображенні механічних характеристик додержуються наступного правила знаків: силу і момент враховують додатними, якщо на розглядуваній ділянці шляху (лінійній чи кутовій) вони виконують додатну роботу.

Характеристики сил, що залежать від переміщення. На рис. 3.3 показана схема механізму двотактного двигуна внутрішнього згоряння (ДВЗ) та його механічна характеристика – залежність сили тиску газів F_θ на поршень від його переміщення. Зазначимо, що для ДВЗ механічна характеристика частіше представляє собою залежність тиску газів у циліндрі від переміщення поршня і називається індикаторною діаграмою. Якщо подача палива в ДВЗ не змінюється, то при наступних обертах початкової ланки 1 механічна характеристика повторює свою форму.

Робота сили F_θ графічно зображується площею, що обмежена кривою $F_\theta(S_\theta)$. У розглядуваному випадку додатна площа більша, ніж від’ємна. Таким чином робота сили F_θ за повний цикл буде додатною. Отже, сила F_θ є рушійною, хоча вона міняє знак.

Сили, що залежать тільки від переміщення, діють у багатьох інших машинах та приладах: поршневих помпах та компресорах, стругальних, фрезерних, довбальних верстатах і т.п.

На рис. 3.4, *а* подається механічна характеристика стругального верстата у вигляді прямої, що виражає залежність сили різання P , прикладеної до різця, від переміщення різця S .

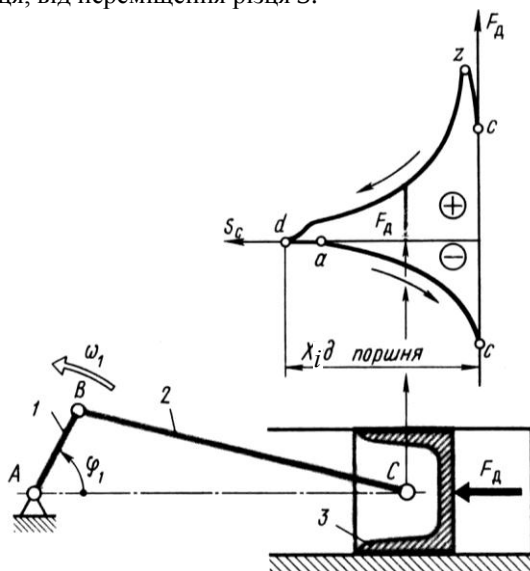


Рис. 3.3

У ряді машин дія активних сил робочого процесу на робочі органи машини є короткочасна і здійснюється лише на малій ділянці траєкторії робочого органу. Це має місце, наприклад, у ковальських пресах, відбійних молотках, машинах для забивання паль і т. ін. Робочі процеси такого роду називають ударними або імпульсними. Типова характеристика ударного процесу показана на рис. 3.4, *б*.

Отже, маючи механічну характеристику машини, можна безпосередньо отримати величину сили чи моменту в конкретних положеннях механізму, або при різних швидкостях чи в заданий момент часу.

Наведені механічні характеристики машин-двигунів та робочих машин є типовими.

3.3. Загальна методика силового розрахунку

Силовий аналіз механізмів ґрунтується на розв'язанні першої задачі динаміки – за заданим законом руху визначити діючі сили. Визначення реакцій, а також – у низці задач – сил та моментів, що прикладені до механізму ззовні, складає зміст його силового розрахунку.

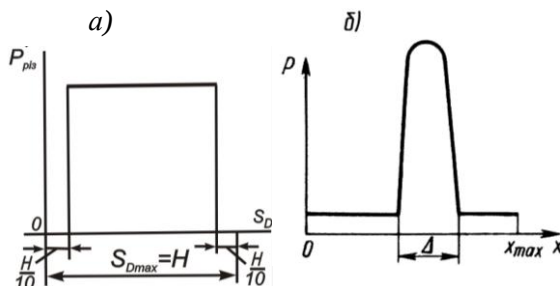


Рис. 3.4

Під час руху механізму в кінематичних парах діють сили, що є силами взаємодії між ланками. Сили взаємодії ланок, що виникають в місцях їх дотику, називають *реакціями* в кінематичних парах. Навантаженість кінематичних пар реакціями є важливою динамічною характеристикою механізму. Знання сил в кінематичних парах має велике практичне значення для розрахунків ланок механізму на міцність, жорсткість, віб्रोустійкість, стійкість проти спрацювання, для розрахунку вальниць на довговічність та для проведення інших подібних розрахунків, що виконуються при проектуванні механізмів. Таким чином силовий розрахунок включає, перш за все, визначення реакцій у кінематичних парах. Зовнішні сили, що прикладені до ланок механізму, як правило, задані. Визначенню підлягає лише зовнішня зрівноважувальна сила (зрівноважувальний момент), що прикладена до вхідної ланки, при якій забезпечується прийнятий закон її руху.

Силовий розрахунок механізмів може бути виконаний різними методами. В ТММ досить широке застосування отримав *метод силового розрахунку механізмів на основі звичайних рівнянь рівноваги твердих тіл*. Суть методу зводиться до застосування рівнянь рівноваги у формі Д'Аламбера. Для цього силу інерції, яка є протидією тіла, що прискорюється, та яка прикладена до тіла, що надає це прискорення, умовно переносять на тіло, що прискорюється. Перенесена сила зрівноважується з усіма зовнішніми силами, в тому числі і з реакціями, що діють на це тіло.

Стосовно механізмів суть методу може бути сформульована так: *якщо до всіх зовнішніх сил, що діють на ланку (групу Ассура, механізм) додати*

сили інерції (моменти), то під дією усіх цих сил ланку (групу Ассура, механізм) можна розглядати як таку, що умовно перебуває в рівновазі. Цей метод дозволяє записати рівняння руху у формі рівнянь рівноваги, тим самим задачу динаміки розв'язати методами статки.

Таким чином, при застосуванні принципу Д'Аламбера до розрахунку механізмів, крім зовнішніх сил, вводяться в розрахунок сили інерції, які виникають при русі ланок і діють як додаткові (фіктивні) сили.

Нагадаємо, під силою інерції розуміють кінетичну реакцію тіла на прискорення, яке надається йому ззовні. Сили інерції – це сили, обумовлені масою та рухом тіла з прискоренням. Сили інерції тіла (ланки) являють собою результат сумарної дії елементарних сил інерції кожної точкової маси тіла. Для зручності розрахунків незлічену систему елементарних сил інерції, що відповідають точковим масам, замінюють рівнодійними силами та парами. В загальному випадку, якщо тіло (ланка) здійснює плоскопаралельний рух, частіше за все елементарні сили інерції зводяться до одного головного вектора сил інерції (скорочено сили інерції), прикладеного в центрі мас тіла, та головного момента сил інерції (скорочено момента сил інерції) $\bar{M}_\phi = -I_s \bar{\varepsilon}$, де m – маса тіла; a_s – прискорення центра мас тіла; ε – кутове прискорення тіла; I_s – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас, перпендикулярно площині його руху. Головний вектор сил інерції $\bar{\Phi}$ спрямований протилежно вектору прискорення центра мас $\bar{a}_s$. Головний момент сил інерції $\bar{M}_\phi$ спрямований протилежно кутовому прискоренню $\bar{\varepsilon}$.

Метод силового розрахунку механізму з врахуванням сил інерції та застосуванням рівнянь динамічної рівноваги часто називають *кінетостатичним розрахунком* механізмів, на відміну від статичного розрахунку, при якому не враховуються сили інерції. У сучасних швидкохідних машинах слід обов'язково враховувати сили інерції ланок механізму, бо значення цих сил можуть значно перевищувати за величиною прикладене зовнішнє навантаження.

Таким чином, силовий розрахунок механізмів будемо виконувати методом кінетостатики, умовно приклавши до кожної рухомої ланки механізму, крім зовнішніх сил $\bar{F}$ (моментів $\bar{M}$), головний вектор $\bar{\Phi}$ та головний момент $\bar{M}_\phi$ сил інерції. Тоді для кожної ланки можна записати три рівняння кінетостатики.

Нагадаємо, для рівноваги довільної плоскої системи тіл необхідно і достатньо, щоб сума проєкцій усіх сил на кожну з двох координатних осей і сума їх моментів відносно будь-якого центра, що лежить у площині дії сил, були рівні нулю.

$$\sum F_x + \Phi_x = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_y + \Phi_y = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_0(\bar{F}) + \sum M + M_0(\bar{\Phi}) + M_\phi = 0. \quad (3)$$

Часто в розрахунках рівняння (1) та (2) замінюють одним еквівалентним векторним рівнянням

$$\sum \bar{F} + \bar{\Phi} = 0. \quad (4)$$

Головний вектор $\bar{\Phi}$ та головний момент $\overline{M}_\phi$ сил інерції визначаються з відомих формул:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}_s, \overline{M}_\phi = -I_s\bar{\varepsilon}.$$

Невідомі реакції визначаються з рівнянь (1) – (4), в які вони входять у складі сум $\sum F_x, \sum F_y, \sum M_0(\bar{F})$, з відомими зовнішніми силами.

Зазначимо, до викладена методика – для силового розрахунку плоских механізмів. При цьому прийнято, що механізм має площину симетрії, яка паралельна площині руху і в якій діють усі прикладені сили. Вказаній умові відповідає дуже велика кількість механізмів енергетичних, технологічних, транспортних машин та різних приладів.

При русі механізму в його кінематичній парі виникають сили тертя, що гальмують рух, знижують коефіцієнт корисної дії механізму. Силовий розрахунок може бути виконаний як з урахуванням, так і без урахування тертя. У першому наближенні проводять розрахунок без урахування сил тертя в кінематичних парах, розглядаючи механізм як систему з ідеальними в'язями. Відзначимо, у більшості випадків сили тертя малі, порівняно з іншими силами, що діють на механізм, тому уточнений розрахунок часто не робиться.

Розглянемо дію сил в кінематичних парах. Реакція, тобто сила взаємодії ланок, що утворюють нижчу кінематичну пару, представляє собою рівнодіючу елементарних сил (елементарних тисків однієї ланки на іншу), розподілених по поверхні дотику ланок. Як відомо, сила взаємодії між двома тілами, що дотикаються (якщо нехтувати силами тертя), напрямлена по спільній нормалі до поверхні стикання. Таким чином, у поступальній кінематичній парі всі елементарні сили, а отже і їх рівнодійна – реакція R_{12} (рис. 3.5), будуть напрямлені по нормалі до напрямної кінематичної пари $x-x$. Реакція, як і будь-яка сила, характеризується трьома параметрами: величиною (модулем), напрямком і точкою прикладання. Величина і точка прикладання реакції невідомі і повинні бути визначені в процесі силового розрахунку. Таким чином, поступальна пара вносить в рівняння (1) – (4) два невідомих параметри. Сказане повністю стосується і реакції R_{21} , яка прикладена до ланки 2 з боку ланки 1, оскільки сили взаємодії ланок R_{12}, R_{21} зв'язані третім законом Ньютона: $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$. Відзначимо, що реакції в кінематичних парах

будемо позначати двома нижніми індексами: перший вказує номер ланки, на яку діє сила, другий – номер ланки, з боку якої діє сила.

Розглянемо обертальну кінематичну пару V класу (рис. 3.6). Якщо знехтувати силами тертя, то рівнодійна R_{12} елементарних тисків однієї ланки на іншу, напрямлена по нормалі до циліндричних поверхонь дотику обох ланок, пройде через центр шарніра O . Положення центра шарніра завжди відоме, але невідомі ні величина цієї реакції, ні її напрям.

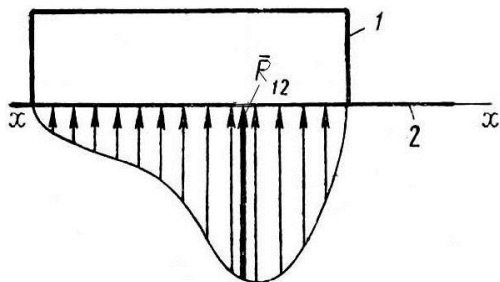


Рис. 3.5

Таким чином, від кожної реакції, що діє в нижчій кінематичній парі, в розрахункових рівняннях (1) – (4) з'являться два невідомі параметри.

У вищій парі IV класу (рис. 3.7) реакція R_{12} прикладена в точці A дотику ланок 1 та 2 і напрямлена вздовж спільної нормалі $n-n$ (тертя не враховується). Таким чином, для реакції R_{12} відомі як точка прикладання, так і лінія дії; невідомим є тільки її модуль.

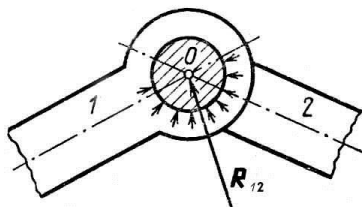


Рис. 3.6

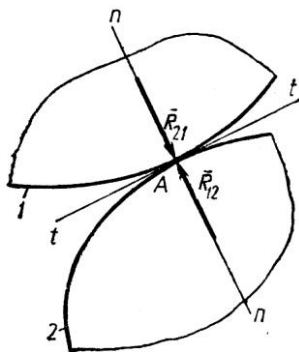


Рис. 3.7

Умови статичної визначеності плоских механізмів, кінематичних ланцюгів. Розглянемо плоский механізм, що складається з n рухомих ланок та p_5 нижчих (V класу) і у p_4 вищих (IV класу) кінематичних пар. Для цього механізму можна скласти $3n$ рівнянь рівноваги; число невідомих параметрів під час визначення реакцій у кінематичних парах цього ланцюга становитиме $2p_5 + p_4$. Щоб задача була статично визначеною, кількість рівнянь рівноваги повинна дорівнювати числу невідомих, що входить до них, тобто $3n = 2p_5 + p_4$. Запишемо для плоского кінематичного ланцюга формулу Чебишева у вигляді $3n = 2p_5 + p_4 + W$. Порівнюючи вирази, роблять висновок: механізм без залишкових в'язей є статично визначеним. W рівнянь, що залишились, використовуються для визначення тих зовнішніх силових факторів, які не задані в силовому розрахунку і є шуканими. В багатьох підручниках невідомий зовнішній силовий фактор називається зрівноважувальною силою (моментом).

У той же час, для будь-якої структурної групи Ассура справедливе співвідношення $3n = 2p_5 + p_4$. Отже, будь-яка структурна група є статично визначеною, а тому при силовому розрахунку доцільно розглядати рівновагу окремих структурних груп.

Послідовність силового розрахунку механізмів. При силовому розрахунку невідомими будуть внутрішні сили в кінематичних парах, тобто реакції, та часто зрівноважувальна сила (момент). Щоб визначити їх, механізм треба розкласти на групи Ассура. Оскільки групи Ассура є статично визначеними, механізм розкладається на групи Ассура та механізм I класу. При цьому необхідно, щоб зрівноважувальна сила була прикладена до рухомої ланки механізму I класу. Підкреслимо, що при такому розкладанні механізму, в кожній групі Ассура невідомими будуть тільки реакції. Після того, як силовий розрахунок усіх груп Ассура виконано, механізм I класу також буде статично визначеним.

Підсумуємо: силовий розрахунок механізму потрібно проводити за структурними групами Ассура, починаючи з групи, яка приєднана останньою у процесі утворення механізму, і завершувати розрахунком механізму I класу. Таким чином, послідовність силового розрахунку є зворотною до послідовності кінематичного дослідження.

3.4. Силовий розрахунок шарнірно-важільного механізму

Розглянемо графічний метод силового дослідження плоских важільних механізмів шляхом складання рівнянь рівноваги та побудови плану сил. Наведемо розрахунок шестиланкового кулісного механізму поперечно-стругального верстата. Вихідними даними для розрахунку є: кінематична схема механізму в заданому положенні (рис. 3.8); маси m_i та моменти інерції I_{Si} ланок; положення їх центрів мас s_i ; кутова швидкість ω_1 кривошипа; сила корисного опору, в розглядуваному прикладі F_p - сила різання, яка

прикладена до різця (ланка 5), в напрямку, протилежному руху.

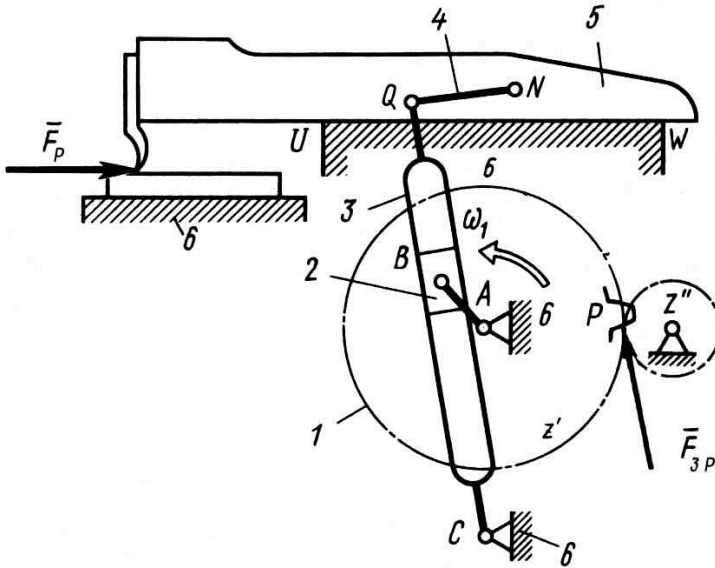


Рис. 3.8

Невідомими є реакції у кінематичних парах та зрівноважувальна сила $F_{зр}$. Оскільки у даному прикладі задано, що верстат з'єднаний з двигуном за допомогою зубчастої передачі $z' - z''$, то зовнішній силовий фактор, який прикладений до зубчастого колеса z' (ланка 1), являє собою силу, модуль якої треба визначити (напрямок та точка прикладання відомі).

Підкреслимо, що до силового розрахунку приступають лише після виконання кінематичного аналізу. Припустимо, що кінематичний розрахунок виконаний, і, отже, відомі повні прискорення центрів мас усіх ланок та їх кутові прискорення за величиною та напрямком. За знайденими прискореннями визначаємо модулі та напрямки головних векторів та головних моментів сил інерції всіх ланок за формулами

$$\bar{\Phi}_i = -m_i \bar{a}_{Si}; \bar{M}_{\Phi i} = -I_{Si} \bar{\varepsilon}_i.$$

Вектори сил інерції $\bar{\Phi}_i$ прикладені в центрах мас і напрямлені в протилежну сторону до напрямків векторів відповідних прискорень a_{Si} , моменти $M_{\Phi i}$ напрямлені протилежно до кутових прискорень ε_i .

Визначимо сили ваги усіх рухомих ланок за рівністю

$$G_i = m_i g = 9,81 m_i$$

і прикладемо їх у центрах мас s_i ланок вниз по вертикалі.

Розбиваємо механізм на групи Ассура. Даний механізм утворений шляхом послідовного приєднання до механізму I класу (ланки 1, 6) двох груп Ассура другого класу: групи третього виду (ланки 2, 3) та другого виду (ланки 4, 5).

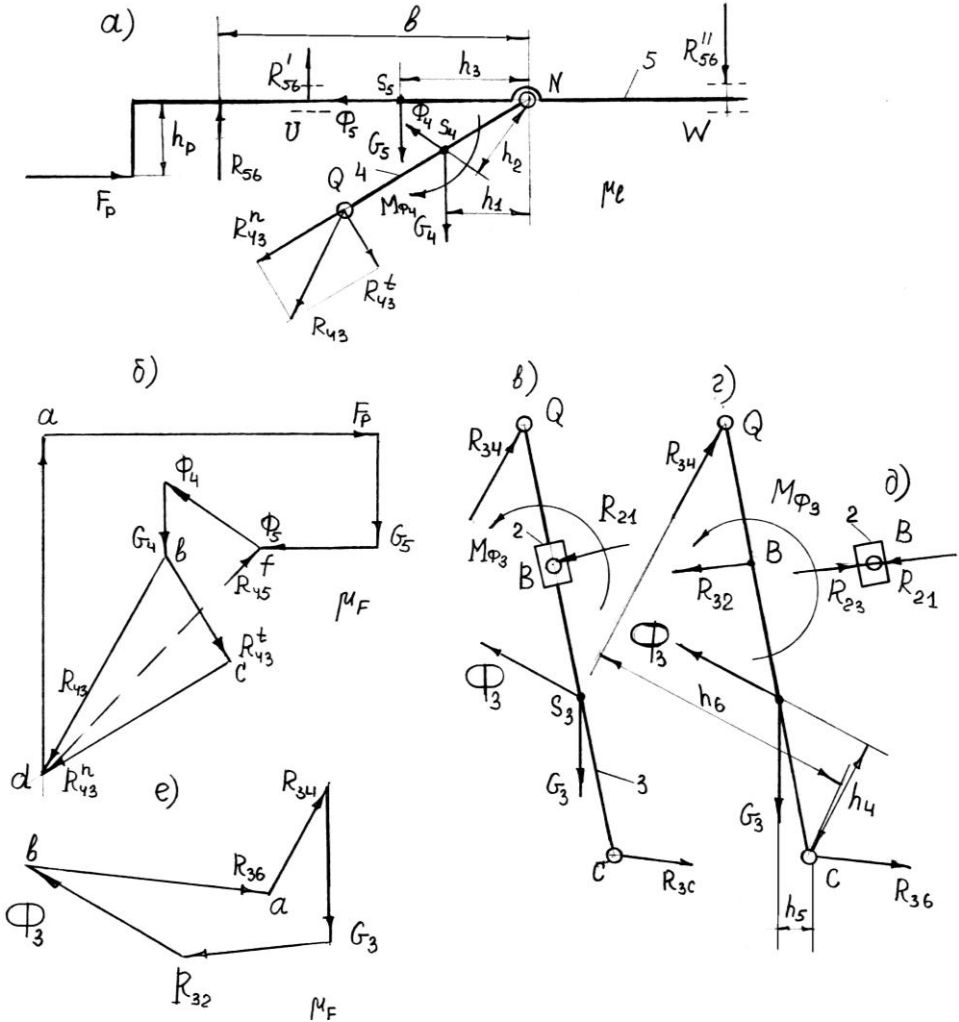


Рис. 3.9

Накреслимо в масштабі найвіддаленішу від вхідної ланки групи Ассура (ланки 4,5) і нанесемо діючі на неї сили: корисного опору F_p , ваги G_4 , G_5 , сили (і моменти сил) інерції Φ_4 , Φ_5 , M_{ϕ_4} – усі вони відомі; а також реакції від'єднаних від групи Ассура ланок (рис. 3.9, а). Невідомими є реакції. Реакція стояка на повзун R_{56} нормальна до напрямної UW . Невідомим є її модуль, а також точка прикладання, яка визначається через плече b . Реакцію в обертальній парі Q , невідому за модулем і напрямом, розкладемо на дві складові $\bar{R}_{43}^n$, $\bar{R}_{43}^t$ так, щоб момент нормальної складової відносно точки N дорівнював нулю. Невідомі модуль та напрям внутрішньої реакції $\bar{R}_{45} = -\bar{R}_{54}$ в шарнірі N визначаються пізніше, через план сил.

Під дією цих сил, згідно з принципом Д'Аламбера, група Ассура перебуватиме в стані умовної рівноваги.

Складову R_{43}^t знайдемо з умови рівноваги ланки 4, за рівнянням моментів

$$\sum M_N(\bar{F}) = 0,$$

$$R_{43}^t QN + G_4 h_1 - \Phi_4 h_2 - M_{\phi_4} / \mu_l = 0,$$

звідки

$$R_{43}^t = \frac{\Phi_4 h_2 + M_{\phi_4} / \mu_l - G_4 h_1}{QN},$$

де QN , h_1 , h_2 – плечі сил, які вимірюємо на кресленні групи Ассура.

Якщо права частина рівності додатна то це означає, що напрям реакції R_{43}^t на схемі прийнято правильно. При від'ємному значенні – потрібно замінити напрям реакції R_{43}^t на протилежний.

Подальші силові розрахунки проводимо графічним методом. Складаємо векторне рівняння рівноваги сил, прикладених до всієї групи Ассура (4,5):

$$\sum \bar{F} = 0,$$

$$\bar{R}_{56} + \bar{F}_p + \bar{G}_5 + \bar{\Phi}_5 + \bar{\Phi}_4 + \bar{G}_4 + \bar{R}_{43}^t + \bar{R}_{43}^n = 0, \quad (5)$$

пам'ятаючи, що для системи, яка перебуває в рівновазі, многокутник сил буде замкненим.

Будуємо план сил. Для цього вибираємо масштаб μ_F та вираховуємо відповідні відомим силам довжини відрізків. Потім, починаючи від довільно вибраної т.а (рис. 3.9, б), відкладаємо, згідно з рівнянням (5), вектори, що зображають ці сили F_p , G_5 , Φ_5 , Φ_4 , G_4 , R_{43}^t у масштабі μ_F . Після цього через

початок вектора, що зображає на плані силу $\bar{F}_p$ (т. а), проводимо лінію, паралельну до $\bar{R}_{56}$ на кресленні групи Ассура, а через кінець вектора, що зображає $\bar{R}_{43}^t$ (т. с) – лінію, паралельну $\bar{R}_{43}^n$. Точка d перетину цих двох прямих визначить невідомі реакції R_{56} , R_{43}^n . Напрямок їх приймається таким, щоб стрілки на векторах сил були орієнтовані в напрямку обходу контура. Повну реакцію R_{43} в шарнірі Q отримуємо графічно згідно з рівнянням $\bar{R}_{43} = \bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^t$.

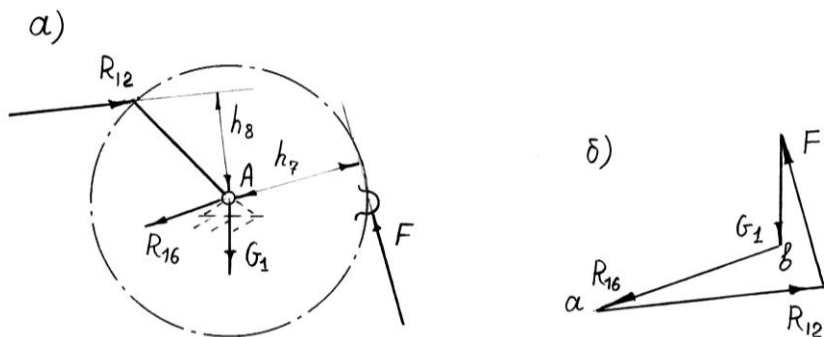


Рис. 3.10

Модулі знайдених реакцій визначаємо за відомими формулами

$$R_{56} = \mu_F ad, \quad R_{43} = \mu_F bd,$$

де ad, bd - відрізки на плані сил.

Для визначення реакцій $\bar{R}_{45}$ у внутрішній кінематичній парі N розглянемо умову рівноваги сил, що діють на ланку 4,

$$\sum \bar{F} = 0, \quad \bar{\Phi}_4 + \bar{G}_4 + \bar{R}_{43} + \bar{R}_{45} = 0.$$

Розв'язок отримуємо, замкнувши на плані сил точки d і f . Модуль реакції дорівнює $R_{45} = \mu_F df$.

Визначимо координату b точки прикладання реакції R_{56} . З рівняння моментів усіх сил, що діють на ланку 5 відносно т. N ,

$$\sum M_N(\bar{F}) = 0,$$

отримаємо:

$$R_{56}b - G_5h_3 - F_ph_p = 0, \quad b = \frac{G_5h_3 + F_ph_p}{R_{56}}.$$

Якщо плече b буде мати таку довжину, що т. D виявиться поза поверхнею UW , то силова дія стояка 6 на повзун 5 зведеться до двох реакцій R'_{56} , R''_{56} . Знайдена R_{56} є тоді лише їхньою рівнодійною. Шукані реакції визначаються за допомогою теореми Варіньона

$$R'_{56} = R_{56} \frac{l_{DW}}{l_{UW}}; \quad R''_{56} = R_{56} \frac{l_{DU}}{l_{UW}}.$$

Перейдемо до розгляду групи Ассура 2. Накреслимо в масштабі групу Ассура і прикладемо діючі сили (рис. 3.9, *в*). Двоповідкова група Ассура третього виду частіше за інші зустрічається в сучасному машинобудуванні. При цьому, часто $G_2=0$, $\Phi_2=0$ або настільки малі, що ними нехтують

До ланок групи прикладені: відома з попереднього розрахунку реакція $\bar{R}_{34} = -\bar{R}_{43}$, а також відомі сили та момент G_3 , Φ_3 , M_ϕ . Невідомими є модуль та напрям реакцій R_{36} і R_{21} в шарнірах C та B , модуль реакції взаємодії $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$ в поступальній парі 2-

Розглянемо рівновагу не групи Ассура, а окремих ланок, які входять до групи, оскільки відомо напрям реакції R_{32} повзуна на кулісу (реакції у внутрішній кінематичній парі B). Ця реакція нормальна до напрямної CQ і прикладена в т. B (рис. 3.9, *з*).

За модулем реакцію R_{32} знайдемо з рівняння моментів сил, що діють на кулісу, відносно т. C

$$\sum M_C = 0, \\ R_{32}BC + \Phi_3h_4 + G_3h_5 - R_{34}h_6 + M_{\phi 3}/\mu_l = 0,$$

звідки
$$R_{32} = \frac{R_{34}h_6 - \Phi_3h_4 - G_3h_5 - M_{\phi 3}/\mu_l}{BC}, \quad \bar{R}_{32} = -\bar{R}_{23}.$$

Із умови рівноваги повзуна (рис. 3.9, *д*) маємо

$$\sum \bar{F} = 0, \\ \bar{R}_{23} + \bar{R}_{21} = 0, \quad \bar{R}_{23} = -\bar{R}_{21}.$$

Реакцію R_{36} знаходимо методом планів сил згідно з векторним рівнянням для ланки 3
$$\sum \bar{F} = 0, \quad \bar{R}_{34} + \bar{G}_3 + \bar{R}_{32} + \bar{\Phi}_3 + \bar{R}_{36} = 0.$$

Для цього з довільно вибраної точки (полюса a , рис. 3.9, *е*) в масштабі

μ_{F_1} відкладаємо сили $\bar{R}_{34}$, $\bar{G}_3$, $\bar{R}_{32}$ і $\bar{\Phi}_3$. Невідома реакція R_{36} замкне багатокутник сил. За модулем $R_{36} = \mu_{F_1} ab$.

Переходимо до силового розрахунку механізму I класу. Накреслимо його в масштабі (рис. 3.10, *a*) і нанесемо діючі сили: відому силу $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$, силу ваги G_1 , невідому за модулем і напрямком реакцію R_{16} , та невідому лише за модулем зрівноважувальну силу F_{3p} . В даному прикладі зрівноважувальна сила являє собою рушійну силу. Лінія дії сили F_{3p} проходить через полюс зачеплення P під кутом зачеплення α_w . Положення полюса P та величина кута α_w визначаються з геометричного розрахунку зубчастої передачі.

Сила F_{3p} знаходиться з рівняння моментів сил відносно т.А

$$\sum M_A(F) = 0, \quad F_{3p} h_7 - R_{12} h_8 = 0,$$

звідки
$$F_{3p} = \frac{R_{12} h_8}{h_7}.$$

Відмітимо, що силу F_{3p} можна також отримати і коротшим шляхом, не роблячи розбивки механізму на групи Ассура, застосувавши теорему М.Є. Жуковського.

Реакцію R_{16} стояка 6 на кривошип 1 визначимо за допомогою побудови плану сил (рис. 3.10, *b*) згідно з рівнянням

$$\sum \bar{F} = 0, \quad \bar{R}_{12} + \bar{F}_{3p} + \bar{G}_1 + \bar{R}_{16} = 0.$$

За модулем невідома реакція $R_{16} = \mu_{F_2} \cdot ab$.

3.5. Теорема Жуковського про жорсткий важіль

Визначення зрівноважувальної сили методом М.Є. Жуковського. У випадку задач, у яких необхідно знайти зрівноважувальну силу або зрівноважувальний момент, а визначати реакції в кінематичних парах немає потреби, використовують теорему (метод) Жуковського. Прикладом таких задач є: визначення потужності та типу двигуна, моменту інерції маховика, характеристики регулятора та інші задачі динаміки.

Співвідношення між силами, прикладеними до ланок механізму (включаючи і сили інерції), можна дістати, застосувавши теорему Жуковського про жорсткий важіль: якщо для механізму, що перебуває в русі, побудувати план швидкостей, а потім вектори усіх активних сил та сил інерції, які прикладені в різних точках механізму, повернути на 90° в один і той же бік та перенести в однойменні точки плану швидкостей, то сума

моментів цих сил відносно полюса буде дорівнювати нулю.

Замість сил можна повертати план швидкостей на 90^0 , а сили прикладати так, як вони показані на схемі механізму. Тоді теорему Жуковського можна сформулювати таким чином: якщо до плану швидкостей, повернутого на 90^0 , у відповідних точках прикласти всі зовнішні сили (і моменти), сили інерції (і моменти сил інерції), а також зрівноважувальну силу (момент) і розглядати план швидкостей як жорсткий важіль, закріплений у полюсі, то під дією цих сил і моментів він буде перебувати в рівновазі, а сума моментів сил відносно полюса дорівнюватиме нулю. Таким чином, рівновазі механізму відповідає рівновага повернутого плану швидкостей, який розглядається як “жорсткий важіль”, що шарнірно закріплений в полюсі плану.

Доведення теореми ґрунтується на принципі можливих переміщень.

Моменти сил, що прикладені до ланок механізму найчастіше зображають у вигляді пар сил, які переносять на план швидкостей. Якщо моменти M_i , що діють на ланки механізму, переносяться на план швидкостей безпосередньо у вигляді моментів, їх величина визначається рівнянням

$$M_i^0 = M_i \frac{ab}{l_{AB}},$$

де l_{AB} , м – довжина ланки, до якої прикладений момент M_i ; ab , мм – відрізок плану швидкостей, до якого прикладається момент M_i^0 . При цьому момент M_i^0 має той же знак, що і заданий момент M_i , якщо напрям відрізка ab (порядок літер) співпадає з напрямом відрізка AB схеми механізму. Якщо напрям ab протилежний AB , то моменти M_i^0 та M_i мають різні знаки.

Застосування важеля Жуковського дозволяє визначити шукану силу за допомогою тільки одного рівняння моментів. У випадку застосування методу плану сил необхідно провести повний силовий розрахунок механізму.

Відзначимо, що метод Жуковського можна застосовувати для знаходження величини будь-якої сили, якщо точка прикладання та лінія дії цієї сили задані, а також відомі лінії дії, величини та точки прикладання усіх інших сил, які діють на ланки механізму.

З наведеного випливає така послідовність визначення зрівноважувальної сили за способом Жуковського: - креслять кінематичну схему механізму у заданому положенні та вибраному масштабі з прикладеними усіма зовнішніми силами. Моменти замінюють парами сил; - будують план швидкостей, повернутий на 90^0 ; - до однойменних точок повернутого плану прикладають усі зовнішні сили, сили інерції, а також зрівноважувальну силу, зберігаючи їх напрям; - складають рівняння суми моментів усіх сил відносно полюса і визначають зрівноважувальну силу.

Приклад. За допомогою важеля Жуковського визначити $F_{зр}$ для механізму, що зображений на рис. 3.11. Згідно з умовою, $F_{зр}$ прикладена в т.А кривошипа.

У довільному масштабі будемо план швидкостей. Прикладаємо у відповідних точках плану швидкостей всі сили, повернуті на 90^0 за рухом стрілки годинника. При цьому моменти M_{ϕ_2} замінюємо парою сил $F'_{M\phi}$ і $F''_{M\phi}$, що прикладені в точках А та В, зі збереженням напрямку моменту

$$F'_{M\phi} = F''_{M\phi} = \frac{M_{\phi_2}}{l_{AB}}.$$

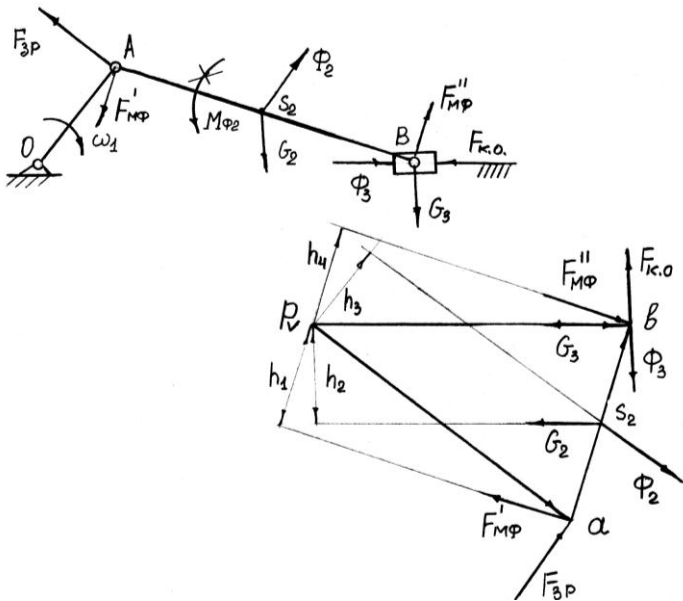


Рис. 3.11

Складаємо рівняння моментів відносно полюса плану швидкостей

$$\sum M_{P_v}(F) = 0,$$

$$F_{зр} p_v a - F'_{M\phi} h_1 - G_2 h_2 - \Phi_2 h_3 + F_{KO} p_v b - \Phi_3 p_v b - F''_{M\phi} h_4 = 0.$$

$$\text{Звідки } F_{3p} = \frac{F'_{\text{мф}} h_1 + G_2 h_2 + \Phi_2 h_3 - F_{\text{ко}} p_v b + F''_{\text{мф}} h_4 + \Phi_3 p_v b}{p_v a}.$$

Якщо при розв'язку даного рівняння сила F_{3p} додатня, то це означає, що її напрям вибрано правильно. При від'ємному значенні правої частини напрям сили F_{3p} треба змінити на протилежний.

Питання для самоконтролю

1. Що вивчає динаміка? Сформулюйте основні задачі динаміки.
2. Сили, що діють на ланки механізму, та їх коротка характеристика.
3. Механічні характеристики машин. Приклади типових механічних характеристик.
4. Сформулюйте принцип Д'Аламбера. Визначення сил інерції ланок механізму.
5. Методика і порядок силового розрахунку плоских важільних механізмів.
6. Наведіть характеристики сил, що залежать від переміщення.
7. Основні задачі силового розрахунку.
8. Запишіть рівняння рівноваги твердих тіл.
9. Реакції в кінематичних парах V та IV класів.
10. Умови статичної визначеності кінематичних ланцюгів.
11. Суть кінестатичного методу силового розрахунку.
12. Теорема Жуковського про жорсткий важіль.
13. Визначення зрівноважувальної сили за допомогою важеля Жуковського.
14. Силовий розрахунок механізму першого класу.
15. Послідовність силового розрахунку механізмів.

ГЛАВА 4. ТЕРТЯ В МЕХАНІЗМАХ І МАШИНАХ

Під час роботи машин та механізмів має місце явище, яке перешкоджає рухові його ланок та супроводжується розсіюванням механічної енергії. Це явище називається тертям. Енергія, що витрачається на тертя, перетворюється у теплоту. Одночасно з цим відбувається згладжування шорсткостей поверхонь, що стикаються, тобто їхнє зношення (спрацювання). Підраховано, що біля третини світових енергетичних ресурсів даремно витрачається на роботу пов'язану з тертям. Цілком зрозуміло, що бажано щоб ці втрати були мінімальними. Також відомо, що більшість (80%) деталей машин виходять з ладу через зношення; забезпечити міцність деталей простіше та дешевше, ніж стійкість проти спрацювання. Тому ще з моменту виникнення ТММ як науки тертя було одним з перших розглядуваних питань.

Відмітимо, що з іншого боку, тертя – корисне явище, на використанні сил тертя ґрунтується робота багатьох машин і механізмів (рух транспортних засобів, пасової та фрикційної передач, фрикційних муфт, зчеплень, гальм). В наш час галузь науки, що охоплює комплекс питань, пов'язаних з тертям та спрацюванням деталей машин, має назву *триботехніка*.

При дослідження фізичних основ явища тертя розрізняють тертя зовнішнє та внутрішнє. Зовнішнє тертя – опір відносному переміщенню, що виникає між двома тілами у зонах дотику їхніх поверхонь, по дотичній до них і що супроводжується дисипацією енергії.

Внутрішнє тертя – процеси, що проходять у твердих (рідких та газоподібних тілах) при їх деформації і, що призводять до необоротного розсіювання механічної енергії.

У ТММ розглядається зовнішнє тертя. Сили тертя – це сили, що виникають у кінематичних парах при відносному русі ланок; вони обумовлені реакціями в'язей і є складовими цих реакцій.

Тертя – це складне фізичне явище, для пояснення якого запропоновані дві гіпотези: механічну та молекулярну. Згідно з першою гіпотезою, тертя виникає внаслідок деформацій невеликих виступів і западин які неодмінно є на поверхнях тертя (як би при цьому вони не були добре виготовлені). Згідно з іншою гіпотезою процес тертя полягає у подоланні існуючих та виникнення нових, сил молекулярної взаємодії у зонах фактичного контакту тіл. Таким чином, сила тертя виникає внаслідок механічного зачеплення, пружно-пластичної деформації та молекулярної взаємодії контактуючих елементів

поверхонь тертя.

Види тертя. Залежно від характеру відносного руху елементів кінематичних пар розрізняють: тертя ковзання (тертя першого роду); тертя кочення (тертя другого роду); тертя вертіння. Інколи відрізняють ще тертя кочення з проковзуванням та тертя при вібропереміщеннях.

Для зменшення сил тертя та інтенсивності спрацювання елементів кінематичних пар використовують мастила. За станом поверхонь тертя розрізняють два види тертя: сухе тертя (без мастила) і тертя з мастилом. В іншій літературі часто трапляється такий поділ – сухе тертя та рідинне (в'язке) тертя. Сухе – це тертя, що виникає на поверхнях вільних від будь-яких сторонніх речовин. Рідинне – тертя, при якому поверхні тертя повністю розділені шаром мастила. Сили сухого та рідинного тертя мають різну природу, тому методи їх розрахунку різні. Крім того, інколи ще розрізняють проміжні види тертя: граничне, напівсухе і напіврідинне.

4.1. Тертя ковзання сухих тіл

Тертям називають опір, який виникає при русі або намаганні рухатися одного тіла по поверхні іншого.

Елементарне уявлення про розподіл сил при терті ковзання сухих тіл можна встановити розглядаючи простий приклад. Нехай повзун 1 вагою G (рис. 4.1) перебуває на горизонтальній площині 2 у стані спокою, $\vec{N} = -\vec{G}$. Якщо прикласти до повзуна деяку невелику горизонтальну силу F , він тим не менше залишається у спокої. Це свідчить про те, що на повзун 1, крім нормальної реакції N , з боку площини 2 діє ще одна сила – F_T , яка зрівноважує прикладену силу F , тобто вона за величиною дорівнює силі F і спрямована протилежно до неї. Це горизонтальна складова реакції, вона лежить у дотичній площині і є сила тертя ковзання спокою. Отже горизонтальна складова реакції площини на повзун зрівноважує прикладену до нього силу F і зростає разом з нею доти, доки не порушиться рівновага. Це відбудеться тоді, коли сила тертя досягне свого максимального значення $F_{\max}$.

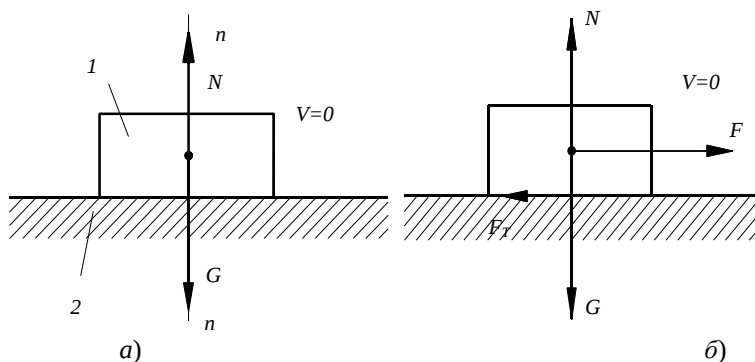


Рис. 4.1

Таким чином тертю руху передуює тертя спокою, тобто сила тертя між тілами 1 і 2 діє при їхньому відносному мікрозміщенні. Сила тертя ковзання спокою перебуває в спільній дотичній площині до поверхонь тіл, що дотикаються, і спрямована протилежно до напрямку їх можливого переміщення під дією активних сил. Її модуль залежить від активних сил і може приймати значення в межах від нуля до певної величини $F_{T\max}$, якої він досягне в момент виходу тіла зі стану спокою.

Сила тертя, яка перешкоджає ковзанню тіла, під час його руху, називається силою тертя руху, або динамічною силою тертя ковзання. Як показують досліди, сила тертя руху менша від статичної сили тертя.

У більшості технічних розрахунків користуються наближеними законами тертя ковзання встановленими Г. Амонтоном і Ш. Кулоном.

1. Сила тертя при інших рівних умовах не залежить від площі дотику поверхонь тертя.

2. Максимальне значення сили тертя спокою прямо пропорційне до нормальної реакції N (нормального тиску)

3.

$$F_{T\max} = f_c N, \quad (1)$$

де f_c - коефіцієнт тертя ковзання спокою.

Коефіцієнт тертя ковзання спокою є безрозмірною величиною, яка залежить матеріалу поверхонь тіл, що контактують, і їх фізичного стану, тобто від величини і характеру шорсткості, наявності мастила, вологості і т.п., величина цього коефіцієнта встановлюється експериментально і лежить між нулем і одиницею, $0 \leq f_c < 1$.

Зауважимо, що матеріали які мають високий коефіцієнт тертя, називають фрикційними (гума, текстоліт, азбест, шкіра, тощо) і, навпаки, низький коефіцієнт тертя – антифрикційними (бронза, латунь, бабіт, сірий чавун, капрон, і деякі інші види пластмас).

4. Сила тертя зростає із збільшенням часу попереднього контакту ланок.

Величину сили тертя руху визначають за формулою аналогічною до (1), підставивши в неї замість коефіцієнта тертя спокою f_c коефіцієнт тертя руху

$$F_T = fN,$$

де f – динамічний коефіцієнт тертя ковзання, безрозмірна величина, що визначається експериментально.

У технічних розрахунках вважають, що динамічний коефіцієнт тертя ковзання не залежить від відносної швидкості руху тіл. Значення коефіцієнта тертя наведено у довідниках, часто приймають $f = 0,9 f_c$.

Отже, сила тертя ковзання пропорційна нормальному тиску N , прикладена на поверхні стику деталей і направлені у бік, протилежний швидкості їхнього відносного руху.

Звичайно, сили тертя, що виникають на поверхні взаємодіючих тіл, завжди з'являються попарно: одна з них прикладена до одного тіла, а інша – до другого тіла і напрямлена у зворотній бік.

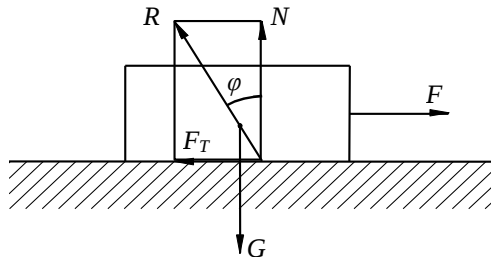


Рис. 4.2

Кут і конус тертя. Таким чином, повна реакція шорсткої поверхні R визначається діагоналю паралелограма, побудованій на нормальній реакції N і силі тертя F_T . Повна реакція відхилена від нормалі до спільної дотичної площини, на кут φ який називається *кутом тертя*. З рис. 4.2 маємо $F_T / N = \tan \varphi$, з іншого боку $F_T = fN$, отже $\tan \varphi = f$. Тангенс кута тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання. Отже, наявність тертя змінює величину та напрям діючих сил; повна реакція напрямної на повзун відхилена від спільної нормалі до їхніх поверхонь (а не напрямлена вздовж неї) в бік протилежний до швидкості повзуна на кут тертя.

Нехай усі зовнішні сили, що діють на повзун, на негладкій поверхні враховуючи і його вагу, зводяться до рівнодіючої Q , яка проходить через т.А дотику повзуна з опорною поверхнею і утворюють з нормаллю до цієї

поверхні кут α (рис. 4.3). Перенесемо дану силу по лінії дії в т. А та розкладемо її на дві складові: нормальну до поверхні Q^n і дотичну Q^r .

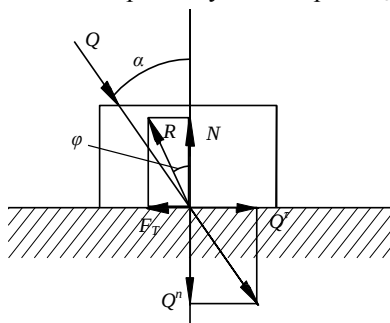


Рис. 4.3

Оскільки опорна поверхня шорстка, то при дії сили Q крім нормальної реакції N з'являється ще сила тертя F_T , яка лежить у дотичній площині і напрямлена у протилежний бік до активної сили Q . Отже, на повзун збоку опорної поверхні діють дві сили. Додавши ці сили за правилом паралелограма, дістанемо повну опорну реакцію R , відхилену від нормалі на тут тертя φ .

Для того, щоб повзун рухався по напрямній, необхідно витримати умову:

$$Q^r \geq F_T, \quad \text{або} \quad Q^n \operatorname{tg} \alpha \geq N \operatorname{tg} \varphi.$$

Оскільки відносний рух у напрямку спільної нормалі відсутній, то $Q^n = N$ і, отже, $\operatorname{tg} \alpha \geq \operatorname{tg} \varphi$.

Звідси знайдемо необхідну умову можливості руху повзуна по напрямній, $\alpha > \varphi$. Якщо ж, $\alpha \leq \varphi$, то повзун буде знаходитися у стані спокою незалежно від величини прикладеної до нього сили. Цим пояснюється відоме явище *заклинювання*, або *самогальмування*.

Якщо повзун будемо пересувати відносно опорної поверхні у різні боки, то лінія реакції R опише конічну поверхню, яка називається конусом тертя.

Викладене про тертя ковзання стосується лише сухого тертя. У випадках в'язкого тертя, тобто якщо на поверхнях тертя є мастило, користуються іншими закономірностями.

Тертя в клиновій поступальній парі. Для надання повзуну строго прямолінійного руху без бічних відхилень застосовують клинові (клинчасті) напрямні. У цих випадках поверхня стикання повзуна і напрямної має в

поперечному перерізі вигляд симетричного двогранного кута, або жолоба (рис. 4.4, а). При цьому зовнішнє навантаження сприймається двома поверхнями. Таку кінематичну пару називають *клиновою*.

Для рівномірного руху повзуна має виконуватись умова

$$F_{\text{рух}} = F_T = F_{T_1} + F_{T_2} .$$

У випадку симетричного жолоба $F_{T_1} = F_{T_2}$. Таким чином, сила тертя визначається за формулою

$$F_T = 2N_{12} f .$$

Згідно з векторним рівнянням рівноваги усіх сил, що діють на повзун у поперечному перерізі $\vec{G} + \vec{N}_{12} + \vec{N}_{12} = 0$, будемо трикутник сил (рис. 4.4, б).

З плану сил (рис. 4.4) отримуємо: $N_{12} = \frac{G}{2 \sin \beta} .$

Тоді

$$F_T = G \frac{f}{\sin \beta} = G f_{\text{зв}} ,$$

де $f_{\text{зв}} = \frac{f}{\sin \beta}$ – зведений (умовний) коефіцієнт тертя клинової пари.

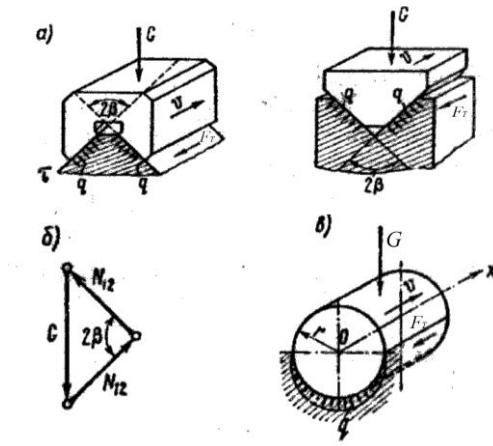


Рис. 4.4

Отже, у всіх випадках, коли має місце тертя в клиновій парі, можна

користуватися формулами для плоскої поступальної кінематичної пари, в які замість коефіцієнта тертя f підставляємо зведений коефіцієнт тертя.

Оскільки завжди $\sin \beta$ менший за 1, то $f_{зв} > f$ – коефіцієнта тертя плоскої поступальної пари. Цю властивість клинної пари широко використовують у техніці для збільшення сили тертя при передачі руху (наприклад, у пасових і фрикційних передачах, гвинтових з'єднаннях).

Коефіцієнт $f_{зв}$ використовується також у формулах розрахунку сили тертя і в циліндричній поступальній парі

$$F_T = f_{зв} Q \approx 1,27 f Q. \quad (2)$$

Із (2) видно, що сила тертя повзуна в циліндричній напрямній на 27% більша за силу тертя в плоскій поступальній парі. Однак, враховуючи простоту виготовлення, циліндричні поступальні пари досить широко використовуються в техніці.

Тертя у гвинтовій кінематичній парі. Гвинтові пари знайшли широке застосування у машинах і приладах, наприклад, у кріпильних різьбових з'єднаннях (кріпильні болти), у токарних верстатах (ходові гвинти), у домкратах, пресах, лещатах, струбцинах і т.ін.

Основними геометричними параметрами різьби є d_3 , d_{cp} та $d_{вн}$ – зовнішній, середній та внутрішній діаметри, h – висота підйому середньої гвинтової лінії різьби, α – кут підйому різьби (рис. 4.5). В однозахідних гвинтах $h = s$, де s – крок різьби; у багатозахідних $h = ks$, де k – число заходів. Із розгортки на площину середньої гвинтової лінії випливає, що $h = \pi d_{cp} \tan \alpha$.

Крутний (рушійний) момент можна подати як добуток сили на плече:

$$M_{кр} = P'L = Pr_{cp},$$

де P – прикладена до гайки рушійна сила, необхідна для її рівномірного переміщення; L – довжина плеча.

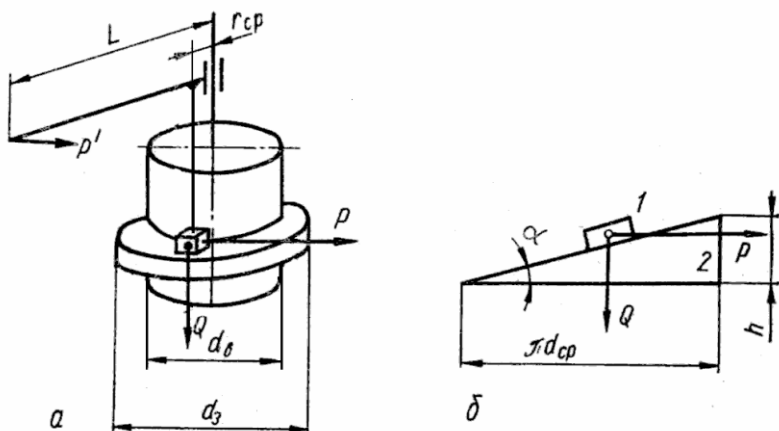


Рис. 4.5

Вважаємо, що тиск гайки на гвинт (і гвинта на гайку) прикладений по середній лінії різьби. Дію сил у гвинтовій парі зведемо до дії сил на повзун, що розміщений на похилій площині, у якій кут нахилу дорівнює куту підйому гвинтової лінії. Цим самим, зведемо просторову задачу до плоскої.

Знайдемо рушійну силу P графічно (рис. 4.6). Якщо повзун перебуває у рівновазі або рухається рівномірно то векторна сума сил, що діють на повзун дорівнює нулю. Таким чином, силу P можна знайти із векторної рівності

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}_{21} = 0.$$

Будуємо трикутник сил у певному масштабі (рис. 4.6), з якого знаходимо невідомі $P = \overline{ab} \cdot \mu_p$; $R = \overline{ac} \cdot \mu_p$.

Силу P можна знайти і за формулою, яку дістають із побудованого трикутника сил:

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi),$$

звідки матимемо

$$M_{\text{кр}} = Q r_{\text{cp}} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi),$$

де φ – кут тертя.

Умовою самогальмування гвинтів, за аналогією з похилою площиною, буде

$$\alpha \leq \varphi.$$

Тертя у гвинтах з трикутною різьбою. Для гвинтів з трикутною різьбою формула для визначення крутного моменту $M_{\text{кр}}$ та умова самогальмування за зовнішнім виглядом такі самі, як і для гвинтів із

прямокутною різьбою. З рис. 4.6 не важко отримати формулу для визначення сили тертя

$$F_T = P \frac{f}{\sin \beta + f \cos \beta}.$$

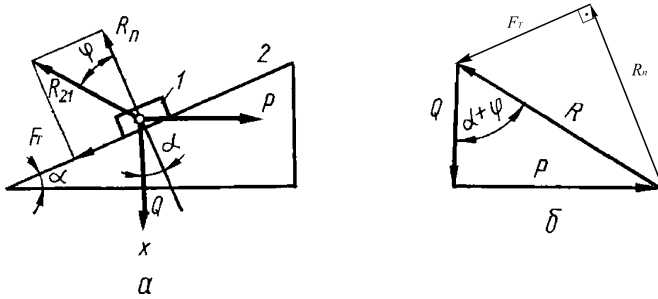


Рис. 4.6

Враховуючи те, що тертя у гвинтах з трикутною різьбою ототожнюється з тертям на похилій площині з клинчастою напрямною, слід ввести у формули зведені коефіцієнти та кути тертя

$$f_{зв} = \frac{f}{\sin(90 - \beta)},$$

де β – кут профілю різьби.

Тертя в обертових кінематичних парах. Опорні частини валів та осей називаються *цапфами*. Цапфи, розміщені на кінцях валів, називають *шипами*, а проміжні – *шийками*. Нерухому ланку обертової кінематичної пари, що підтримує шип або шийку, називають *підшипником*. Шипи та шийки сприймають радіальне навантаження. Частини валів (осей), які сприймають осьові навантаження називають *п'ятами*.

В обертовій парі (рис. 4.7) лінія дії результуючої реакції R з боку ланки 1 (цапфи) на ланку 2 (вал) не проходить через центр O цапфи, а буде дотичною до круга тертя (на рис. 4.7 заштрихований) і відхиленою від нормальної реакції N на кут тертя φ .

Радіус круга тертя дорівнює

$$\rho = r \sin \varphi \approx rtg \varphi = rf',$$

де r – радіус цапфи вала 2; f' – зведений коефіцієнт тертя в обертовій кінематичній парі.

Для непритертих цапф $f' = \frac{3}{2} f$, для притертих цапф $f' = \frac{4}{5} f$, де f

– коефіцієнт тертя плоских поверхонь виготовлених з тих самих матеріалів

що й підшипник та цапфа.

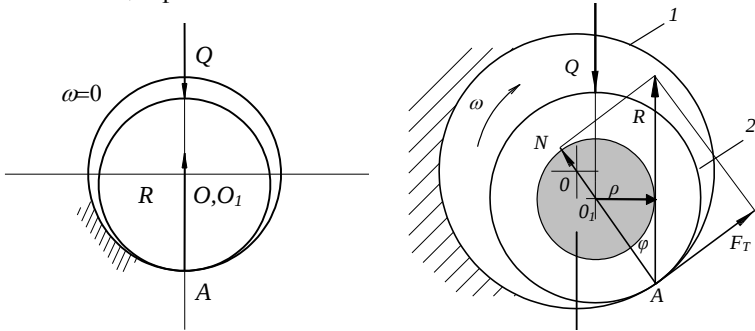


Рис. 4.7

Момент M_T , який необхідно прикласти для повороту вала 2 в підшипнику 1, буде дорівнювати

$$M_T = R\rho = Rrf'.$$

4.2. Тертя гнучкої ланки

У техніці широке застосування отримали механізми з гнучкими ланками: пасові, канатні передачі, стрічкові гальма та пили, транспортери.

Формулу, що зв'язує основні параметри передачі гнучкою ланкою отримав в 1765 р. Л.Ейлер. При її виводі були прийняті такі припущення: гнучка ланка не розтягується і не чинить опору згину при набіганні і збіганні, вона рухається зі сталою швидкістю V , її масою та відцентровою силами нехтуємо.

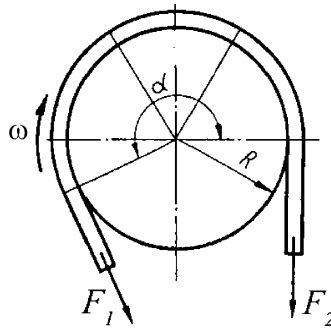


Рис. 4.8

Формула Ейлера, що зв'язує параметри передачі гнучкою ланкою

$$F_2 = F_1 e^{f\alpha},$$

де α – кут обхвату; F_1 – натяг набігаючого кінця; F_2 – натяг збігаючого кінця.

Сила тертя гнучкої ланки

$$F_T = F_2 - F_1 = F_1 (e^{f\alpha} - 1).$$

При усталеному русі гнучкої ланки з постійною швидкістю різниця натягів збігаючого та набігаючого кінців дорівнює силі тертя між ниткою та шківом (рис. 4.8).

Сила F_T є тією найбільшою коловою силою, яку можна передати шківу. Якщо коловий опір на веденому шківі дорівнює або менше сили F_T , то гнучка ланка змусить шків обертатися. Коли ж коловий опір більший від сили F_T , то гнучка ланка ковзатиме по шківу, не обертаючи його.

4.3. Основні відомості про рідинне тертя

Рідинне тертя має місце, якщо поверхні взаємодіючих ланок повністю розділені шаром мастила. При відносному русі ланок відбувається зсув окремих шарів мастила один відносно одного. Отже, тертя зводиться до в'язкого зсуву шарів мастила. Воно визначається гідродинамічними явищами, що відбуваються в рухомому шарі мастила.

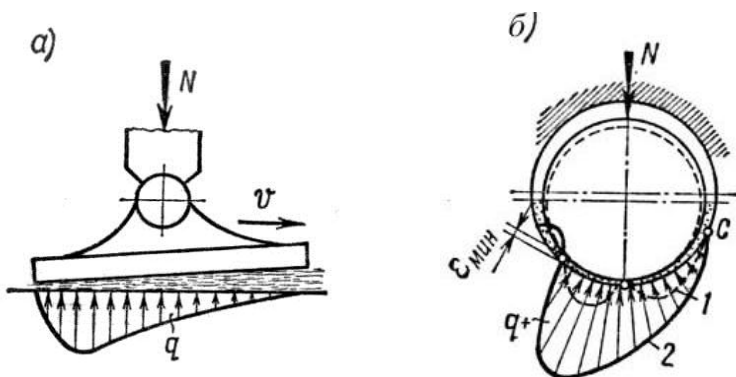


Рис. 4.9

Узагальнення експериментальних даних дозволяє приймати для визначення сили в'язкого тертя таку формулу

$$F = k\delta,$$

тобто сила рідинного тертя пропорційна швидкості.

Основоположником рідинного тертя є М.П. Петров. їм були сформульовані основні вимоги необхідні для виникнення рідинного тертя:

- між поверхнями тертя має бути забезпечений клиновидний зазор (рис. 4.9);

- мастило повинно утримуватися в зазорі. Для цього потрібно, щоб при змочуванні поверхонь елементів кінематичних пар мастилом сили зчеплення між поверхнями та прилеглим шаром мастила були більшими за сили зчеплення між частинками мастила;

- у шарі мастила повинен виникати і підтримуватися внутрішній тиск, який зрівноважує зовнішнє навантаження;

- мастило повинно повністю відокремлювати поверхні елементів кінематичних пар. Шар мастила між поверхнями повинен мати товщину не меншу за деяку мінімальну величину, яка визначається сумою найбільших нерівностей двох поверхонь.

Більш детально розрахунок кінематичних пар при рідинному терті розглядається у спеціальних курсах.

4.4. Тертя кочення

Тертя кочення має місце у вищих кінематичних парах, наприклад, при відносному русі профілів зубчастих коліс, при русі кульок чи роликів по доріжках підшипників кочення та роликів по кулачках тощо. Тертям кочення називають опір, який виникає при перекочуванні одного тіла по поверхні іншого. Цей опір виникає головним чином від того, що тіла не є абсолютно твердими і завжди дещо деформуються в місцях їх стикання. Досвід показує,

що опір перекочуванню тіл залежить від пружних властивостей тіл, які стикаються, їх кривизни та сили притискання.

Фізичні явища, які викликають тертя кочення, вивчені мало. В технічних розрахунках користуються переважно даними, одержаними при експериментальних дослідженнях, які проводились над різними конкретними об'єктами: котками, колесами, роликами та шариками в підшипниках тощо.

На подолання опору при перекочуванні тіл витрачається певна робота, яка йде переважно на деформацію стичних поверхонь. Якщо на коток, який лежить на горизонтальній площині (рис. 2.10, а), діє тільки сила N , то деформація котка і опорної поверхні симетричні відносно лінії дії сили N . В результаті деформації вони дотикаються не однією точкою (лінією), а по певній поверхні. Реакція з боку опорної поверхні розподіляється по всій площині контакту. Згідно з положенням теорії пружності, напруження в зоні контакту розподіляються за еліптичним законом. При цьому крива напружень симетрична, а значить, напрямок рівнодіючої R цих напружень збігається з напрямком сили N . За модулем нормальна реакція R дорівнює силі N і напрямлена в протилежний від неї бік.

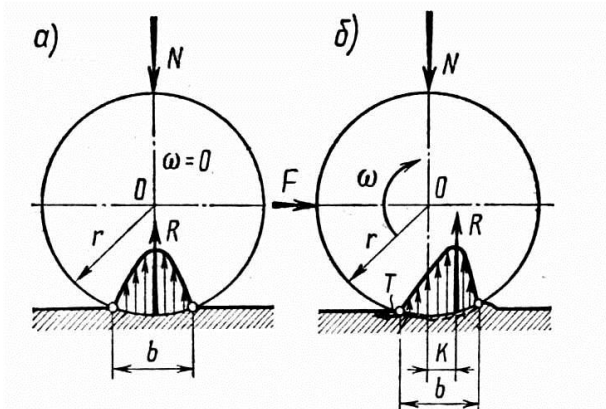


Рис. 4.10

Якщо на коток діє деяка горизонтальна сила F (рис. 2.10, б), то деформація котка і опорної поверхні вже несиметрична відносно лінії дії сили N . Відповідно, розподіл напружень відносно лінії дії сили N буде також несиметричним з максимумом, зсунутим у бік руху котка. Отже, рівнодіюча напружень R буде зміщена в бік руху на деяку величину k . Дослідні дані свідчать, що при чистому коченні циліндричного тіла момент опору кочення дорівнює

$$M_T = kN, \quad (3)$$

де роль коефіцієнта пропорційності відіграє коефіцієнт опору кочення, або,

як його ще називають, плече тертя кочення k . Як слідує з формули (3), коефіцієнт тертя кочення k вимірюється одиницею довжини (мм або см), в той час як коефіцієнт тертя ковзання є безрозмірна величина. Він визначає максимальне значення зміщення нормальної реакції R відносно лінії дії сили N .

Момент тертя кочення, це момент пари сил N , R , яка виникає під час кочення або при намаганні котити коток по поверхні іншого тіла. Його модуль залежить від активних сил і може приймати значення в межах від нуля до певної максимальної величини $0 < M_T \leq M_{T_{\max}}$.

Коефіцієнт тертя кочення залежить від пружних властивостей матеріалів тіл тертя, стану їх поверхні та радіусів кривини. На практиці, як правило, користуються значеннями, знайденими експериментальним шляхом. Наприклад, для сталюого колеса та рейки $k = 0,05$ мм, для гартованих сталюних шариків і роликів – 0,01 мм, чавуну по чавуну – 0,05 мм, дерева по сталі – 0,3–0,4 мм, дерева по дереву – 0,5–0,8 мм.

Знайдемо рушійну силу F , яку необхідно прикласти до котка, щоб він рівномірно перекочувався по площині при деякому моменті опору M . З рівняння моментів сил, що діють на коток, відносно точки контакту маємо $Fr = kN$, звідси рушійна сила

$$F = \frac{k}{r} N. \quad (4)$$

Втрати енергії при терті кочення, як правило, значно менші, ніж при терті ковзання. Ось чому в техніці намагаються при можливості замінити тертя ковзання тертям кочення. Для цього широко використовується колісний транспорт, підшипники кочення, шарикові або роликіві напрямні тощо.

Оскільки на практиці, звичайно, тертя кочення супроводжується тертям ковзання, то важливо розглянути, за яких умов яке тертя має місце. Тут можливі три випадки. У зоні дотику тіл кочення виникає дотична реакція T (рис. 2.6), що характеризує собою силу зчеплення, або силу тертя спокою. Згідно з умовою рівноваги котка, $M_p = M_T$. При рівномірному русі котка пари сил F , T і N , R зрівноважені. Пара сил F , T спричиняє кочення котка, а пара сил N , R протидіє цьому руху, що є причиною опору коченню. Сила T , входячи до складу пари сил, забезпечує перекочування котка. Чисте кочення за допомогою сили F є можливим лише у тому випадку, коли коток достатньо зчіплюється з опорною поверхнею, тобто $T > F$. Тоді при врахуванні (4) будемо мати

$$fN > \frac{k}{r} N, \text{ або } f > \frac{k}{r} - \text{умова чистого кочення,}$$

де f – коефіцієнт тертя спокою.

При $T < F$ сила F може викликати лише ковзання котка. Якщо

$T = F$, тобто $f = k/r$, то можливе одночасне кочення і ковзання, тобто з'являється невизначеність у русі.

Розглянемо деякі приклади з техніки, де використовується тертя кочення.

Переміщення на котках. Для переміщення важких тіл (верстатів, пристроїв, великогабаритних двигунів, редукторів тощо) на невеликій відстані використовують котки у вигляді циліндричних стержнів чи труб. Визначимо силу F , яку необхідно прикласти до платформи з вантажем для її рівномірного руху (рис. 4.11).

При переміщеннях платформи на котках, момент сил тертя звичайно визначається за формулою (3) моменту опору при коченні. Але в розглядуваному випадку момент опору виникає, як при коченні котка по нерухомій опорній поверхні (момент, що виникає у нижніх точках дотику котків), так і при коченні платформи на котках (додаткова складова сумарного моменту опору, що виникає у верхніх точках дотику котків з платформою)

$$M = N_1 k_1 n + N_2 k_2 n,$$

де $N_1 = Q/n$, $N_2 = \frac{Q}{n} + G$; G – вага котка; n – число котків; k_1, k_2 – відповідно коефіцієнти опору кочення у верхніх та нижніх точках дотику котків з опорною поверхнею.

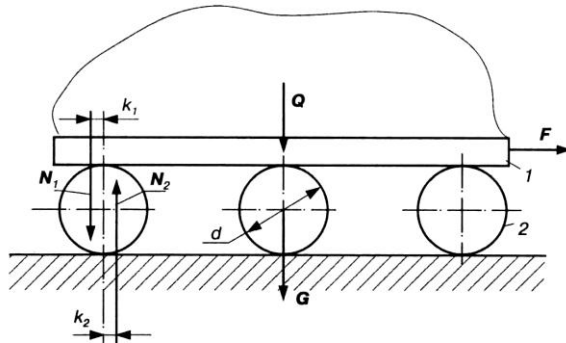


Рис. 4.11

Необхідна рушійна сила F може бути знайдена з рівняння моментів складеного відносно полюса миттєвого обертання, тобто точки нижнього контакту котка з опорною поверхнею

$$Fd = Qk_1 + (Q + nG)k_2,$$

звідки

$$F = Q \frac{k_1}{d} + (Q + nG) \frac{k_2}{d}.$$

Якщо вагою котків знехтувати то рушійну силу можна подати у

вигляді

$$F = f^* Q, \quad (4)$$

де $f^* = \frac{k_1 + k_2}{d}$ – зведений коефіцієнт тертя при переміщеннях на котках. При

однакових матеріалах платформи та опорної поверхні матимемо $f^* = k_1 / r$.

Таким чином, необхідна рушійна сила для рівномірного переміщення платформи загальна сила опору (сила тертя) визначається за формулою (5). З формули випливає, що збільшуючи радіус котків, можна зменшити силу опору переміщення на котках. Відмітимо, що при заданих величинах k_1 та k_2 зв'язок f і r носить гіперболічний характер.

Переміщення вантажу на напрямних роликах. Момент сил опору кочення у кінематичних парах 1–2, де відбувається дотик плити 1 з роликами 2 (рис. 4.12), визначається за формулою (випадок чистого кочення)

$$M_k = Qk,$$

де Q – загальне навантаження на плиту; k – коефіцієнт опору коченню.

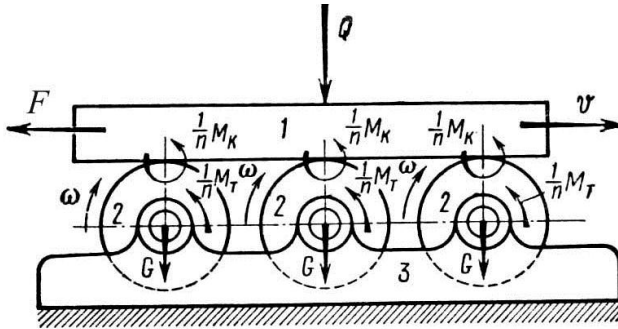


Рис. 4.12

Момент опору тертя ковзання у кінематичних парах 2–3 (цапфі ролика у підшипнику ковзання нерухомої основи) можна визначити за формулою

$$M_T = n \left(\frac{Q}{n} + G \right) f^* (d/2),$$

де G – вага ролика; n – кількість роликів; d – діаметр цапфи ролика; f^* – коефіцієнт тертя ковзання у кінематичній парі 2–3

Таким чином, загальний момент опору переміщення вантажу на

напрямних роликах дорівнює

$$M = Qk + (Q + nG) f^* (d/2).$$

Якщо вагою роликів знехтуємо ($G = 0$), то матимемо

$$M = Q(k + f^* r).$$

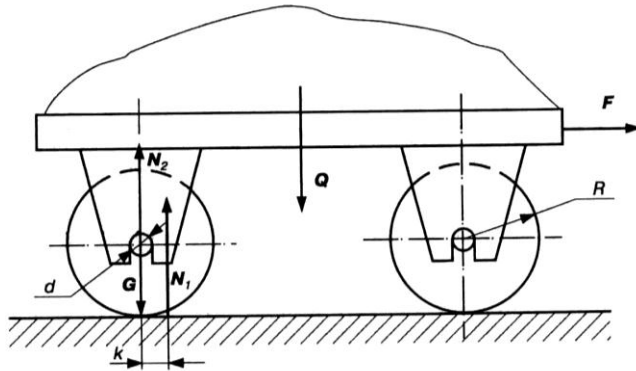


Рис. 4.13

Рухісна сила, що забезпечує рівномірний рух плити вагою Q на напрямних роликах визначається з умови рівності моменту рухливих сил сумі моментів сил опору ковзанню та коченню

$$F = \frac{k + f^* r}{R} Q = f' Q,$$

де $f' = \frac{k + f^* r}{R}$ – зведений коефіцієнт тертя при переміщеннях плити на напрямних роликах; R – радіус ролика.

Умова чистого кочення. Сила, що приводить в рух котки, має бути меншою за силу тертя спокою у зоні дотику плити з роликами

$$F \leq fQ,$$

де f – коефіцієнт тертя спокою у місцях дотику плити з роликами. Таким чином умова чистого кочення буде

$$f \geq \frac{k + f^* r}{R}.$$

Слід відмітити, що задача переміщення вантажу на колесах (рис. 4.13) розв'язується аналогічно розглянутій.

У цьому випадку для переміщення платформи з вантажем також необхідно подолати не лише сили тертя кочення між колесами і опорною поверхнею (дорогою), але й сили тертя в буксових вузлах (підшипниках), через які навантаження передається від платформи до коліс.

4.5. Механічний коефіцієнт корисної дії

Механічний коефіцієнт корисної дії (ККД) є важливою енергетичною характеристикою механізму і вказує на ефективність використання енергії в машині.

$A_p = A_0$, $A_p = A_{к.о.} + A_{ш.о.}$ – рівняння робіт за цикл усталеного руху,

де A_p , $A_{к.о.}$, $A_{ш.о.}$ – робота рушійних сил, корисного та шкідливого опору.

Механічним ККД називають відношення роботи сил корисного опору до роботи рушійних сил за цикл усталеного руху, тобто

$$\eta = \frac{A_{к.о.}}{A_p}.$$

ККД є відношенням абсолютного значення роботи сил корисних опорів до роботи рушійних сил за цикл усталеного руху. Машина є тим досконаліша, чим більша частина роботи рушійних сил витрачається на подолання сил корисних опорів та чим менша частина витрачається на подолання сил шкідливих опорів, тобто чим більший ККД.

ККД звичайно визначається для усталеного періоду руху механізму. У випадку, якщо його величина є змінною, то визначають середню величину цього коефіцієнта. Переважно ККД окремих механізмів визначається експериментально та наводиться у довідниках.

ККД групи механізмів (машин, кінематичних пар) залежить від з'єднання окремих складових. Механізми можуть бути з'єднані послідовно, паралельно і комбіновано.

ККД групи послідовно з'єднаних механізмів. При послідовному з'єднанні (рис. 4.14, а) весь енергетичний потік проходить через усі механізми. Внаслідок того, що корисна робота попереднього механізму (витрачається на виробничий опір) є роботою рушійних сил для кожного наступного механізму, то

$$\eta_1 = A_1/A_p; \eta_2 = A_2/A_1; \eta_3 = A_3/A_2 \dots \eta_n = A_n/A_{n-1}.$$

Загальний ККД

$$\eta = \frac{A_n}{A_p} = \frac{A_1}{A_p} \frac{A_2}{A_1} \frac{A_3}{A_2} \dots \frac{A_n}{A_{n-1}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n \quad (5)$$

Таким чином, при послідовному з'єднанні загальний ККД дорівнює добутку ККД окремих механізмів.

ККД групи паралельно з'єднаних механізмів. Нехай є машинний агрегат, який складається з n паралельно з'єднаних механізмів (рис. 4.14, б). Робота рушійних сил A_p , яка підводиться до машинного агрегату, розподіляється якимось чином між окремими механізмами, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Звичайно $A_p = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$. Кожна з робіт $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ є роботою рушійних сил для відповідного механізму.

Представимо ККД кожного з механізмів таким чином:

$$\eta_1 = \frac{A'_1}{A_1}, \quad \eta_2 = \frac{A'_2}{A_2}, \quad \eta_3 = \frac{A'_3}{A_3}, \quad \dots, \quad \eta_n = \frac{A'_n}{A_n}.$$

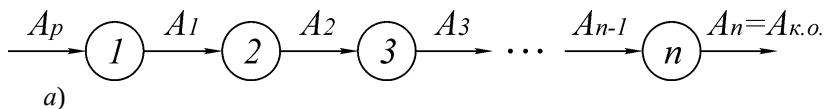
Тоді загальний ККД машинного агрегату при паралельному з'єднанні можна подати у наступному вигляді:

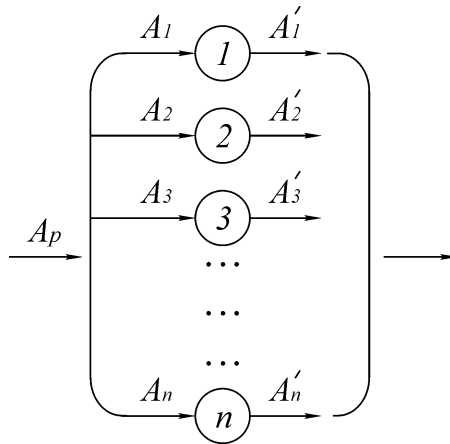
$$\eta_{\text{заг}} = \frac{A_{\text{к.о.}}}{A_p} = \frac{A'_1 + A'_2 + A'_3 + \dots + A'_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n} = \frac{A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3 + \dots + A_n \eta_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}. \quad (6)$$

З формули (6) слідує, що загальний ККД, являє собою дріб, в якому чисельник та знаменник є, відповідно, сумами чисельників та знаменників часткових ККД механізмів, що входять до складу машинного агрегату.

Відомо, що при утворенні таким чином дробу з декількох дробів, отримується число більше за найменше але менше за найбільше із значень дробів. Отже, і загальний ККД буде більшим за найменший частковий ККД, але меншим за найбільший частковий ККД, $\eta_{\min} < \eta_{\text{заг}} < \eta_{\max}$.

З виразу (6) також випливає, що при паралельному з'єднанні механізмів загальний ККД машинного агрегату залежить не лише від ККД часткових механізмів, але й від характеру розподілу роботи рушійних сил між окремими механізмами.





б)

Рис. 4.14

Часткові випадки з'єднання механізмів.

1. Роботи рушійних сил розподіляються між окремими механізмами рівномірно, $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n = A$. Тоді загальний ККД, згідно з (6) матиме вигляд:

$$\eta_{\text{заг}} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_n}{n},$$

тобто дорівнює середньому арифметичному окремих ККД, які входять до складу машинного агрегату.

2. ККД усіх механізмів однакові, тобто $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \dots = \eta_n = \eta$, то загальний ККД машинного агрегату дорівнює ККД окремого механізму

$$\eta_{\text{заг}} = \eta.$$

Відмітимо, що при паралельному з'єднанні механізмів, за інших рівних умов, є можливість отримати вищий ККД, ніж при послідовному з'єднанні.

Питання для самоконтролю

16. Що вивчає динаміка? Сформулюйте основні задачі динаміки.
17. Сили, що діють на ланки механізму, та їх коротка характеристика.
18. Механічні характеристики машин. Приклади типових механічних характеристик.
19. Принцип Д'Аламбера. Визначення сил інерції ланок механізму.
20. Загальна методика силового розрахунку плоских важільних механізмів.
21. Порядок силового розрахунку плоских важільних механізмів.
22. Основні задачі силового розрахунку. Реакції в кінематичних парах V та IV класів.
23. Умови статичної визначеності кінематичних ланцюгів.
24. Теорема Жуковського про жорсткий важіль.
25. Визначення зрівноважувальної сили за допомогою важеля Жуковського.
26. Силовий розрахунок механізму першого класу.
27. Механічний коефіцієнт корисної дії.
28. ККД групи паралельно з'єднаних механізмів.
29. Тертя в механізмах і машинах. Види тертя.
30. Тертя ковзання сухих тіл.
31. Кут і конус тертя. Умова самогальмування.
32. Зведений коефіцієнт тертя.
33. Тертя в клиновій поступальній парі.
34. Тертя у гвинтовій кінематичній парі.
35. Тертя в обертових кінематичних парах.
36. Тертя гнучкої ланки.
37. Основні відомості про рідинне тертя.
38. Тертя кочення. Умова чистого кочення.

ГЛАВА 5. ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МАШИННОГО АГРЕГАТУ З ЖОРСТКИМИ ЛАНКАМИ

Вивчення закону руху машинного агрегату під дією заданих сил є однією з основних задач динаміки. Для розв'язку цієї задачі необхідно скласти рівняння руху системи і розв'язати його відносно невідомого кінематичного параметра. При визначенні закону руху задача може бути суттєво спрощена, якщо перейти до динамічної моделі.

Отже, вивчення динаміки машинного агрегату повинно починатися з вибору динамічної моделі. Вибір динамічної моделі того чи іншого об'єкта залежить, у першу чергу, від його конструктивних особливостей, мети дослідження та характеру задачі, що розглядається. Вибираючи динамічну модель машини потрібно, перш за все, виділити ті її властивості, які представляються найбільш суттєвими для поставленої задачі та, навпаки, абстрагуватися від часткових особливостей системи, котрі можуть рахуватися неважливими.

В більшості випадків ланки механізмів є твердими тілами, які незначно деформуються в процесі руху. Найбільш простим способом ідеалізації є перехід від реального машинного агрегату до такого, що містить лише механізми з жорсткими ланками. При цьому виходять з таких припущень: усі ланки, які є твердими тілами рахуються абсолютно твердими; гнучкі ланки (паси, муфти і т.п.) – нерозтяжні; рідкі – такі, що не стискаються; усі кінематичні пари ідеально реалізують рівняння в'язей, якими вони описуються; відсутні зазори, поверхні вищих кінематичних пар, що дотикаються не деформуються і т.п. У жорсткому машинному агрегаті число ступенів вільності (тобто число незалежних параметрів, які однозначно визначають положення усіх ланок механічної системи) співпадає з числом ступенів рухомості. Зокрема, в жорсткому машинному агрегаті з одним двигуном координати усіх точок є функціями однієї узагальненої координати. Машину, механічна система якої складається з механізмів з жорсткими ланками, будемо називати жорсткою машиною. Жорстка машина в принципі не дозволяє визначати деформації реальних ланок та кінематичних пар. У той час, як у сучасних потужних та високошвидкісних машинах ці деформації та пов'язані з ними вібрації (пружні коливання) мають першочергове значення. Вони можуть істотно впливати на точність механізмів, викликати значні динамічні навантаження та збільшувати втрати енергії. У цьому разі, для дослідження потрібно використовувати складніші динамічні моделі – моделі механізмів з пружними ланками. Дослідження руху машинного агрегату з урахуванням пружності ланок розглядається в наступному розділі.

Побудова динамічної моделі механічної системи полягає в ідеалізації реальних ланок і кінематичних пар, у заміні їх деякими фізичними моделями.

Перший етап динамічного дослідження полягає в спрощенні вихідного об'єкта, тобто у заміні його деякою моделлю (схемою), у якій намагаються відобразити найбільш суттєві властивості розглядуваної механічної системи. Таким чином, динамічна модель – це ідеалізоване відображення розглядуваної системи при її теоретичному дослідженні та інженерних розрахунках. Кожній динамічній моделі відповідає своя математична модель, тобто система диференціальних, інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь, за допомогою яких здійснюється математичне описання динамічної моделі.

Третім етапом динамічного розрахунку є розв'язання рівнянь, отриманих при складанні математичної моделі. При цьому використовуються як аналітичні, так і чисельні методи.

Четвертим етапом дослідження є аналіз отриманих розв'язків з позицій поставленої інженерної задачі. На основі цього етапу можуть бути внесені рекомендації щодо вибору параметрів машини або корекція вихідних значень параметрів.

5.1. Динамічна модель машинного агрегату з одним ступенем вільності з жорсткими ланками

Машинний агрегат – це, переважно, сукупність машини-двигуна, механізму передач та робочої машини. Це, як правило, багатоланкова система, навантажена багатьма силами та моментами, прикладеними до різних ланок. На рис. 3.1, як приклад, приведена силова установка, в якій ДВЗ приводить в рух через зубчасту передачу вал робочої машини – відцентрової помпи. До ланок машинного агрегату під час руху прикладені різні сили: рушійна сила F_d , сила корисного опору – момент M_{PM} , сили тяжіння, в усіх кінематичних парах діють сили тертя. Характер дії цих сил різний: деякі залежать від положення чи швидкості ланок, інші постійні. При цьому кожна ланка має свою масу, момент інерції. Своїми діями прикладені сили надають механізму той чи інший закон руху. Визначення закону руху такої складної багатоланкової системи становить непросту задачу.

У той же час для механізму, що має один ступінь вільності, задачу можна вважати розв'язаною, якщо буде відомий закон руху однієї ланки, яка таким чином буде початковою. Закон руху інших ланок і точок механізму після цього можна без значних зусиль визначити методами кінематичного аналізу.

Викладене наводить на думку замінити весь складний багатоланковий механізм однією умовною рухомою ланкою. Виберемо за таку ланку 1 (рис. 5.1, а) та виділимо її разом зі стояком (рис. 5.1, б). До умовної ланки пред'явимо такі вимоги: нехай її момент інерції $I_{зб}$ і момент сил $M_{зб}$, якими вона навантажена, будуть такими, що закон руху умовної ланки буде повністю співпадати з законом руху ланки 1 заданого механізму, тобто для

будь-якого моменту часу буде справедливим рівняння

$$\omega_1 = \omega_m,$$

де ω_1 - кутова швидкість кривошипу 1 заданого механізму, ω_m - кутова швидкість умовної ланки (моделі).

Це означає, що умовна ланка зі стояком є своєрідною динамічною моделлю машинного агрегату. Таким чином, якщо визначити закон руху цієї простої моделі (рис. 5.1, б), то автоматично стане відомим дійсний закон руху початкової ланки заданого механізму. Зазначимо, якщо заданий механізм має кривошип, то його доцільно вибрати за рухомо ланку динамічної моделі.

Підсумуємо викладене. Побудова динамічної моделі машинного агрегату полягає в заміні заданого багатоланкового механізму, навантаженого довільною системою сил та моментів, простою динамічною моделлю (рис. 5.1, б) – однією умовною рухомою ланкою зі стояком. При цьому, всі сили і моменти, що прикладені до заданого механізму, замінені, як правило, одним зведеним моментом, що прикладений до умовної ланки. Отже, $M_{зб}$ є еквівалентом до всього навантаження, прикладеного до машинного агрегату. Так само маси всіх ланок замінені моментом інерції умовної ланки - зведеним моментом інерції $J_{зб}$.

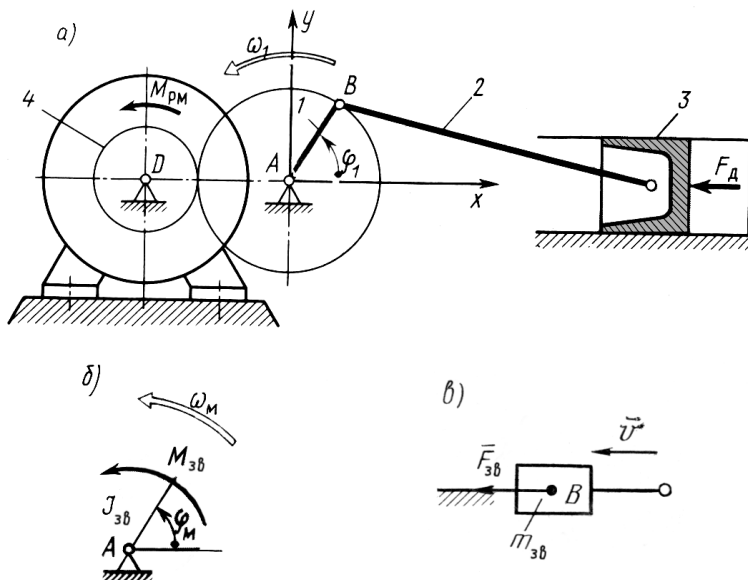


Рис. 5.1

Таким чином, побудова динамічної моделі полягає в зведенні сил –

визначенні M_{36} і в зведенні мас – визначенні I_{36} . При цьому, щоб динамічна модель була адекватна заданому механізму, необхідно (слідє з рівняння Лагранжа II роду, принципу можливих переміщень), щоб при зведенні сил була витримана умова рівності елементарних робіт всіх сил і моментів, прикладених до ланок реального механізму, і зведеної сили; при зведенні мас – умова рівності кінетичних енергій мас реального механізму і зведеного моменту інерції моделі.

Наголосимо: побудова динамічної моделі дає змогу, розв'язуючи задачі динаміки, розглядати не весь складний машинний агрегат з багатьма ланками, що мають різні маси та на які діють різні сили, а одну умовну ланку з однією еквівалентною масою (чи моментом інерції) із прикладеною до неї, як правило, однією силою (чи моментом).

Зазначимо, що в загальному випадку розрізняють дві динамічні моделі: з розподіленою масою (рис. 5.1, б), та із зосередженою масою (рис. 5.1, в). Остання застосовується, переважно, якщо в складі механізму немає жодної ланки, що здійснює обертальний рух.

5.2. Зведення сил та мас

При дослідженні руху механізму зручно замінити усі сили та моменти, звівши їх до однієї ланки, еквівалентною з точки зору динаміки, силою чи моментом сил. При цьому необхідно, щоб елементарна робота на розглядуваному можливому переміщенні, або потужність, що розвивається заміною силою чи моментом, була рівна, відповідно, сумі елементарних робіт або потужностей, що розвивають усі сили та моменти, які прикладені до ланок механізму на цьому ж переміщенні.

Сили чи моменти, що задовольняють цій умові, називають *зведеними силами та моментами*. Ланка, до якої зводяться сили та моменти (маси), називається *ланкою зведення*, а точка прикладання зведеної сили – *точкою зведення*. Зазвичай за ланку зведення приймають ту ланку, за узагальненою координатою якої проводяться дослідження механізму. Частіше це початкова ланка, головний вал робочої машини або вихідний вал машини-двигуна.

Для визначення зведеної сили чи моменту може бути використана рівність

$$P_{3B} = \sum_1^n P_i, \quad (1)$$

де P_{3B} – потужність, що розвиває зведена сила чи зведений момент; $\sum_1^n P_i$ – сумарна потужність усіх сил та моментів, що підлягають зведенню.

Потужність P_{3B} може бути представлена, як

$$P_{3B} = M_{3B} \omega, \quad \text{або} \quad P_{3B} = F_{3B} V_B, \quad (2)$$

де M_{3B} – зведений момент; ω – кутова швидкість ланки зведення; F_{3B} – величина зведеної до точки B сили; V_B – швидкість точки зведення (рис. 5.1, в).

Права частина рівності (1) в розгорнутому вигляді може бути представлена так

$$\sum_1^n P_i = \sum_1^n (F_i v_i \cos \alpha_i + M_i \omega_i), \quad (3)$$

де F_i , M_i – сила і момент, які прикладені до i -ої ланки; v_i – швидкість точки прикладання сили F_i ; α_i – кут, утворений силою F_i та вектором швидкості v_i ; ω_i – кутова швидкість i -ої ланки.

З рівнянь (2) та (3) отримуємо

$$M_{3B} = \sum_1^n \left(F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{\omega} + M_i \frac{\omega_i}{\omega} \right), \quad (4)$$

$$F_{3B} = \sum_1^n \left(F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{v_B} + M_i \frac{\omega_i}{v_B} \right). \quad (5)$$

Існує таке визначення: зведеним моментом (силою) називають момент (силу), що умовно прикладений до ланки зведення, миттєва потужність якого дорівнює сумі миттєвих потужностей усіх сил і моментів, що діють на ланки механізму.

Наголосимо, що при заданих силах F_i та моментах M_i визначення зведеного моменту чи зведеної сили не являє значних труднощів і може бути легко проведене, наприклад, якщо для кожного досліджуваного положення механізму буде побудований план швидкостей.

Зазначимо, що деколи окремо зводять рушійні сили, сили опору, сили ваги і т.ін. Формули (4), (5) залишаються справедливими в усіх випадках, потрібно лише вказати, які сили зводяться.

Зведення мас. Заміна мас рухомих ланок механізму зведеною масою, зосередженою в довільно вибраній точці ланки зведення, або зведеним моментом інерції виконується на основі еквівалентності миттєвих значень кінетичних енергій моделі $T_{\text{мод}}$ та всього механізму $T_{\text{мех}}$

$$T_{\text{мод}} = T_{\text{мех}}.$$

Кінетична енергія плоского механізму для будь-якого його положення дорівнює сумі кінетичних енергій усіх його рухомих ланок T_i і в загальному випадку може бути представлена у вигляді

$$T_{\text{мех}} = \sum_1^n T_i = \sum_1^n \left(\frac{I_{si} \omega_i^2}{2} + \frac{m_i v_{si}^2}{2} \right),$$

де I_{si} – момент інерції i -ої ланки відносно осі, що проходить через центр мас s_i перпендикулярно площині руху; ω_i – кутова швидкість i -ої ланки; m_i – маса i -ої ланки; v_{si} – швидкість центру мас i -ої ланки.

Вирази кінетичної енергії $T_{\text{мод}}$ для ланки зведення, або точки зведення:

$$T_{\text{мод}} = \frac{I_{3B} \omega^2}{2}, \text{ або } T_{\text{мод}} = \frac{m_{3B} v_B^2}{2}. \quad (6)$$

Згідно з умовою динамічної еквівалентності механізму та моделі отримаємо

$$\frac{I_{3B} \omega^2}{2} = \sum_1^n \left(\frac{I_{si} \omega_i^2}{2} + \frac{m_i v_{si}^2}{2} \right),$$

або $\frac{m_{3B} v_B^2}{2} = \sum_1^n \left(\frac{I_{si} \omega_i^2}{2} + \frac{m_i v_{si}^2}{2} \right)$, звідки

$$I_{3B} = \sum_1^n \left\{ I_{si} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 + m_i \left(\frac{v_{si}}{\omega} \right)^2 \right\}, \quad (7)$$

$$m_{3B} = \sum_1^n \left\{ I_{si} \left(\frac{\omega_i}{v_B} \right)^2 + m_i \left(\frac{v_{si}}{v_B} \right)^2 \right\}. \quad (8)$$

Зустрічаються такі визначення: - зведеним моментом інерції називається такий умовний момент інерції, кінетична енергія якого у кожному розглядуваному положенні механізму дорівнює сумі кінетичних енергій всіх його ланок;

- зведена маса являє собою таку умовну масу, зосереджену в деякій точці зведення, кінетична енергія якої в кожному розглядуваному положенні механізму дорівнює сумі кінетичних енергій всіх його ланок.

Зведені сила та маса, згідно з рівняннями (4)-(8), залежать від співвідношень, відповідно, швидкостей ланок механізму до швидкості ланки зведення та квадратів цих відношень. Ці співвідношення, в загальному випадку, залежать тільки від положення механізму, але вони будуть однаковими при будь-якому законі руху механізму. Отже, зведена сила і маса, як правило, є величинами змінними, періодичними функціями, які залежать від узагальненої координати механізму.

З викладеного робимо висновок, що модель, якою замінюється механізм, є умовним тілом тому, що в загальному випадку її момент інерції (маса) є змінними, тоді як реальні фізичні тіла мають постійні моменти інерції (маси). Лише в окремих випадках, коли передатне відношення механізму є сталим (наприклад, зубчасті, фрикційні механізми, шарнірний паралелограм та інші), зведений момент інерції постійний.

Таким чином, оскільки $I_{зв}, M_{зв}$ не залежать від закону руху, зведення мас та сил можна виконувати і не знаючи законів руху механізму. Отже, розв'язуючи задачі динаміки, цілком можливо (і потрібно) спочатку побудувати динамічну модель механізму, виконавши зведення сил та мас, а потім вже знаходити закон її руху.

5.3. Рівняння руху механізму

Для визначення законів руху початкових ланок за заданими силами використовуються рівняння, що називаються рівняннями руху механізму. Число цих рівнянь дорівнює числу ступенів рухомості механізму.

Рівняння руху механізму можуть бути представлені в різних формах. Для механізмів з одним ступенем вільності одна з найпростіших форм рівнянь отримується на основі теореми про зміну кінетичної енергії: зміна кінетичної енергії механізму на деякому переміщенні дорівнює сумі робіт усіх сил, що діють на ланки механізму на цьому самому переміщенні. Цей закон подають у вигляді рівняння

$$T - T_0 = \sum A, \quad (9)$$

де T – кінетична енергія механізму в довільному положенні; T_0 – кінетична енергія механізму в положенні, що приймається за початкове; $\sum A$ – алгебраїчна сума робіт усіх сил і моментів, що прикладені до механізму на деякому переміщенні.

Роботу здійснюють усі активні сили і моменти та сили тертя у всіх кінематичних парах механізму.

Рівняння руху в енергетичній формі. Зведемо усі сили і моменти механізму з одним ступенем вільності до однієї ланки зведення, тобто замінимо розглядуваний механізм його динамічною моделлю. Оскільки все навантаження, прикладене до моделі, виражається зведеним моментом $M_{зв}$, то права частина рівняння (9) дорівнює

$$\sum A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зв} d\varphi, \quad (10)$$

а саме рівняння (9), враховуючи (6), можна записати у вигляді

$$\frac{I_{3B}\omega^2}{2} - \frac{I_{3B0}\omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi. \quad (11)$$

Рівняння (11) називають *рівнянням руху механізму в енергетичному вигляді*, або – в формі рівняння кінетичної енергії. Загалом верхня межа φ інтегрування в (11) вважається змінною.

Якщо все навантаження, що прикладене до механізму, залежить тільки від його положення (і не залежить від ω), то рівняння (10) розв'язується безпосередньо відносно шуканої величини ω

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi}{I_{3B}} + \frac{I_{3B0}}{I_{3B}} \omega_0^2}. \quad (12)$$

При заданих функціях I_{3B} , M_{3B} і відомій швидкості ω_0 в початковий момент, рівняння (12) дозволяє визначити значення ω при різних переміщеннях ланки зведення. Таким чином можна отримати дійсний закон руху механізму.

Якщо дослідження механізму починається з моменту пуску (тобто $\omega_0 = 0$), то (12) набуде вигляду

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi}{I_{3B}}}.$$

Аналогічно (11) можна представити рівняння руху механізму, якщо всі сили і маси зводяться до вибраної точки зведення B

$$\frac{m_{3B} v_B^2}{2} - \frac{m_{3B_0} v_{B_0}^2}{2} = \int_{s_0}^s F_{3B} ds. \quad (13)$$

Рівняння руху в диференційній формі. Рівняння руху механізму в енергетичній формі (11) використовується, переважно, у випадках коли зведені силові фактори залежать від положень ланок. В інших випадках використовується диференційне рівняння руху механізму, яке можна отримати, продиференціювавши рівняння (11) по координаті φ .

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{I_{3B}\omega^2}{2} \right) = M_{3B},$$

або, враховуючи, що в загальному випадку змінною величиною є не тільки ω , але й I_{3B} , після нескладних перетворень одержимо

$$I_{3B} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2 dI_{3B}}{2d\varphi} = M_{3B}. \quad (14)$$

Рівняння (14) називається *рівнянням руху в диференціальній формі*, оскільки шукана змінна величина – кутова швидкість ω початкової ланки, знаходиться під знаком похідної.

У випадку, коли досліджуваний механізм має $I_{3B} = \text{const}$, то рівняння (14) спрощується і має вигляд

$$I_{3B} \frac{d\omega}{dt} = M_{3B}.$$

Для визначення кутового прискорення початкової ланки розв'яжемо рівняння (14) відносно $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{M_{3B}}{I_{3B}} - \frac{\omega^2}{2I_{3B}} \frac{dI_{3B}}{d\varphi}.$$

Похідна $\frac{dI_{3B}}{d\varphi}$ обчислюється чисельним диференціюванням з використанням ЕОМ, або графічним диференціюванням, якщо це не можливо зробити аналітично. У більшості випадків диференціальне рівняння руху (14) може бути проінтегровано лише чисельними методами. Точний розв'язок рівняння можна одержати лише тоді, коли сили що діють на ланки механізму є функціями положень ланок

5.4 Режим руху

Дослідження динаміки машин полягає, в першу чергу, у визначенні та аналізі часткових розв'язків, наведених вище диференціальних рівнянь руху, що відповідають характерним режимам роботи.

Процес руху машини в загальному випадку складається з трьох режимів: *розбігу, усталеного руху, вибігу*. Це наочно показує діаграма залежності швидкості руху початкової ланки від часу (рис. 5.2). При усталеному русі швидкість головного вала змінюється періодично, інколи вона може бути постійною. Розбіг та вибіг – це перехідні режими, які характеризуються неперіодичними змінами швидкості вала машини (початкової ланки). З цих міркувань часто розрізняють два режими: усталений рух та перехідні процеси.

Усталений рух. Під усталеним рухом будемо розуміти такий режим роботи, при якому вхідний параметр двигуна (параметри u , що керує процесом перетворення енергії) лишається постійним ($u=u_o=const$), а кутова швидкість вихідного вала двигуна або лишається постійною, або коливається біля деякого середнього значення ω_o , причому найбільші відхилення малі у порівнянні з цим середнім значенням. Іншими словами, в цьому випадку

$$\omega = \omega(t) = \omega_o + \varphi(t); \quad |\varphi(t)|_{\max} \ll \omega_o. \quad (15)$$

Усталеним рухом машини називається рух, при якому її кінетична енергія є періодичною функцією часу. Проміжок часу (t_u), протягом якого швидкість головного вала набуває свого початкового значення, пройшовши через $\omega_{\max}$ та $\omega_{\min}$, називають *циклом усталеного руху*.

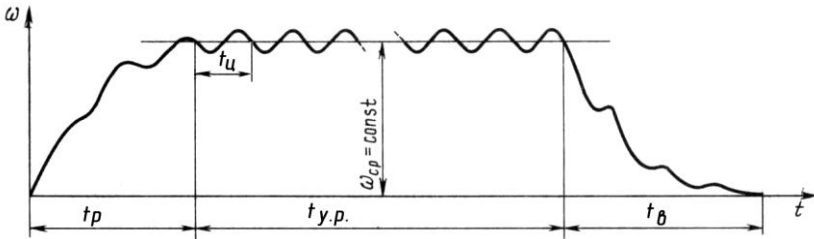


Рис. 5.2

Оскільки швидкості на початку та в кінці циклу усталеного руху рівні між собою ($\omega_o = \omega$), то рівняння руху (9) набуває вигляду

$$A_p = A_o.$$

Рівність (15) – основне енергетичне рівняння усталеного руху. При усталеному русі робота рушійних сил за один цикл дорівнює роботі сил опору (виробничого та шкідливого). У середині циклу ця рівність, як правило, не зберігається, а тому мають місце коливання швидкості початкових ланок. Якщо, $A_p > A_o$ – рух механізму прискорений і навпаки.

Перехідні процеси. *Розбіг* - це режим руху, у процесі якого машина зі стану спокою приходить до усталеного руху. Рівняння руху набуває вигляду

$$\frac{I_{\Sigma} \cdot \omega^2}{2} = A_p - A_o.$$

Оскільки кінетична енергія завжди додатна, то для можливості пуску машини необхідно, щоб робота рушійних сил була більшою за роботу сил

опору, $A_p > A_o$. Надлишок роботи A_p витрачається на збільшення кінетичної енергії механізму, тобто збільшення швидкості рухомих мас.

Вибіг (зупинка) – це режим руху, в процесі якого машина переходить від усталеного руху до стану спокою. Переважно при вибігу двигун відключається або переводиться в генераторний режим, при якому вводиться додатковий гальмівний момент.

Таким чином, у період розбігу кінетична енергія машини збільшується за рахунок надлишку роботи рушійних сил над роботою сил опору ($A_p > A_o$); під час усталеного руху кінетична енергія на початку та в кінці кожного циклу однакова ($A_p = A_o$); у період вибігу кінетична енергія повністю поглинається роботою сил опору.

Перехідні процеси при зміні навантаження. Часто усталений рух чергується із розбігом (при підвищеннях швидкісного режиму) та гальмуваннями (при зменшенні швидкості). Так працює, наприклад, автомобільний двигун.

Відмітимо, що багато механізмів не працюють у режимі усталеного руху.

5.5. Усталений режим. Нерівномірність руху машини

Головною ознакою роботи машинного агрегату в усталеному режимі є сталість середньої швидкості обертання двигуна та валу робочої машини. Це можливо лише за умови сталого зведеного моменту інерції валу робочої машини та рівності за цикл усталеного руху приведенного до вала двигуна моменту сил опору робочої машини та обертового моменту двигуна.

Усталеним режимом руху називається такий рух, при якому швидкість початкової ланки (узагальнена швидкість) є періодичною функцією часу. На рис. 5.2 показано типовий приклад залежності швидкості руху початкової ланки механізму від часу t . Як бачимо, для усталеного режиму руху, кутова швидкість періодично коливається відносно деякого постійного середнього значення.

Нерівномірність ходу машини є наслідком двох факторів: зміни упродовж циклу миттєвих значень зведених моментів рушійних сил і сил опору; періодичної зміни зведеного моменту інерції механізму.

Нерівномірність обертання оцінюється коефіцієнтом нерівномірності

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}},$$

де $\omega_{\max}$, $\omega_{\min}$, ω_{cp} - відповідно, максимальна, мінімальна та середня за цикл швидкість.

Величина ω_{cp} рахується за формулою $\omega_{cp} = \frac{\pi n}{30}$, у якій n – частота

обертання початкової ланки.

Коефіцієнт нерівномірності характеризує розмах коливань швидкості по відношенню до її середнього значення. Очевидно, що чим менше δ , тим рівномірніше рухається початкова ланка.

Для кожного виду машин є своя допустима величина коефіцієнта нерівномірності $[\delta]$, встановлена практикою. Значення допустимих коефіцієнтів нерівномірності руху наведено у технічних довідниках; так для помпи 1/5-1/30; для металообробних верстатів 1/20-1/50, для ДВЗ 1/80-1/100, для електричних генераторів змінного струму 1/200-1/300, для авіаційних двигунів та турбогенераторів 1/200 і менше.

Коефіцієнт нерівномірності є величина досить мала, що дозволяє прийняти середню величину кутової швидкості рівною середньому арифметичному з її максимального і мінімального значень.

Звичайно, при проектуванні механізму задаються наперед бажаними для механізму значеннями коефіцієнта нерівномірності руху та середньої швидкості обертання головного вала.

В усталеному режимі працюють дуже багато машин. Найкращі умови для роботи таких машин – абсолютно рівномірне обертання їх головного вала. Як відомо, у загальному випадку швидкість початкової ланки механізму при усталеному русі є змінною величиною. Коливання швидкості початкової ланки за час усталеного руху бувають двох різних типів: *періодичні та неперіодичні*.

Періодичними коливаннями швидкостей машини називаються коливання, при яких швидкості всіх ланок машини в усіх їхніх положеннях мають цілком певні цикли, після закінчення яких ці швидкості набувають щоразу своїх початкових значень.

Неперіодичні коливання швидкостей залежать від різних причин: раптової зміни корисних або шкідливих опорів, включення в машину додаткових мас і т.п. Раптова зміна навантаження на машину спричиняє раптове збільшення або зменшення швидкості головного вала машини і, оскільки ці коливання не мають певного циклу, то вони називаються неперіодичними. У більшості машин спостерігаються обидва види коливань швидкості.

Коливання швидкості обох типів небажані як з точки зору динаміки машини, так і виконання нею технологічного процесу. Коливання швидкості спричиняють у кінематичних парах додаткові динамічні тиски, що знижують ККД машини, довговічність та надійність її роботи.

Оскільки коливання швидкості повністю усунути неможливо, необхідно по можливості їх зменшити.

Задача про регулювання швидкостей під час усталеного руху машини

або механізму має суттєве практичне значення в техніці, оскільки в більшості машин цей час є робочим часом її руху, тобто проміжком часу, протягом якого машина долає виробничі опори.

Розглянемо шляхи розв'язування цієї задачі. Маса є мірою інертності тіла. Всі ланки механізму мають інертність. Ця властивість полягає в тому, що чим інертніше матеріальне тіло, тим повільніше проходить зміна його швидкості, яка викликана дією прикладених до нього сил. Таким чином, щоб отримати обертання головного вала з нерівномірністю, що не перевищує заданої величини, інертність цього вала з усіма зв'язаними з ним деталями необхідно зробити достатньо великою. Практично, це збільшення інертності досягається посадкою на один із валів машини додаткової деталі, що має певний момент інерції. Ця деталь має назву маховик (колесо з великим моментом інерції). Підбираючи момент інерції маховика, можна забезпечити обертання головного вала машини із заданим коефіцієнтом нерівномірності.

Дія маховика полягає у тому, що при перевищенні роботи A_p над роботою A_0 маховик приймає на себе надлишок кінетичної енергії механізму і, завдяки своєму великому моменту інерції, не дає швидкості надмірно зростати; коли ж робота $A_0 > A_p$, маховик віддає накопичену кінетичну енергію, протидіючи зменшенню швидкості.

Маховик є ніби акумулятором кінетичної енергії машини. Таким чином, основне призначення маховика є обмеження коливань кутової швидкості в межах, що встановлені величиною допустимого коефіцієнта нерівномірності $[\delta]$.

Акумулююча здатність маховика використовується не лише для забезпечення допустимої нерівномірності ходу машини. В деяких машинах (у яких корисне навантаження періодично змінюється в значних межах) махових дозволяє використовувати накопичену енергію для подолання пікових корисних навантажень без збільшення потужності двигуна. Маховик неодмінно застосовується в машинах ударної дії – молотах, прокатних станах, дробарках і т. ін., допомагаючи електродвигуну при пікових навантаженнях. В автомобілях маховик сприяє рушати машині з місця.

Регулювання періодичних коливань швидкості здійснюється за допомогою маховика виконаного, як правило, у вигляді колеса з розвинутим ободом (з великим моментом інерції).

Регулювання неперіодичних коливань за допомогою маховика можливо здійснити, якщо вони незначні. При значних неперіодичних коливаннях встановлюють механізми, що називаються регуляторами – які регулюють закони зміни рушійних сил або сил опору.

5.6. Визначення моменту інерції маховика методом Віттенбауера (за допомогою діаграми енергомас)

Переходимо до наступної важливої задачі динаміки механізмів та машин - визначення найвигідніших співвідношень між силами, масами та швидкостями ланок механізму, які забезпечують заданий режим його руху.

Визначення моменту інерції маховика за заданою величиною коефіцієнта нерівномірності $\delta < [\delta]$ виконується у процесі проектування машини та складає одну із задач її динамічного синтезу.

Для машин, що виконують різні технологічні процеси, коливання ω допустимі лише в певних межах, встановлених практикою експлуатації обладнання.

Розглянемо задачу, в якій необхідно знайти величину зведеного моменту інерції ланки зведення, при якому її кутова швидкість не виходила б за наперед задані значення. Розв'язок даної задачі зводиться до визначення моменту інерції маховика.

Задачу будемо розв'язувати методом Віттенбауера, графоаналітичним методом за допомогою побудови діаграми енергомас – залежності кінетичної енергії механізму від зведеного моменту інерції.

Зазначимо, що метод Віттенбауера дозволяє при силах, що залежать від положень ланок, у наочній формі показати, як змінюється кутова швидкість початкової ланки та кінетична енергія механізму при зміні зведеного момента інерції.

Для визначення моменту інерції махового колеса вважають заданими або попередньо знайденими:

- схема механізму та розміри ланок;
- маси і моменти інерції ланок;
- середня кутова швидкість ланки зведення ω_{cp} ;
- коефіцієнт δ нерівномірності руху ланки зведення;
- сили, прикладені до ланок механізму.

Виберемо за початкову ланку головний вал механізму, що виконує неперервний обертальний рух.

Послідовність визначення моменту інерції маховика за методом Віттенбауера:

- будуються n (дванадцять) рівновіддалених за кутом повороту кривошипа планів положень механізму;
- для побудованих планів положень будуються плани швидкостей;
- для n положень механізму за формулою (4) визначаються зведені моменти сил, при цьому для робочих машин знаходяться зведені моменти сил корисного опору M_0 , а зведені моменти рушійних сил M_p наближено приймаються такими, що мають деяке постійне значення, поки що невідоме.

Для машин – двигунів, навпаки, знаходяться зведені M_p , а M_0 приймаються постійними;

- будується графік зведеного моменту сил корисного опору (для машин двигунів - рушійних сил) (рис. 5.7, а). Всі графіки будуються для одного циклу усталеного руху.

- графічно інтегруючи зведений момент сил корисного опору, отримуємо графік робіт сил опору $A_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_0 d\varphi$. Графік робіт рушійних сил

для робочих машин з урахуванням прийнятих припущень, а також беручи до уваги те, що за один цикл усталеного руху $A_P = A_O$, що являє собою пряму лінію, яка з'єднує початок і кінець графіка роботи сил опору (рис. 5.3, б) (для машин-двигунів навпаки);

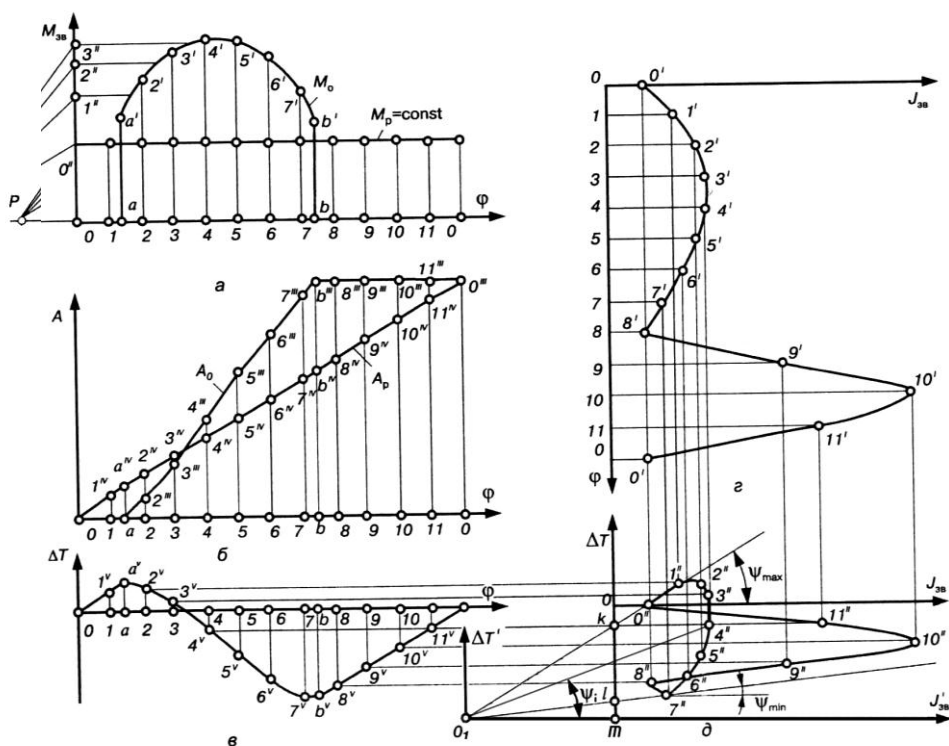


Рис. 5.3

- віднявши від ординат графіка робіт рушійних сил ординати робіт сил корисного опору, будуємо графік надлишкової роботи, який одночасно є графіком приросту кінетичної енергії (рис. 5.3, в). $A_p - A_o = \Delta T$;
 для побудованих положень механізму за формулою (7) визначаємо зведені до кривошипа моменти інерції механізму (без маховика)

Зауважимо, що в результаті виконання перших трьох пунктів та даного – механізм приводиться до динамічної моделі;

- будуємо графік зведеного моменту інерції як функцію кута повороту кривошипа, розмістивши вісь ординат перпендикулярно до осі ординат на попередніх графіках (рис. 5.3, з);

- шляхом графічного виключення спільного параметра φ з діаграм приросту кінетичної енергії та зведеного моменту інерції будуємо графік приросту кінетичної енергії як функції зведеного моменту інерції – діаграму енергомас (рис. 5.3, д).

Підкреслимо, що цю діаграму накреслено для механізму без маховика. Такою ж діаграма залишиться і для механізму з маховиком. Але початок осей координат зміститься: вліво, оскільки зведений момент інерції буде більшим на величину моменту інерції маховика; і до низу, оскільки за такої ж самої ω_{cp} має збільшитись кінетична енергія механізму. Таким чином, зменшення величини δ призводить до зростає зведена маса механізму та його кінетична енергія, яка необхідна для забезпечення руху механізму з заданою середньою швидкістю;

- до кривої діаграми енергомас проводяться дві дотичні під кутами ψ_{max}, ψ_{min} до осі OI_{36} ,

$$tg\psi_{\frac{max}{min}} = \frac{\mu_1}{2\mu_{\Delta T}} \omega_{cp}^2 (1 \pm \delta) ,$$

де $\mu_1, \mu_{\Delta T}$ - відповідно масштаби по осі абсцис і ординат діаграми енергомас.

Точка перетину дотичних є початком нової системи координат діаграми енергомас машини з маховиком із заданим коефіцієнтом нерівномірності.

Величина моменту інерції маховика визначається за формулою

$$I_M = \mu_1 O_1 t ,$$

де $O_1 t$ - відстань, на яку зміститься вісь ординат.

При малих значення коефіцієнта δ внаслідок невеликої різниці між кутами ψ_{max}, ψ_{min} точка перетину дотичних часто знаходиться за межами рисунка. У цьому випадку користуються формулою

$$I_M = \frac{\mu_{\Delta T}(kl)}{\omega_{CP}^2 \delta},$$

де kl – відстань по осі ординат діаграми енергомас.

Місце встановлення маховика. Зазначимо, що для зменшення маси та габаритів маховика доцільніше його встановлювати на найшвидкохіднішому валі, оскільки кінетична енергія маховика, в результаті зміни якої здійснюється регулювання швидкості, прямо пропорційна ω^2 . Якщо маховик встановлюється не на ланці зведення, а на іншій ланці механізму, то повинна задовольнятися умова рівності кінетичної енергії

$$\frac{I_M \omega^2}{2} = \frac{I_i \omega_i^2}{2},$$

звідки

$$I_i = I_M \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 = I_M u_{ii}^2,$$

де I_i – момент інерції маховика, встановленого на i -й ланці; ω_i – кутова швидкість цієї ланки; u_{ii} – передатне відношення. Таким чином, чим більша кутова швидкість i -ї ланки, тим менший момент інерції маховика, і, відповідно менші його маса та габарити.

Після визначення моменту інерції маховика та місця його встановлення розраховують його основні розміри.

Відмітимо, що за допомогою кривої енергомас легко встановити залежність кутової швидкості ланки зведення як функції кута повороту φ . Вибираємо на цій кривій будь-яку точку (точка 4^{II}, рис. 5.3, ∂) та з'єднуємо її з початком координат (точка O_I). Швидкість ланки зведення в положенні, яке визначається вибраною точкою, знаходимо за формулою

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2T}{I}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\Delta T} \operatorname{tg} \psi_i}{\mu_i}}. \quad (19)$$

За формулою (19) будують графік $\omega(\varphi)$. Порівнюючи між собою кути ψ , можна наочно прослідкувати, як змінюється кутова швидкість ланки зведення при зміні її положення.

Відмітимо також, що за допомогою кривої енергомас можна визначити коефіцієнт нерівномірності руху машини. Для цього з початку системи координат (т. O_I , рис. 5.3, ∂) проводимо дві дотичні до кривої енергомас.

Вимірюємо кути $\psi_{\min}, \psi_{\max}$. Коефіцієнт нерівномірності руху визначаємо за формулою

$$\delta = \frac{\mu_{\Delta T}}{\mu_1} \frac{tg\psi_{\max} - tg\psi_{\min}}{\omega_{cp}^2}.$$

Конструювання маховика. Форма маховика, загалом може бути вибрана довільною. Проте, беручи до уваги існуючі динамічні та технологічні рекомендації стосовно конструювання деталей машин, найбільш зручною є форма у вигляді диска з важким ободом, колеса зі спицями або форма, яка симетрична відносно головних осей інерції. При цій формі найлегше досягається співпадання осі обертання з однією із головних центральних осей інерції. Це дозволяє уникнути додаткових (від сил інерції) тисків на вальниці вала, на якому розміщений маховик.

Якщо маховик виконаний у вигляді колеса зі спицями (рис. 5.4), то моментами інерції з'єднувальних частин нехтують і наближено вважають, що маса маховика рівномірно розподілена по колу радіуса $R = D/2$ - геометричному місцю центрів ваги поперечних перерізів обода. Тоді момент інерції маховика можна виразити так (використовується формула для моменту інерції тонкого кільця):

$$I_M = mR^2 = \frac{mD^2}{4}, \quad (20)$$

де m – маса маховика.

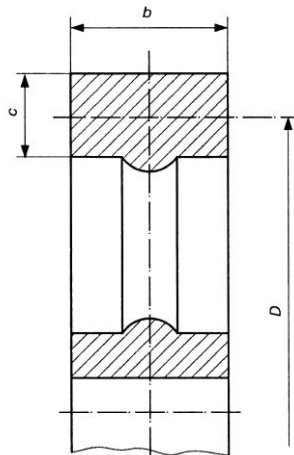


Рис. 5.4

Добуток маси обода маховика на квадрат його діаметра mD^2 називається *маховим моментом* або *характеристикою маховика*. Для

багатьох деталей машин, що здійснюють обертальний рух (муфти, ротори електродвигунів тощо), ця характеристика наводиться у довідниках. Характеристика маховика має одиницю виміру $\text{кг}\cdot\text{м}^2$. За цією характеристикою можна визначити необхідну масу маховика, якщо задано або вибрано його діаметр, значення якого визначається з суто конструктивних міркувань.

З рівняння (19) випливає, що при визначеній величині I_m вага маховика обернено пропорційна квадрату його діаметра D і для зменшення металоемкості вигідно брати більші діаметри. Але це заперечує вимозі малих габаритів та лімітується допустимою кутовою швидкістю.

Для запобігання небезпеці можливого розриву маховика відцентровими силами його діаметр D вибирають таким чином, щоб колова швидкість на ободі не перевищувала допустиму для матеріалу маховика величину. Для перевірки діаметра маховика можна рекомендувати таку залежність:

$$D \leq \frac{60 v_{\text{доп}}}{\pi n}, \quad (21)$$

де $v_{\text{доп}}$ - допустима колова швидкість обода маховика, яка не повинна перевищувати для сталевих маховиків $70 - 120 \text{ м/с}$, для чавунних - $30 - 45 \text{ м/с}$; n - частота обертання маховика, хв^{-1} . Зауважимо, що хромонікелеві маховики допускають колову швидкість до 150 м/с .

Маса обода маховика практично може бути взята $m_{\text{об}} = 0,9m$, тоді ширина b обода визначається з виразу

$$m_{\text{об}} = \pi D b c \rho.$$

Тут $c = 0,4b$; ρ - густина матеріалу, кг/м^3 ; для сталевих маховиків ($\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$) матимемо $b = 0,01\sqrt{m/D}$.

5.7. Визначення закону руху машинного агрегату

Визначення закону руху механізму полягає у визначенні закону руху її початкової ланки. Початковою ланкою в більшості механізмів є кривошип.

Для визначення закону руху початкової ланки механізму, яка визначає рух усіх інших ланок, використовуються рівняння руху (11) - (14). Розв'язуючи рівняння відносно швидкості руху початкової ланки, встановлюємо характер зміни її руху залежно від часу.

Неусталений режим. Розглянемо один з найпростіших випадків: механізм навантажений силовими факторами, що є функціями лише

переміщення своїх точок прикладання.

Для визначення закону руху механізму при неусталеному режимі повинні бути відомі такі вихідні дані: кінематична схема механізму; маси, моменти інерції та положення центрів мас усіх рухомих ланок; механічні характеристики силових факторів; початкові умови руху. Останнє важливо для дослідження саме неусталеного режиму. Нехай зведений момент інерції розглядуваного механізму має змінну величину $I_{3B} = \text{var}$. Потрібно визначити залежність швидкості початкової ланки від її кута повороту, тобто $\omega(\varphi)$. Така задача є досить розповсюдженою (механізми дизель-компресорів, бурових верстатів і підіймальних кранів з приводом від ДВЗ, різних пристроїв з пневмоприводом і т. ін.).

Для розв'язку даної задачі використовують рівняння руху механізму в енергетичному виді, яке розв'язується безпосередньо відносно шуканої величини ω

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \sum A}{I_{3B}} + \frac{I_{3B_0}}{I_{3B}} \omega_0^2}, \quad (16)$$

де $\sum A$ визначається з (10).

Цю задачу зручно розв'язувати графічно. Для цього будують діаграми $M_{3B}(\varphi)$, $I_{3B}(\varphi)$, $\sum A(\varphi)$ (див. п. 5.7).

З рівняння (16), із урахуванням початкових умов, обчислюється для кожного положення механізму кутова швидкість ω . У такій послідовності виконують розрахунок чисельним методом із застосуванням ЕОМ.

Для визначення часу t руху механізму можна скористатися умовою

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \text{ звідки дістанемо}$$

$$\int_{t_0}^{t_i} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)},$$

або

$$t_i - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (17)$$

Якщо дослідження руху механізму ведеться з початку пуску, то $t_0 = 0$ і (17) набуває вигляду

$$t_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (18)$$

За формулами (17) та (18) можна визначити час руху механізму як функції кута повороту φ початкової ланки. Інтеграл у правій частині (17), (18) може бути визначений графічно, якщо побудувати графік $\frac{1}{\omega(\varphi)}$ за відомою функцією $\omega(\varphi)$. За графіками $\omega(\varphi)$ і $t(\varphi)$, якщо виключити з них кут φ , можна дістати функцію $\omega(t)$ - залежність кутової швидкості ω від часу t .

Кутове прискорення ланки зведення визначається графічним диференціюванням функції $\omega(t)$.

Визначення закону руху механізму, навантаженого силами, що залежать лише від швидкості. Нехай зведений момент інерції машини є величиною сталою. Типовими прикладами таких машинних агрегатів можуть бути турбо- і гідрогенератори, прокатні стани, відцентрові помпи, повітродувки та вентилятори з електроприводом. Як приклад розглянемо пуск відцентрової помпи, що приводиться в рух від двигуна постійного струму. Для розв'язування задачі скористаємось рівнянням руху в диференційній формі (5.14) для випадку $I_{зв} = const$.

Механічні характеристики двигуна та робочої машини наведені відповідно на рис. 3.1, а та рис. 3.2, б. Звернемо увагу на те, що ці залежності є близькими до лінійних. Зведемо до однієї ланки, наприклад, валу двигуна, усі маси та обидва моменти, тобто обчислимо $I_{зв}$ та $M_{\Sigma} = M_{dv} + M_{р.м.}$ (рис. 5.3).

Графік $M_{\Sigma}(\varphi)$ близький до прямої лінії, тобто його можна апроксимувати рівнянням прямої $y = a - b\varphi$, де a та b – сталі коефіцієнти, які не складно визначити за відомими механічними характеристиками. (Нагадаємо, що рівняння прямої, яка проходить через дві точки, має вигляд $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, тоді $M_{\Sigma} = M_{\Sigma 0} - \frac{M_{\Sigma 0}}{\omega_{уст}} \varphi$). Таким чином, доданок a дорівнює $M_{\Sigma 0}$, а коефіцієнт $b = \frac{M_{\Sigma 0}}{\omega_{уст}}$ характеризує крутизну зміни залежності M_{Σ} .

Тоді рівняння руху машинного агрегату можна записати у наступному вигляді

$$I_{зв} \ddot{\varphi} = a - b\varphi = M_{\Sigma 0} - \frac{M_{\Sigma 0}}{\omega_{уст}} \varphi. \quad (5.18)$$

Розв'язок цього рівняння, як відомо з курсу вищої математики, для нульових початкових умов ($t = 0$, $\phi_0 = 0$, тобто з моменту пуску машини) матиме вигляд

$$\phi = \frac{a}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{I_{\text{зв}}} t} \right) = \omega_{\text{уст}} \left(1 - e^{-\frac{M_{\Sigma 0}}{I_{\text{зв}} \omega_{\text{уст}}} t} \right). \quad (5.19)$$

За формулою (5.19) можна визначити закон зміни кутової швидкості ланки зведення під час розбігу машини. Беручи до уваги вигляд графіка функції e^{-Ct} (рис. 5.3, б), можна зробити висновок, що з часом швидкість $\dot{\phi}$ наближається до усталеного значення $\dot{\phi}_{\text{уст}} = \omega_{\text{уст}}$; звичайно, повільніше при більших величинах зведеного моменту інерції $I_{\text{зв}}$ та менших $M_{\Sigma 0}$.

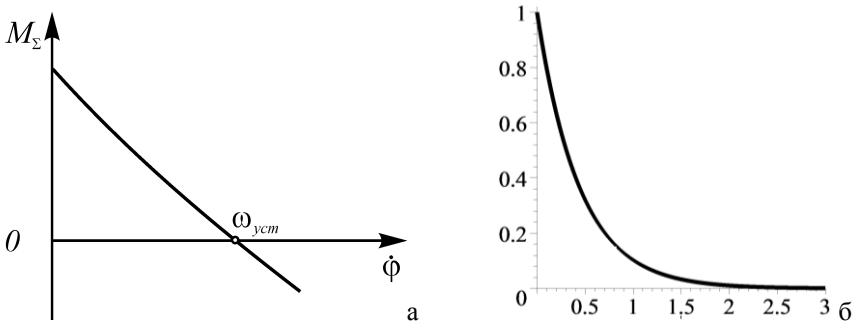


Рис. 5.3

Використовуючи розв'язок (5.19) можна знайти ту величину зведеного моменту інерції $I_{\text{зв}}$ машини, за якої час її розбігу відповідатиме заданому, або визначити час на протязі якого швидкість розгону набуде певного значення, наприклад $\dot{\phi} = 0,995 \dot{\phi}_{\text{уст}}$. Так з (5.14) маємо $e^{-\frac{b}{I_{\text{зв}}} t} = 0,005$, або $-\frac{b}{I_{\text{зв}}} t = \ln 0,005$, звідки $t = 5,3 I_{\text{зв}} \omega_{\text{уст}} / M_{\Sigma 0}$.

Зазначимо, що в багатьох випадках лінійна апроксимація залежності $M_{\Sigma}(\phi)$ на усьому проміжку неможлива. Наприклад, у разі машинних агрегатів з приводом від асинхронних двигунів з короткозамкненим ротором, механічна характеристика яких має вигляд наведений на рис. 3.2, а. У цьому разі зазвичай виконують лінеаризацією механічних характеристик на окремих її ділянках. Тобто, обмежуються дослідженням вибраних режимів руху. Так,

наприклад, на рис. 5.4 наведено лінійну модель статичної характеристики асинхронного електродвигуна. Нестійку ділянку АВ характеристики показано в цій моделі у вигляді відрізка прямої, яка проходить через точки $A(0, L_{\text{пуск}})$ та $B(\omega_{\text{кр}}, L_{\text{max}})$, стійку ділянку ВС – у вигляді прямої, що проходить через точки В та $C(\omega_c, 0)$. Отже, обертальний момент на валу електродвигуна може бути обчислений таким чином

$$M_{\text{дв}} = \begin{cases} \frac{L_{\text{max}} - L_{\text{пуск}}}{\omega_{\text{кр}}} \phi + L_{\text{пуск}}, & \text{у випадку } 0 \leq \phi \leq \omega_{\text{кр}}; \\ \frac{L_{\text{max}}}{\omega_c - \omega_{\text{кр}}} (\omega_c - \phi), & \text{у випадку } \omega_{\text{кр}} < \phi \leq \omega_c, \end{cases}$$

де $L_{\text{max}}, L_{\text{пуск}}$ – максимальний (критичний) та пусковий моменти двигуна;
 $\omega_{\text{кр}}, \omega_c$ – критична та синхронна частоти обертання двигуна.

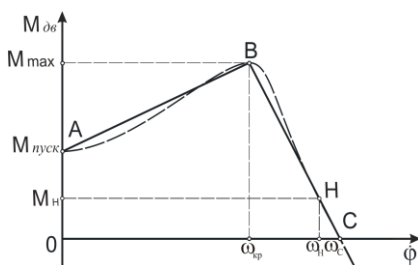


Рис. 5.4

Зауважимо, у разі якщо стійку ділянку ВС апроксимувати прямою, яка проходить через точки $H(\omega_n, M_n)$ та $C(\omega_c, 0)$, то обертальний момент на валу електродвигуна може бути обчислений за формулою

$$M_{\text{дв}} = M_n - \frac{M_n}{\omega_c - \omega_n} (\phi - \omega_n), \quad \text{або} \quad M_{\text{дв}} = \frac{M_n}{\omega_c - \omega_n} (\omega_c - \phi),$$

звідки $a = M_n \frac{\omega_c}{\omega_c - \omega_n}, \quad b = M_n \frac{1}{\omega_c - \omega_n}.$

На рис. 5.5 наведено результати розв'язування рівняння руху (5.18) за допомогою математичного пакета Maple. Зокрема наведено часові залежності кутової швидкості ланки зведення (рис. 5.4).

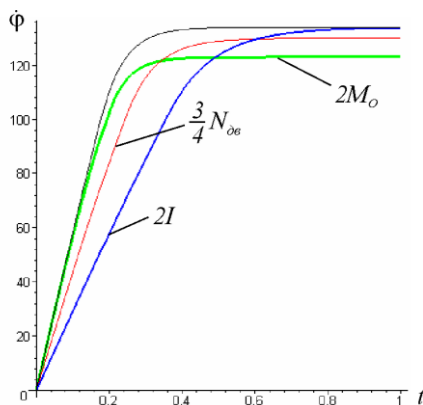


Рис. 5.4

З графіків випливає очевидний результат: чим більший зведений момент інерції I головного вала машини, опір обертанню ротора електродвигуна, менша потужність двигуна, тим тривалішим є час розбігу машини; при цьому величина моменту інерції I не впливає на швидкість її усталеного руху, водночас зменшення потужності двигуна, або зростання опору його обертанню призводить до зниження усталеної швидкості.

Визначення закону руху механізму, навантаженого силами, що залежать як від швидкості так і від положення. Розглянемо машинний агрегат механізм робочої машини якого є важільним, і який приводиться в рух від асинхронного двигуна. Нехай машинний агрегат працює в усталеному режимі. Приведемо до валу робочої машини усі сили та маси машинного агрегату. Характеристики електродвигуна та робочої машини отримані після приведення наведені на рис. 5. 5. Робочу частину характеристики двигуна апроксимуємо прямою $M_{\text{ав}} = a - b\omega$. Звернемо увагу, що з формули слідує, що збільшення швидкості ω викликає зменшення рушійного моменту $M_{\text{ав}}$, навпаки, зменшення ω викликає зростання $M_{\text{ав}}$. Така властивість асинхронного електродвигуна називається саморегулюванням. Саморегулювання є тим більше вираженим чим більша величина коефіцієнта b . Зазначимо, що момент електродвигуна $M_{\text{ав}} = in \varphi$ є незалежним від кута повороту. У той же час момент робочої машини істотно залежить від кута повороту φ , але мало залежить від ω . Тому прийнемо що $M_{\text{рм}} = in \varphi$. Подамо момент робочої машини як суму двох доданків: сталого (constant) та змінного (variable): $M_{\text{рм}} = M_{\text{рмC}} + M_{\text{рмV}}$.

Доданок M_{pmC} є середнім за цикл значенням моменту M_{pm} робочої машини:

$$M_{pmC} = M_{сер} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{pm} d\varphi = const.$$

Змінна складова моменту робочої машини є функція лише узагальненої координати φ : $M_{pmV} = M_{pmV}(\varphi)$; при цьому $\int_0^{2\pi} M_{pmV} d\varphi = 0$.

Сумарний приведений момент інерції усієї машини також подамо як суму двох доданків: сталого та змінного:

$$I_{\Sigma} = I_C + I_V,$$

де $I_C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{\Sigma} d\varphi = const$, тобто стала складова це середнє значення

сумарного приведенного моменту інерції. Зазначимо, що доданок I_C як величину завідомо достатньо велику подано на рис. 5. з обривом; звичайно, вона містить і момент інерції маховика I_{mx} . Для рівнянь руху знадобиться

похідна $\frac{dI_{\Sigma}}{d\varphi}$, очевидно, що $\frac{dI_{\Sigma}}{d\varphi} = \frac{dI_V}{d\varphi}$.

Запишемо рівняння руху машинного агрегату в диференційній формі

$$I_{\Sigma} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2 dI_{\Sigma}}{2d\varphi} = M_d + M_{pm}. \quad (5.14)$$

Після нескладних перетворень подамо рівняння (5.14) у наступному вигляді

$$I_C \omega + B\omega = (A + M_{MC}) + \left[M_{pmV} + \left(-I_V \omega - \frac{1}{2} I_V' \omega^2 \right) \right]. \quad (5.15)$$

Звичайно, двочлен $A + M_{MC}$ є величиною сталою, а многочлен

$M_{pmV} + \left(-I_V \omega - \frac{1}{2} I_V' \omega^2 \right)$ є величина періодична і явно залежна від φ , тобто

$L_V = L_V(\varphi)$. Звернемо увагу, що через многочлен $L_V(\varphi)$ математично виражаються два впливи на закон руху робочої машини: 1) періодичну зміну її моменту опору – доданок M_{pmV} ; 2) коливальний рух ланок зі змінним

моментом інерції (повзунів, коромисел, шатунів) – доданок $-I_V \omega^2 - \frac{1}{2} I'_V \omega^2$.

Результатом такого впливу є внутрішньо циклові коливання кутової швидкості робочої машини. Тому назвемо $L_V(\varphi)$ збуджуючим моментом; він характеризує віброактивність робочої машини.

Оскільки нерівномірність обертання головного вала робочої машини є незначною, то $\omega = \omega_{\text{сеп}}$, а кутові прискорення $\varepsilon = \dot{\omega}$ є величиною малою. Тому, не буде великою помилкою многочлен $L_V = L_V(\varphi)$ записати наступним

чином $L_V(\varphi) = M_{pmV} - \frac{1}{2} I'_V \omega_{\text{сеп}}^2$ (тобто знехтували доданком $I_V \omega^2$).

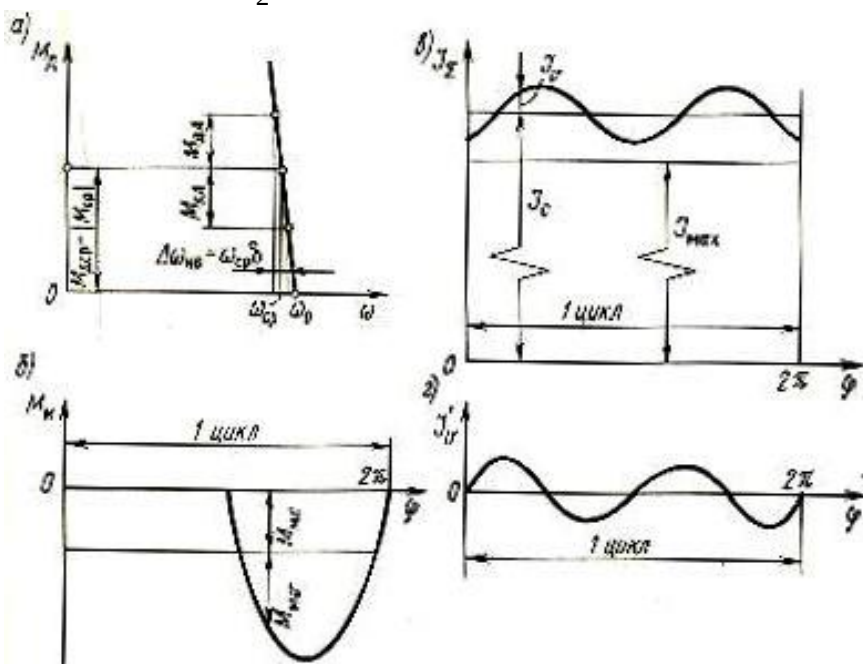


Рис. 5.5

Розкладемо збуджуючий момент у ряд Фур'є:

$$L_V = L_{V1}(\varphi) + L_{V2}(2\varphi) + L_{V3}(3\varphi) + K.$$

У цьому ряду утримуємо лише першу гармоніку, оскільки зазвичай саме вона є найбільш впливовою. Тоді $L_V(\varphi) = L_{A1} \cos \varphi$. Оскільки, у разі обертання з малою нерівномірністю $\varphi \approx \omega_{\text{сеп}} t$, то

$$L_V(\varphi) = L_{A1} \cos(\omega_{cep} t) = L_V(t).$$

Розв'яжемо задачу динамічного аналізу машинного агрегату, тобто за відомими характеристикам визначимо закон його руху. Рівняння (5.15) подамо у наступному вигляді

$$I_C \ddot{\omega} + B\omega = (A + M_{MC}) + L_{A1} \cos(\omega_{cep} t).$$

Для усталеного режиму руху його розв'язок можна представити у формі

$$\omega = \omega_{cep} + \frac{L_{A1}}{\sqrt{(I_C \omega)^2 + b^2}} \sin(\omega_{cep} t + \beta),$$

$$\text{де } \omega_{cep} = \frac{A + M_{MC}}{b}.$$

Визначимо коефіцієнт нерівномірності обертання робочої машини

$$\delta = \frac{(\omega_{\max} - \omega_{\min})}{\omega_{cep}} = \frac{2L_{A1}}{\omega_{cep} \sqrt{(I_C \omega)^2 + b^2}}.$$

Маючи розв'язок $\omega = \omega_{cep} + \frac{b L_{A1}}{\sqrt{(I_C \omega)^2 + b^2}} \sin(\omega_{cep} t + \beta)$ (5.16) знайдемо закон зміни рушійного моменту електродвигуна

$$M_{\text{дв}} = a - b\omega_{cep} - \frac{b L_{A1}}{\sqrt{(I_C \omega)^2 + b^2}} \sin(\omega_{cep} t + \beta).$$

Таким чином, рушійний момент електродвигуна буде змінюватися на протязі циклу за гармонічним законом, коливаючись біля середнього значення. Це середнє значення дорівнює середньому значенню моменту сил опору робочої машини (як і має бути для усталеного режиму руху).

Очевидно, що амплітуда коливань рушійного моменту двигуна буде

$$A_{M_{\text{дв}}} = \frac{b L_{A1}}{\sqrt{(I_C \omega)^2 + b^2}}.$$

Звичайно, що отримані результати можна уточнити врахувавши наступні гармоніки ряду Фур'є.

Питання для самоконтролю

1. В чому полягає побудова динамічної моделі?
2. Етапи динамічного дослідження.
3. Які умови мають бути витримані при зведенні сил та мас?
4. Запишіть рівняння руху механізму в енергетичній формі.
5. Запишіть рівняння руху механізму в диференційній формі.
6. Запишіть формулу, яка визначає зведений момент інерції, зведену масу.
7. Від чого залежать зведені сила та маса?
8. За якими формулами визначаються зведений момент та зведена сила?
9. Визначення закону руху механізму, навантаженого силами, що залежать лише від положення.
10. Визначення закону руху механізму, навантаженого силами, що залежать тільки від швидкості.
11. Назвіть режими руху машини.
12. Особливості усталеного режиму руху машини.
13. Запишіть формулу, яка визначає коефіцієнт нерівномірності руху.
14. Які умови мають бути витримані при зведенні сил та мас?
10. Які механізми встановлюють при значних неперіодичних коливаннях швидкості?
11. Як регулюють значні періодичні коливання швидкості?
12. В чому полягає дія маховика?
13. Послідовність визначення моменту інерції маховика.
14. Що таке характеристика маховика?
15. Як визначається діаметр маховика?
16. Головна ознака роботи машини в усталеному режимі?

ГЛАВА 6. ЗРІВНОВАЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ

Зрівноваження додаткових динамічних сил (сил інерції), які виникають при русі механізмів і машин, є однією з найважливіших задач сучасного машинобудування. Це пов'язано з тим, що ланки механізмів, як правило, рухаються з прискоренням, в результаті чого виникають сили інерції, які викликають додаткові, часом досить великі, навантаження у кінематичних парах. Особливо це стосується швидкохідних машин. Ці змінні як за величиною, так і за напрямком сили, передаються станині (корпусу) машини, фундаменту, викликають їх вібрацію, коливання та розхитування. Найбільш небезпечними є вібрації у зоні, близькій до резонансу, вони можуть викликати руйнування деталей машин та механізмів. Тому в процесі проектування та виготовлення машин ставиться завдання про зрівноваження динамічних сил. Необхідно добитися, щоб на корпус і фундамент машини передавались тиски, постійні за величиною та напрямом. Ця задача називається задачею про зрівноваження рухомих мас механізмів або про зрівноваження динамічних сил інерції. Розв'язати її можна шляхом раціонального підбору та розміщення мас ланок.

Задачу про зрівноваження сил інерції в машинах можна поділити на дві окремі задачі:

1. зрівноваження механізму в цілому (задача про зрівноваження динамічних навантажень на фундамент машин);
2. зрівноваження окремих обертових ланок механізму (задача про зрівноваження додаткових динамічних тисків у кінематичних парах механізму).

6.1. Зрівноважування механізмів на фундаменті

Розглянемо причини незрівноваженості механізмів на прикладі шарнірного чотириланковика, початкова ланка якого обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega_1 = \text{const}$. При цьому на ланки будуть діяти сили й моменти сил інерції (рис. 6.1, а). Зведемо всю систему сил інерції до точки А (рис. 6.1, б). В результаті вона зведеться до головного вектора $\vec{P}_\Sigma = \sum_{k=1}^n \vec{P}_k$ і головного моменту

$$M_\Sigma = \sum_{k=1}^n M_k + \sum_{k=1}^n M_A(\vec{P}_k).$$

Сила $\vec{P}_\Sigma$ і момент M_Σ передаються на основу О і викликають реакції в місцях кріплення К і N.

Якщо $\vec{P}_\Sigma \neq 0$, то механізм є *статично незрівноваженим*;

- якщо $\dot{P}_{\Sigma} \neq 0$ і $M_{\Sigma} \neq 0$, то механізм динамічно незрівноважений;
- якщо $\dot{P}_{\Sigma} = 0$, але $M_{\Sigma} \neq 0$, то кажуть про моментну незрівноваженість.

Розглянемо тільки статичне зрівноважування механізмів.

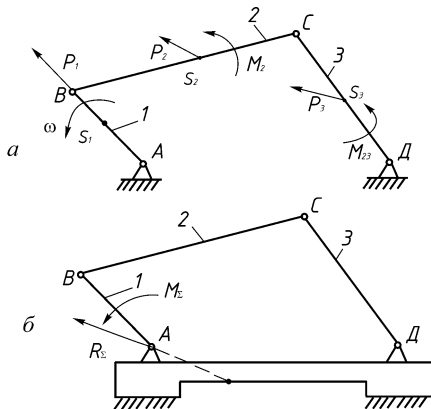


Рис. 6.1.

Під час проектування механізмів для статичного зрівноважування, застосовують низку заходів з метою досягнення умови $P_{\Sigma} = 0$. При цьому не ставиться задача одночасного виконання умови $M_{\Sigma} = 0$. Тобто статично зрівноважений механізм ніякої динамічної дії на основу у вигляді сили не чинить. Водночас такий механізм, в загальному випадку, може чинити динамічний вплив на фундамент у вигляді моменту.

З теоретичної механіки відомо, що сила інерції $P = -m_s a_s$, де m_s – маса системи рухомих ланок; a_s – прискорення центра мас цієї системи. Умова $P_{\Sigma} = 0$ виконується в разі $a_s = 0$, тобто коли центр мас не переміщується.

Таким чином, статичне зрівноважування – це така дія, у результаті якої центр мас стає нерухомим. Для досягнення статичного зрівноваження механізму використовують метод замінювальних мас.

Розглянемо цей метод. Відомо, що будь-яке тіло масою m можна замінити системою n зосереджених мас (рис. 6.2, а), поставивши вимоги – щоб сума усіх мас системи дорівнювала масі тіла, центр мас залишився на тому ж місці з попереднім моментом інерції:

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots = m; \quad (1)$$

$$\begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots = 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots = 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$m_1 (x_1^2 + y_1^2) + m_2 (x_2^2 + y_2^2) + m_3 (x_3^2 + y_3^2) + \dots = J_s. \quad (3)$$

Виконання тільки умов (1) і (2) називається *статичним розміщенням* мас і воно зводиться до того, що головний вектор сил інерції замінюючої системи мас дорівнює головному вектору сил інерції заданого тіла. Однак, при цьому головний момент сил інерції системи мас не дорівнює головному моменту сил інерції тіла. Але для статичного зрівноважування таке розміщення мас припустиме.

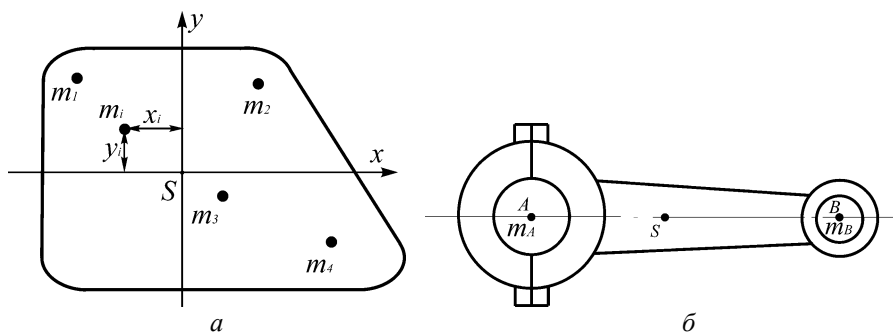


Рис. 6.2.

Виконаємо статичне заміщення маси m ланки AB двома масами зосередженими в шарнірах A та B (рис. 6.2, б): $m_A + m_B = m$; $m_A AS - m_B BS = 0$, звідки

$$m_A = m \frac{BS}{AB}; \quad m_B = m \frac{AS}{AB}.$$

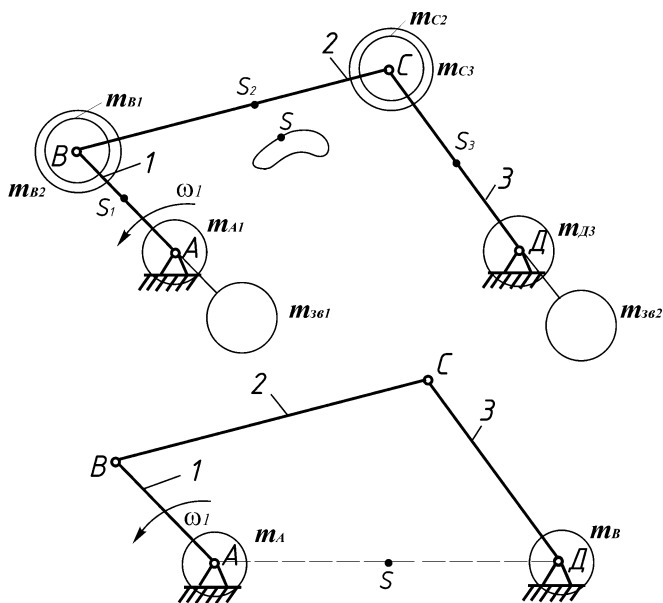


Рис. 6.3.

Розглянемо методику статичного зрівноваження механізму шарнірного чотириланковика (рис. 6.3, а). Замінімо масу кожної ланки (m_1, m_2, m_3) двома масами, зосередженими в шарнірах:

$$m_{A1} = m_1 \frac{BS_1}{AB}; \quad m_{B1} = m_1 \frac{AS_1}{AB}; \quad m_{B2} = m_2 \frac{CS_2}{BC};$$

$$m_{C2} = m_2 \frac{BS_2}{BC}; \quad m_{C3} = m_3 \frac{DS_3}{CD}; \quad m_{D3} = m_3 \frac{CS_3}{CD}.$$

Об'єднаємо маси, розміщені в точках В і С:

$$m_B = m_{B1} + m_{B2}; \quad m_C = m_{C2} + m_{C3}.$$

Отже, маси усіх ланок механізму виявляються заміненими чотирма масами, зосередженими в точках А, В, С, D. При цьому центр мас $S_{\text{ц}}$ системи залишається у тому самому місці й рухається з прискоренням $a_{S_{\text{ц}}}$, тобто це статистично незрівноважена система ланок. Розмістимо на ланках 1 і 3 противаги з таким розрахунком, щоб центри мас (m_B і m_{361}) і (m_C і m_{362}) перемістилися б у нерухомі точки А і D. Для цього виконуємо співвідношення

$$m_{\text{зв}} \rho_1 = m_B AB; \quad m_{\text{зв}} \rho_2 = m_C CD.$$

Об'єднавши маси розташовані на ланках 1 і 3 (рис. 6.3, б), дістанемо

$$m_A = m_{A1} + m_B + m_{\text{зв}1};$$

$$m_D = m_{D3} + m_C + m_{\text{зв}2}.$$

Таким чином, після розміщення противаг заданий механізм замінюється системою двох нерухомих мас: m_A і m_D . Центр мас $S_{\text{ц}}$ нової системи (механізму з противагами) стає нерухомим, а отже, статистичне зрівноваження досягнуто.

6.2. Зрівноваження обертових ланок (роторів)

Ротором у теорії балансування (зрівноваження) називають будь-яке тіло, що обертається.

У сучасних машинах та механізмах використовується величезна кількість роторів. Це, наприклад, ротори електродвигунів, генераторів, турбін, центрифуг, помп, вентиляторів, автомобільні колеса, колінчасті та кулачкові вали, шпинделі верстатів, абразивні та шліфувальні круги, ротори приводів CD і DVD дисків, тощо.

З курсу теоретичної механіки відомо, що тиск тіла, що обертається на свої опори в загальному випадку, складається з двох складових: статичної, яка викликана дією заданих сил (силою ваги і т.п.) та динамічної, що зумовлена прискоренням рухом елементарних мас, з яких складається обертове тіло.

Якщо динамічна складова не дорівнює нулю, то ротор вважається *незрівноваженим*.

Необхідність зрівноваження роторів, що обертаються з високими швидкостями можна пояснити наступним прикладом: незрівноважений ротор масою $m = 40$ кг, обертається зі швидкістю, $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$ ($n = 100$ об/хв), ексцентриситет ротора $e = 1$ мм, у цьому випадку виникає відцентрова сила інерції $\Phi = 4$ Н;

– у випадку швидкості ротора, $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ ($n = 1000$ об/хв) – $\Phi = 400$ Н; а при $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$ ($n = 5000$ об/хв) – $\Phi = 10000$ Н. Що в 25 разів більше за навантаження від тиску на опори сили ваги самої деталі ($G = 400$ Н). Відповідно, у випадку незрівноваженості ротора, істотно зростають реакції в його опорах. У той же час є ротори з частотою обертання 75; 100 тис. об/хв.

Отже, під час обертання ланок з великою кутовою швидкістю навіть порівняно невеликі незрівноважені маси цих ланок можуть спричинити виникнення значних сил інерції і відповідних динамічних реакцій на опори

(підшипники). Крім того, необхідно особливо відмітити, що на відміну від сил ваги, сили інерції, а отже, і динамічні реакції є змінними за напрямком і можуть викликати коливання та вібрацію ланок.

Відмітимо, що за умови $\Phi \geq G$ при кожному оберті ротора буде відбуватися його “підкидання” вгору, тобто ротор буде „бити”. Подаючи дану умову у вигляді, $e = g / \omega^2 = 9,81/1000^2 = 0,01$ мм можна констатувати, що ротор, який обертається з кутовою швидкістю $\omega \geq 1000 \text{ с}^{-1}$ незалежно від його маси починає „бити” вже в разі $e = 0,01$ мм.

Будь-яке тверде тіло складається з нескінченно великого числа елементарних мас. Нехай деяка елементарна маса m_i , розміщена на відстані e_i від осі обертання $z-z$ і на відстані z_i від площини $Oxyz$, яка проходить через центр мас ротора перпендикулярно до його осі обертання (рис. 6.4). Усі відцентрові сили інерції елементарних мас, що виникають при обертанні ротора можна привести до головного вектора $\bar{\Phi}$ і головного моменту $\bar{M}$ сил інерції

$$\Phi_x = \omega^2 \sum m_i x_i = \omega^2 m x_S, \quad \Phi_y = \omega^2 \sum m_i y_i = \omega^2 m y_S.$$

У векторному вигляді можна записати $\bar{\Phi} = \omega^2 m \bar{e}$

$$M_{\Phi_x} = \omega^2 \sum m_i x_i z_i = \omega^2 I_{xz}, \quad M_{\Phi_y} = \omega^2 \sum m_i y_i z_i = \omega^2 I_{yz},$$

де m_i – елементарна маса; m – маса ротора; I_{xz} , I_{yz} – відцентрові моменти інерції ротора відносно системи координат $Oxyz$: $\bar{e} = \bar{l}_{OS}$ – радіус-вектор центра мас S ротора, або ексцентриситет ротора.

Модуль головного вектора відцентрових сил інерції визначається за формулою

$$\Phi = \omega^2 m \sqrt{x_S^2 + y_S^2}.$$

Модуль головного моменту відцентрових сил інерції можна подати у вигляді

$$M_\Phi = \omega^2 \sqrt{I_{yz}^2 + I_{xz}^2}.$$

При рівномірному обертанні ротора проекції динамічної складової тиску ротора на опори визначається таким чином

$$\begin{aligned} X_A + X_B &= \Phi_x, & Y_A + Y_B &= \Phi_y, \\ M_{\Phi_x} &= -Y_A a + Y_B b, & M_{\Phi_y} &= X_A a - X_B b. \end{aligned}$$

Незрівноваженість ротора чисельно оцінюють за допомогою головного вектора та головного моменту відцентрових сил інерції ротора.

Ротор вважається зрівноваженим, якщо головний вектор та головний момент сил інерції дорівнює нулю і, отже, ротор не чинить ніяких динамічних тисків на опори

$$\Phi = 0, \quad M_\Phi = 0.$$

Якщо ж $\Phi \neq 0, M \neq 0$ – ротор є незрівноваженим.

Усунення динамічних навантажень на опори називається *балансуванням* (зрівноваженням). Розв'язок даної задачі відноситься до динамічного проектування машин.

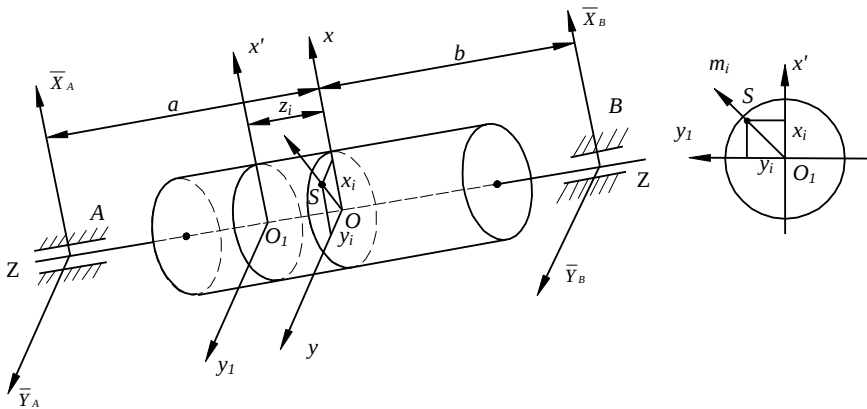


Рис. 6.4

Позначимо $\bar{D}_{cm} = m\bar{e}$ – вектор, що називається головним вектором дисбалансів ротора, або D_{cm} це *статичний дисбаланс* ротора, вимірюється у $[г \cdot мм]$. Звичайно $\bar{\Phi} = \omega^2 D_{cm}$.

Аналогічно $M_D = \sqrt{I_{yz}^2 + I_{xz}^2}$ – це *моментний дисбаланс* ротора (динамічний дисбаланс), вимірюється $[г \cdot мм^2]$. Звичайно $\bar{M}_\Phi = \bar{M}_D \omega^2$.

Зазначимо, що на практиці незрівноваженість ротора характеризують не через $\bar{\Phi}$ та M_Φ , а через пропорційні їм головний вектор $\bar{D}_{cm}$ і головний момент M_D дисбалансів ротора.

Види незрівноваженості ротора. На рис. 6.5 наведені різні випадки незрівноваженості ротора.

Статична незрівноваженість. При статичній незрівноваженості головна центральна вісь ротора $U-U$ паралельна осі обертання $x-x$ (головна вісь інерції – вісь $U-U$ для якої відцентрові моменти інерції I_{xu} та I_{yu} дорівнюють нулю). При цьому центр мас ротора знаходиться на відстані e від цієї осі. Відцентрові сили зводяться до рівнодіючої, прикладеної до центра мас ротора. Тобто, у цьому випадку $e \neq 0$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$.

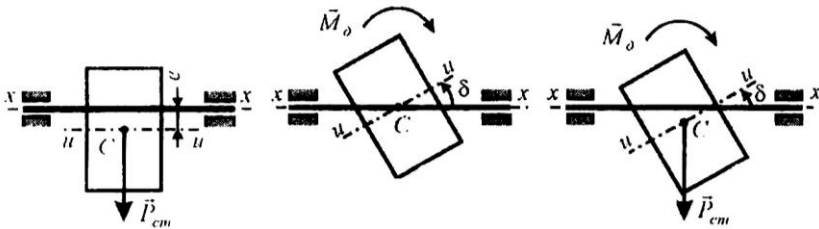


Рис. 6.5

Статичне балансування проводять лише для роторів, що обертаються з малими швидкостями та мають невеликі розміри у напрямку осі обертання. Тобто, для роторів з невеликою шириною порівняно з діаметром роторів, які можна розглядати як систему точкових мас, розміщених в одній площині. У цьому випадку одночасно зі статичним зрівноваженням виконується умова повного зрівноваження.

Умовою статичної зрівноваженості ротора є рівність нулю головного вектора відцентрових сил інерції; тобто дисбаланс ротора має дорівнювати нулю, і, отже, центр мас ротора – бути на осі обертання.

Виконаємо статичне зрівноваження ротора, що має деякий дисбаланс. Сила інерції незрівноваженої маси ротора в загальному випадку визначається за формулою

$$\bar{\Phi} = m\bar{a}_s = \bar{\Phi}^n + \bar{\Phi}^r,$$

де $\Phi^n = me\omega^2$, $\Phi^r = me\varepsilon$. Тоді $\Phi = me\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$.

З теоретичної механіки відомо, що силу можна зрівноважити лише силою, рівною їй за модулем, яка діє вздовж тієї ж прямої і спрямована у протилежний бік. Таку силу можна створити за допомогою встановлення додаткової маси противаги, тобто

$$\Phi = \Phi_{np}, \quad me\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = m_{np}e_{np}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (4)$$

Звідси умова підбору противаг $m\varepsilon = m_{np}\varepsilon_{np}$, тобто $D_{ст} = -D_{ст, np}$.

Центр мас противаги повинен бути на лінії дії вектора $D_{ст}$, і знаходиться з іншого боку від осі обертання.

З (4) випливає, що ротор зрівноважений при деякому значенні ω , зберігає свою зрівноваженість для будь-якої кутової швидкості, як постійної так і змінної.

Зрівноваження декілька мас, що обертаються в одній площині. Необхідно зрівноважити три маси, які знаходяться на валу в одній площині (рис. 6.6), тобто знайти величину і положення зрівноваженої маси, якщо задані $m_1, m_2, m_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, r_1, r_2, r_3$.

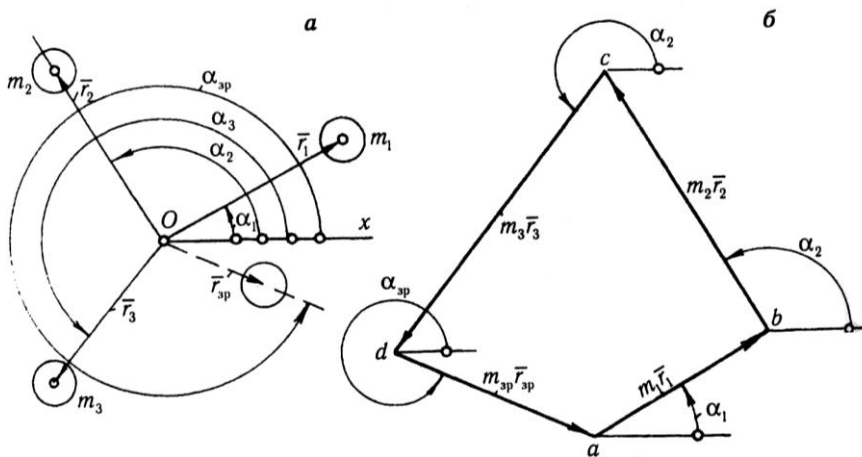


Рис. 6.6

Обчислюємо величину статичних дисбалансів мас (добуток маси на відстань її від осі обертання):

$$D_{C_1} = m_1 r_1; D_{C_2} = m_2 r_2; D_{C_3} = m_3 r_3.$$

Складаємо рівняння рівноваги обертових мас у вигляді суми усіх статичних дисбалансів, яка у випадку рівноваги повинна дорівнювати нулю

$$m_1 \overset{\perp}{r}_1 + m_2 \overset{\perp}{r}_2 + m_3 \overset{\perp}{r}_3 + m_{zp} \overset{\perp}{r}_{zp} = 0 \text{ або } \overset{\perp}{D}_{C_1} + \overset{\perp}{D}_{C_2} + \overset{\perp}{D}_{C_3} + \overset{\perp}{D}_{C_{zp}} = 0.$$

Будуємо, згідно з цим рівнянням замкнений векторний контур статичних дисбалансів (рис. 6.6). Побудову здійснюємо у масштабі μ_D . Тоді відрізки, які відображають відповідні вектори, будуть:

$$ab = \frac{D_{C_1}}{\mu_D}; \quad bc = \frac{D_{C_2}}{\mu_D}; \quad bcd = \frac{D_{C_3}}{\mu_D}.$$

Векторам дисбалансів $\overset{1}{D}_{C_i}$ надаємо такі напрямки, які мають радіус-вектори $\overset{1}{r}_i$; кути α_i вимірюємо від лінії, що проходить через початок відповідного вектора паралельно осі обертання x .

З'єднавши кінець вектора $\overset{1}{D}_{C_3} = m_3 \overset{1}{r}_3$ (точку d) з початком вектора $\overset{1}{D}_{C_1} = m_1 \overset{1}{r}_1$ (точкою a), знаходимо величину da і напрямок α_{zp} зрівноважувального вектора $\overset{1}{D}_{zp} = m_{zp} \overset{1}{r}_{zp}$. Задавшись, наприклад величиною радіуса, знаходимо зрівноважуючу масу m_{zp}

$$m_{zp} = \frac{D_{zp}}{r_{zp}}.$$

Моментна незрівноваженість. Має місце, коли центр мас S ротора знаходиться на осі обертання, а його головна центральна вісь $u-u$ перетинається з віссю обертання $x-x$ у центрі мас ротора. В цьому випадку $e = 0$, $I_{xz} \neq 0$, $I_{yz} \neq 0$; відцентрові сили інерції зводяться до однієї пари сил з моментом, що дорівнює головному моменту. Оскільки пара сил зрівноважується тільки парою, то усунути моментну незрівноваженість можна лише як мінімум двома противагами.

$$M_D = m_{np} e_{np} z.$$

Прикладом може бути неточний монтаж шківів на валу.

Динамічна незрівноваженість. В разі динамічної незрівноваженості ротора його головна центральна вісь $u-u$ перехрещується з віссю обертання, або перетинається, але не в центрі мас. При такому дисбалансі відцентрові сили зводяться до головного вектора і моменту:

$$e_{cm} \neq 0, \quad I_{xz} \neq 0, \quad I_{yz} \neq 0.$$

Балансування твердого ротора – це процес суміщення головної центральної осі ротора з його віссю обертання.

6.3. Динамічне балансування роторів при проектуванні

Задачею динамічного балансування ротора є не тільки зведення центра мас до осі обертання, але й забезпечення співпадання головної центральної осі інерції ротора з віссю обертання.

Нехай ротор становить сукупність кількох мас (деталей), які обертаються як одне ціле. При цьому маси та координати центрів мас усіх деталей відомі (рис. 6.7).

Зазначимо, що можна було б кожен з мас зрівноважувати окремо за методикою статичного зрівноваження. Однак цей шлях є недоцільним, оскільки у таких системах майже завжди має місце часткове взаємне зрівноваження дисбалансів.

Таким чином, розглянемо ротор, що становить чотири незрівноважених маси, розміщені у площинах, перпендикулярних до осі обертання. Координати центрів мас у цих площинах визначаються радіус-векторами $\vec{e}_i$.

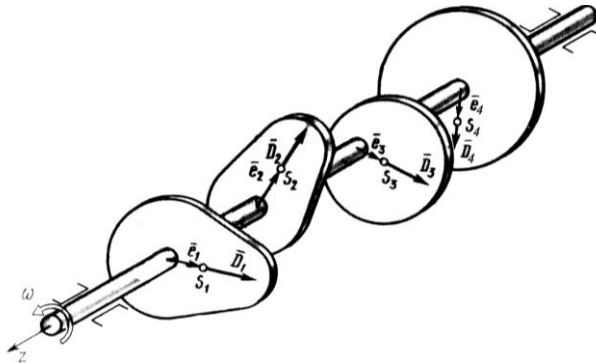


Рис. 6.7

Динамічного зрівноваження можна досягти за допомогою, як мінімум, двох противаг, які встановлюють у двох різних площинах. Для цього оберемо дві площини зведення (I та II), які перпендикулярні до осі обертання (рис. 6.8, а). Позначимо маси цих противаг m_I і m_{II} , а радіус-вектори, що визначають координати центрів мас щодо осі обертання, e_I , e_{II} .

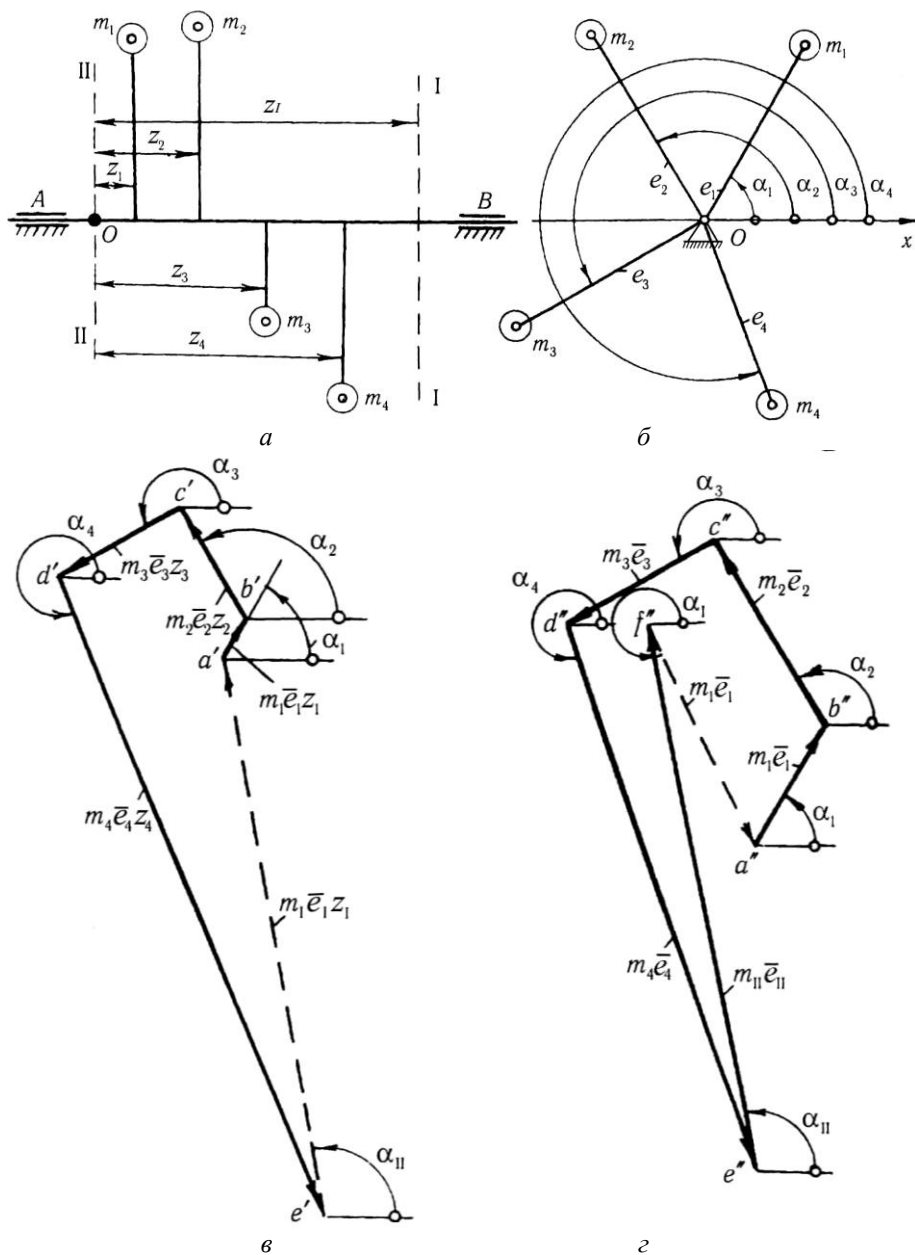


Рис. 6.8

Тоді умови динамічного зрівноваження робота можуть бути записані наступним чином

$$\sum_{i=1}^4 m_i \bar{e}_i + m_I \bar{e}_I + m_{II} \bar{e}_{II} = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^4 m_i \bar{e}_i z_i + m_I \bar{e}_I z_I = 0. \quad (6)$$

При аналітичному розв'язуванні цієї задачі систему (5), (6) проєктуються на осі координат. З рівняння проєкцій знаходять невідомі параметри.

Зручнішим та більш наочним є графічний спосіб розв'язування цих рівнянь. Визначення величини і розміщення противаг у такий спосіб досягається побудовою векторних багатокутників.

Спочатку будуюмо векторний багатокутник згідно з рівнянням (6). При цьому вектори динамічного дисбалансу $m_i \bar{e}_i z_i$ зручно повернути на 90° так, щоб вони збігалися з напрямками відповідних сил інерції.

У вибраному масштабі, будують п'ятикутник, який складається з відомих векторів:

$$m_1 \bar{e}_1 z_1, m_2 \bar{e}_2 z_2, m_3 \bar{e}_3 z_3, m_4 \bar{e}_4 z_4,$$

та невідомого вектора $m_I \bar{e}_I z_I$, що замкне побудову (рис. 6.8, в).

З отриманого вектора $m_I \bar{e}_I z_I$, задавшись однією з шуканих величин (наприклад масою противаги), визначають іншу невідому (радіус противаги). Напрямок радіус-вектора $\bar{e}_I$ противаги визначають кутом α_I , який вимірюють безпосередньо на кресленні.

Потім будуюмо векторний багатокутник за рівнянням (5). У цьому багатокутнику невідомою величиною буде замикаючий вектор, модуль якого дорівнює добутку $m_{II} e_{II}$. Задавши один із співмножників у цьому добутку, знайдемо другий. Кут α_I , який визначає напрямок радіуса-вектора противаги, знайдемо з рисунка 6.8, г.

Статичне та динамічне балансування виготовлених роторів.

Повністю збалансований при проектуванні ротор після виготовлення має, тим не менше, деяку незрівноваженість.

Усі ротори, що швидко обертаються, перевіряють експериментально на спеціальних балансувальних машинах. Конструкція їх досить різноманітна, але в основу дії більшості з них покладено встановлення ротора на пружну основу (рис. 6.9), при цьому ротору надають швидкості близької до резонансної. Тоді незрівноважені сили створюють значні амплітуди коливань, які реєструють спеціальні пристрої, що дозволяють визначити місця, в яких треба встановити зрівноважувальні маси.

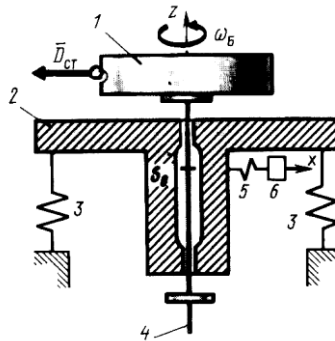


Рис. 6.9

Зрівноваження роторів автобалансируемими пристроями – автобалансирами. Якщо дисбаланс ротора й зв'язаних з ним мас у процесі роботи постійно змінюється то його доцільно неперервно добалансовувати – зрівноважувати на ходу. До машин, які містять такі ротори належать: пральні машини, центрифуги, шліфувальні машини і т.п. Навіть дисбаланс осьових вентиляторів помітно змінюється в процесі їх експлуатації (внаслідок потрапляння пилу на лопаті їх корозії, зношування під дією твердих абразивних частинок).

Для зрівноваження роторів в процесі їх роботи використовують автобалансири (АБП). Їх розміщують усередині ротора, або насаджують на нього. Зрівноваження ротора здійснюється переміщенням коригувальних вантажів

АБП бувають активні та пасивні. Активні АБП працюють при будь-яких швидкостях. Але вони мають порівняно складну будову. У їх конструкції необхідна наявність механізмів примусового переміщення коригувальних вантажів, датчиків і т.п.

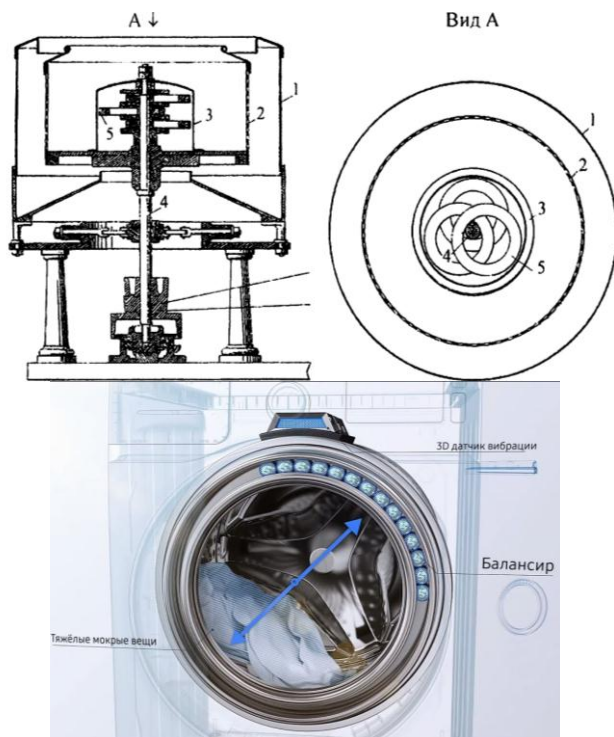


Рис. 6.10

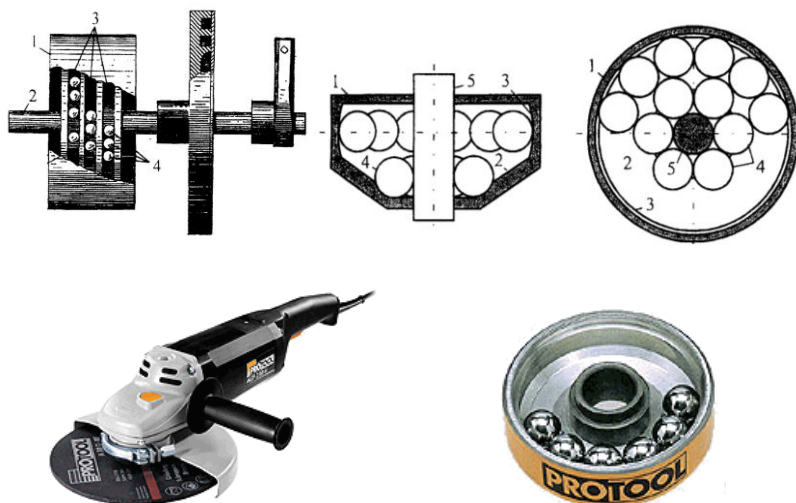


Рис. 6.11

Пасивні АБП працюють на закритичних швидкостях обертання ротора, мають відносно просту конструкцію. Їхня робота ґрунтується на явищі самоцентрування – на закритичних швидкостях обертання гнучкого- або пружно закріпленого твердого ротора, його головна центральна вісь інерції прямує до осі обертання, причому тим більше, чим вища швидкість обертання. АБП бувають з твердими коригувальними вантажами (рис. 6.10) та рідинні, у яких коригувальним вантажем є рідина.

Питання для самоконтролю

1. Зрівноваження механізмів.
2. Які основні види незрівноваженості механізмів?
3. У чому полягає статичне зрівноваження механізмів?
4. Зрівноваження обертових ланок (роторів).
5. Що таке статичний дисбаланс?
6. Що таке моментний дисбаланс?
7. Основні види незрівноваженості ротора?
8. Суть методу замінювальних мас?
9. Які ротори підлягають лише статичному зрівноваженню?
10. Скільки коригувальних мас необхідно закріпити на роторі при статичному зрівноваженні?
11. Скільки коригувальних мас потрібно для динамічного зрівноваження?
12. Які бувають автобалансири?
13. Балансування виготовлених роторів.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИ ПРОЕКТУВАННЯ СХЕМ ОСНОВНИХ ВИДІВ МЕХАНІЗМІВ

ГЛАВА 7. СИНТЕЗ ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

У ТММ в основному розв'язуються задачі першого етапу проектування механізмів - вибору кінематичних схем механізмів, які б забезпечили необхідний закон руху. Проектування схеми механізму за заданими властивостями називають *синтезом механізму*. Розрізняють три види синтезу: структурний, кінематичний та динамічний.

Проектування механізму починається з вибору структурної схеми, схеми, яка має потрібне число ступенів вільності, кількість і вид ланок та кінематичних пар, що забезпечують необхідні рухи та взаємне розташування ланок. Схему механізму вибирають з використанням довідкових даних, або розробляють на основі аналізу видів руху, які повинні бути отримані. На практиці вибір структурної схеми виконується частіше за все на основі існуючого досвіду, знань або інтуїції проектувальника.

Після встановлення структурної схеми механізму визначають геометричні розміри його ланок за заданими властивостями. При цьому враховуються в основному кінематичні функції, які повинен реалізовувати механізм. Цю задачу називають кінематичним синтезом механізму. Якщо потрібно врахувати також динамічні властивості механізму, то розв'язується більш загальна задача динамічного синтезу. Останнім часом все актуальнішими стають задачі динамічного синтезу. Синтез механізму дозволяє отримати кінематичну схему, що відповідає вимогам, які пред'являються до механізму, що проектується. Таким чином, при проектуванні важільного механізму необхідно за вибраною структурною схемою та заданими кінематичними чи динамічними параметрами визначити розміри ланок механізму.

Синтез плоских важільних механізмів містить цілу низку конкретних задач, серед яких слід відзначити: умови існування кривошипа в чотириланкових механізмах; синтез за декількома заданими дискретними положеннями ланок; синтез за заданою траєкторією або за окремими кінематичними параметрами (середній швидкості, співвідношенню середніх швидкостей при марноході та робочому ході і т.ін.). Розглянемо декілька найпростіших найбільш характерних задач.

7.1. Умови існування кривошипа в плоских чотириланкових механізмах

При проектуванні різних механізмів виникає потреба забезпечення неперервного обертання одних ланок відносно інших. Найчастіше такий рух є необхідним для вхідних ланок – кривошипів при використанні їх в як привода

оберткових двигунів. Таким чином, важливою кінематичною характеристикою при синтезі механізму є прокручування ланок, тобто, наявність у нього одного чи двох кривошипів. Ця властивість залежить від співвідношення довжин ланок механізму і може бути наведена математично у вигляді деяких нерівностей.

Плоский шарнірний чотириланковик. Нехай задані довжини ланок l_1, l_2, l_3 та l_4 шарнірного чотириланковика $ABCD$ (рис. 7.1, а). Потрібно з'ясувати, за яких умов ланка AB буде кривошипом, тобто зможе провертатись на кут 360° . Очевидно, що для цього вона повинна при обертанні послідовно пройти через крайнє ліве AB_1 і крайнє праве AB_2 положення. Іншими словами, необхідно, щоб існували трикутники B_1C_1D та B_2C_2D . На основі властивості, що в будь-якому трикутнику довжина кожної сторони менша за суму довжин двох інших сторін, для $AB_1C_1D_1$ та $AB_2C_2D_2$ можна записати такі нерівності

$$l_4 + l_1 < l_2 + l_3, \quad (7.1)$$

$$l_4 - l_1 < l_2 + l_3 \quad (7.2)$$

Нехай l_1 - довжина найкоротшої ланки, а l_4 - довжина найдовшої ланки. Тоді, незалежно від співвідношення між довжинами l_2 та l_3 , нерівність (7.1) завжди забезпечить виконання нерівності (7.2). Якщо ж найдовшою є ланка BC або CD ($l_2 > l_3 > l_4$ або $l_3 > l_2 > l_4$), то нерівність (7.1) тільки підсилюється.

Нерівність (7.1) дозволяє сформулювати умову існування кривошипа шарнірного чотириланковика, так зване правило Грасгофа:

найкоротша ланка може бути кривошипом, якщо сума довжин найкоротшої та найдовшої ланок менша за суму довжин інших двох ланок.

Сформульована умова дозволяє поділити шарнірні чотириланковики на три групи механізмів: кривошипно - коромислові, якщо розміри ланок механізму задовольняють вказане правило та за стояк прийнято ланку, що розташована поруч з найкоротшою; двокривошипні, якщо розміри ланок задовольняють правило та за стояк прийнято найкоротшу ланку; двокоромислові, якщо розміри ланок не задовольняють правило, а також якщо задовольняють, але найкоротша його ланка є шатуном.

Кривошипно-повзунний механізм (рис. 7.1, б). Для цього механізму умова існування кривошипа визначається очевидною нерівністю

$$l_1 < l_2 - |e|, \quad (7.3)$$

де e – зміщення механізму.

Якщо умова (7.3) не виконується, то ланка 1 є коромислом. У цьому разі механізм правильніше називати коромислово-повзунним.

На практиці переважно застосовуються центральні кривошипно-повзунні механізми ($e=0$), для яких умова (7.3) приймає вид $l_1 < l_2$.

Кулісний механізм. У кулісному механізмі ланка 1, незалежно від співвідношення між розмірами ланок завжди є кривошипом (рис.7.1, в). Щодо куліси 3, то вона буде кривошипом, якщо виконується умова

$$l_1 > l_4 + e. \quad (7.4)$$

В іншому випадку куліса не зможе здійснювати повний оберт, тобто буде коромислом. У першому випадку отримується так званий *механізм з обертовою кулісою*; в другому – *механізм з коливною кулісою*. В частковому випадку, якщо точку C віддалити у нескінченність, то коливна куліса перетвориться в кулісу, що рухається поступально. Зазначимо, що в техніці найрозповсюдженіші схеми кулісних механізмів, у яких зміщення $e=0$.

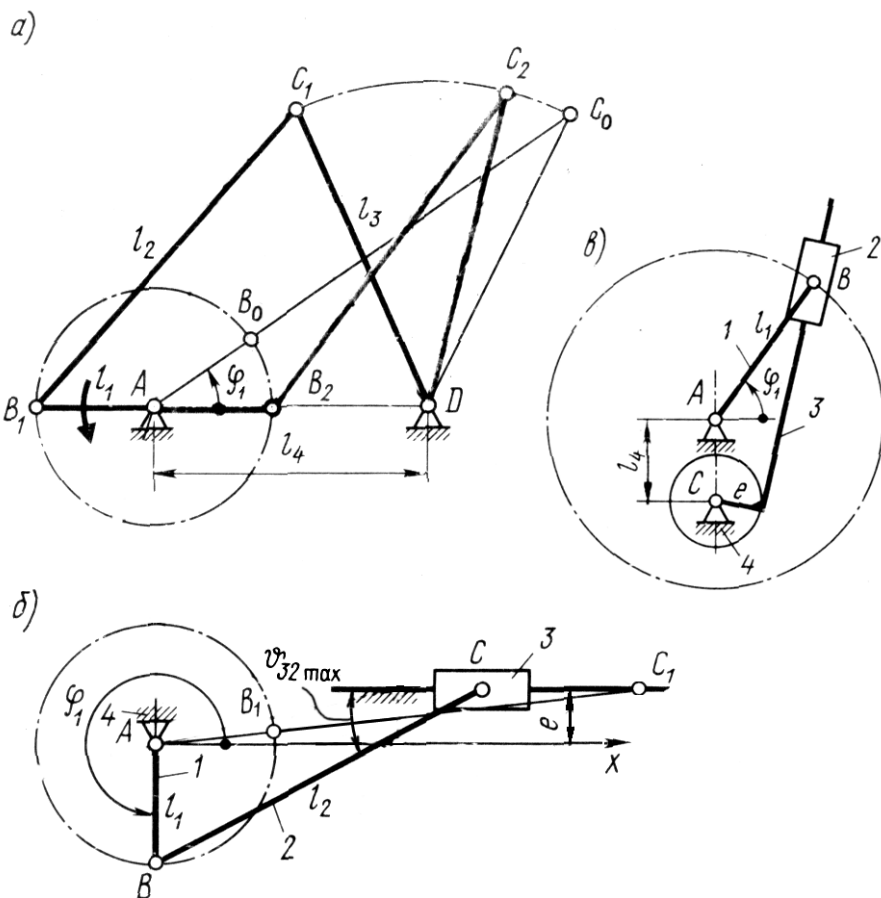


Рис. 7.1

7.2. Синтез чотириланкових механізмів за двома положеннями ланок

Задачі синтезу важільних механізмів за положеннями ланок можуть бути розв'язані аналітично, наприклад, методом інтерполяції. Частіше, проте, використовуються графічні побудови.

Шарнірний чотириланковик. Задано відстань l_4 між нерухомими точками механізму, довжину веденого коромисла l_3 та два його крайніх положення, за допомогою кутів γ_1 і γ_2 (рис. 7.2, а). Необхідно знайти довжину кривошипа l_1 та шатуна l_2 .

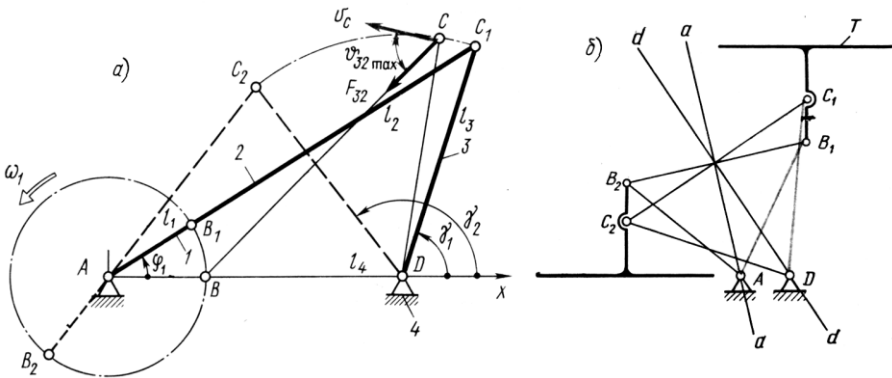


Рис. 7.2

З'єднаємо прямими лініями точки C_1 та C_2 з точкою A . Тоді

$$l_{AC_1} = l_1 + l_2, \quad l_{AC_2} = l_2 - l_1,$$

$$\text{звідки } l_1 = \frac{l_{AC_1} - l_{AC_2}}{2}, \quad l_2 = \frac{l_{AC_1} + l_{AC_2}}{2}. \quad (7.5)$$

При розв'язку цієї задачі положення т. A – осі обертання кривошипа, вибираємо довільним, отже, в загальному випадку задача має багато розв'язків. При проектуванні механізмів потрібно враховувати такий досить важливий параметр, як кут тиску.

Кут тиску ϑ - кут між вектором сили, яка прикладена до ланки, та вектором швидкості точки прикладання сили (тертя при цьому не враховується). Як відомо, кут тиску характеризує ефективність передачі сил та працездатність механізму; кут тиску не повинен перевищувати

допустимого значення, $\vartheta_{\max} \leq \vartheta_{\text{доп}}$. Таким чином, при синтезі необхідно перевіряти величину кута тиску у тих положеннях механізму, в яких кут досягає максимальних значень (часто обмежуються робочим ходом).

У шарнірному чотириланковому механізмі кут тиску досягає максимального значення, якщо положення кривошипа AB співпадає з лінією центрів AD , тобто $\vartheta_{32} = \vartheta_{32\max}$ при $\varphi_1 = 0^\circ, 180^\circ$ (рис. 7.2, а).

Розглянемо ще одну задачу проектування шарнірного чотириланкового механізму за двома положеннями ланок. Вона менш характерна, але є досить наочною. Нехай, необхідно знайти розміри ланок шарнірного чотириланкового механізму $ABCD$, у якому шатун BC з'єднаний зі столом T ; при цьому стіл повинен мати можливість приймати два положення, які повернуті одне відносно іншого на 180° (рис. 7.2, б). Таким чином, задано два положення стола T , і відповідно - шатуна: B_1C_1 та B_2C_2 (положення шарнірів B та C на столі T вибираються довільно). Очевидно, що точки B_1, B_2 повинні лежати на колі з центром у шуканій точці A обертання кривошипа. Цей центр лежить на прямій aa , яка проведена перпендикулярно до відрізка B_1B_2 через його середину. Аналогічно шуканий центр D обертання коромисла лежить на прямій dd , що проведена перпендикулярно до прямої C_1C_2 через її середину. Вибираючи положення центрів обертання A та D у довільних точках прямих aa та dd , отримуємо різні варіанти механізму. Для одержання однозначного розв'язку необхідно врахувати якусь додаткову умову.

Кривошипно-повзунний механізм (рис. 7.3, а). Нехай задано хід повзуна h , або два його крайні положення – точки C_0, C'_0 . Для центрального кривошипно-повзунного механізму хід повзуна дорівнює подвоєній довжині кривошипа; $h = 2l_1$. Зауважимо, що, як і у попередніх випадках, задача має багато розв'язків.

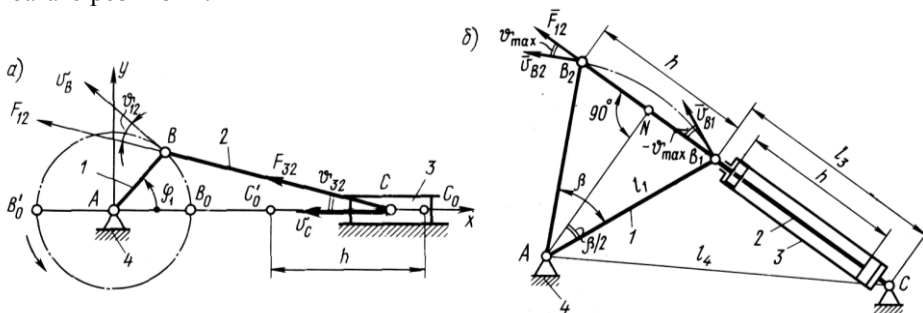


Рис. 7.3

У розглядуваному випадку необхідно також врахувати допустимий кут тиску. Якщо веденою ланкою є повзун, то максимальний кут тиску $\vartheta_{32\max}$ визначається шляхом дослідження функції $\vartheta_{32}(\varphi_1)$ на максимум. Для

центрального кривошипно-повзунного механізму максимальне значення кута тиску $\vartheta_{32} = \arcsin l_1 / l_2$ буде при $\varphi_1 = 90^\circ; 270^\circ$. Таким чином, при менших розмірах механізму (менші значення $\lambda_2 = l_2 / l_1$) збільшується кут тиску, і відповідно, незалежно від того, яка ланка є ведена, зростає зусилля між повзуном та напрямною. Тому відношення λ_2 треба вибирати в певних межах, наприклад, для механізмів двигунів внутрішнього згоряння $\lambda_2 = 3-5$.

Зауважимо, що при веденому кривошипі кут тиску ϑ_{12} два рази за період ($\varphi_1 = 0^\circ; 360^\circ$) приймає максимальне значення, що дорівнює 90° . Ці положення кривошипу проходить лише завдяки інерції маси ланки 1, яка обертається.

У кривошипно-повзунному механізмі зі зміщенням e хід повзуна h вже не дорівнює $2l_1$, але є близьким за значенням до цієї величини. Точне значення ходу повзуна можна визначити з трикутників $AC_1C'_1$, $AC_2C'_2$ (рис. 7.1, б)

$$h = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - e^2} - \sqrt{(l_2 - l_1)^2 - e^2}. \quad (7.6)$$

Звідси при заданих h , e і $\lambda_2 = l_1 / l_2$ можна визначити l_1 . Наприклад, методом інтерполяційного наближення. Для цього задаються рядом значень l_1 , близьким до $h/2$, та перевіряють рівність лівої та правої частини рівняння (7.6). Максимальний кут тиску $\vartheta_{32 \max}$ при $e > 0$ (як на рис. 7.1, б) буде в положенні, коли $\varphi_1 = 270^\circ$, якщо ж $e < 0$, то при $\varphi_1 = 90^\circ$.

Кулісний механізм. Розглянемо конструктивний різновид механізму, що застосовується в гідроприводах (рис. 7.3, б). Особливість його у тому, що ведуча ланка – поршень 2 не з'єднується зі стояком. При переході з одного крайнього положення в інше поршень, що рухається під тиском рідини, переміщується на відстань h (хід поршня). При цьому ведене коромисло 1 довжиною l_1 повертається на потрібний кут β . З $\triangle AB_1N$ одержимо формулу, що встановлює взаємозв'язок між кутом β , ходом поршня h та довжиною коромисла

$$h = 2l_1 \sin(\beta/2).$$

З $\triangle AB_1C$, за теоремою косинусів, знаходиться довжина стояка AC

$$l_4 = \sqrt{l_1^2 + l_3^2 + 2l_1l_3 \sin \beta/2}.$$

Проектування з урахуванням кута тиску. Задано кутове переміщення

веденої ланки β , довжина коромисла l_1 , коефіцієнт $k = l_3 / h$, допустимий кут тиску $\vartheta_{\text{дон}}$. Кут тиску в таких механізмах - кут між віссю циліндра за напрямком якої передається зусилля F_{12} , та вектором швидкості v_B точки прикладання сили. Максимальний кут тиску ϑ_{12} буде в крайніх положеннях механізму, при цьому приймає значення, що дорівнює половині величини вибраного кутового ходу β . Отже, значення кута β вибирають, враховуючи умову $\vartheta_{\text{max}} = \beta / 2 < \vartheta_{\text{дон}}$.

Відкладемо кут розмаху коромисла β , а на його сторонах - відрізки довжиною l_1 . Отже, AB_1, AB_2 - два крайні положення коромисла, хід поршня $h = l_{B_1B_2}$. Відкладемо на продовженні прямої B_2B_1 відстань $l_3 = kh$ і отримуємо шукані положення кінематичної пари C та довжину стояка l_4 .

7.3. Синтез чотириланкових механізмів за коефіцієнтом зміни середньої швидкості та за середньою швидкістю вихідної ланки

Кривошипно - коромисловий механізм. Задано довжину коромисла l_3 , два його крайні положення за допомогою кутів γ_1, γ_2 ($\beta = \gamma_2 - \gamma_1$), а також коефіцієнт зміни середньої швидкості k_ω вихідної ланки 3. Потрібно знайти: довжини кривошипа l_1 , шатуна l_2 та стояка l_4 (рис.7.4, а).

Коефіцієнт зміни середньої швидкості k_ω - це відношення середніх кутових швидкостей вихідної ланки при марноході та робочому ході механізму

$$k_\omega = \frac{\omega_x}{\omega_p} = \frac{\beta / t_x}{\beta / t_p} = \frac{t_p}{t_x}. \quad (7.7)$$

Зазвичай величина коефіцієнта k_ω більша за одиницю, $k_\omega > 1$. Це пов'язано з тим, що при робочому ході механізму швидкість вихідної ланки обмежується технологічним процесом. При марноході такого обмеження немає, крім того, сили опору є значно меншими, і тому для підвищення продуктивності машини швидкість вихідної ланки вибирається більшою. Відповідно до цього, рух коромисла з положення 1 у положення 2 приймаємо за робочий хід - кривошип повернеться на кут φ_p , а рух у протилежному напрямі - за марнохід - кривошип повернеться на кут φ_x . Значимо, що більший з центральних кутів повороту кривошипа φ_p , що відповідає крайнім положенням вихідної ланки, називають *кутом робочого ходу*. Як слідує з рис. 7.4, а, за час робочого ходу t_p та марноходу t_x кривошип повернеться,

відповідно, на кути $\varphi_p = 180^\circ + \theta$, $\varphi_x = 180^\circ - \theta$, де θ - кут перекриття, кут між положеннями шатуна, що відповідають крайнім положенням коромисла. Отже,

$$k_{\omega} = \frac{\varphi_p}{\varphi_x} = \frac{180^0 + \theta}{180^0 - \theta}. \quad (7.8)$$

З виразу (7.8) знаходимо кут θ

$$\theta = 180^\circ \frac{k_\omega - 1}{k_\omega + 1}.$$

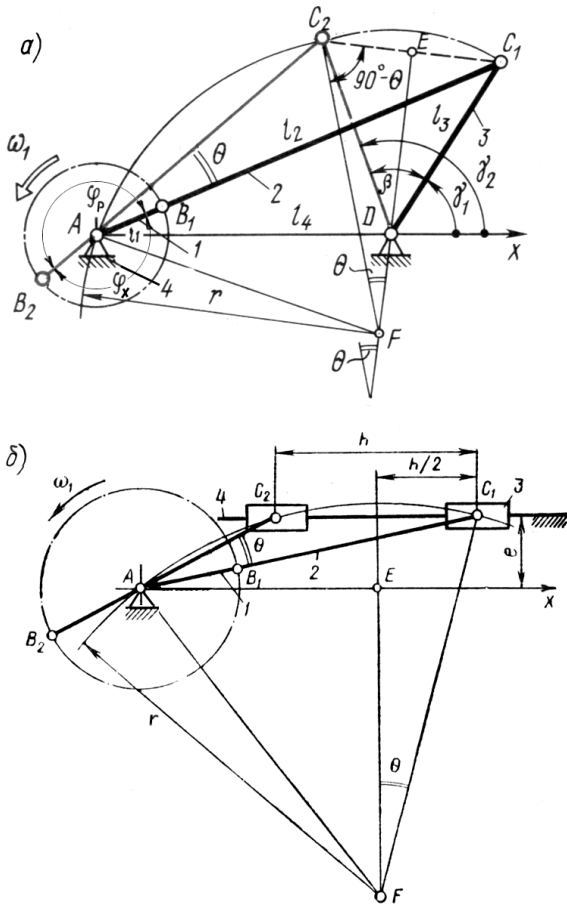


Рис. 7.4

Після цього задача зводиться до знаходження центра обертання A

кривошипа. Побудуємо кут ходу коромисла з вершиною у довільно вибраній точці D , а на його сторонах відкладемо довжину коромисла l_3 . Отримуємо точки C_1, C_2 . Проводимо бісектрису ED кута β . На продовженні прямої ED зі сторони $t.C_2$ відкладаємо кут перекриття θ . Через $t.C_2$, до перетину з продовженням ED , проводимо пряму, що паралельна стороні побудованого кута перекриття. З отриманої точки перетину F , як із центра, проводимо коло, що проходить через точки C_1, C_2 . Коло радіусом $r=C_2F$ буде геометричним місцем шуканих центрів обертання кривошипа, оскільки при виборі центра у будь-якій точці цього кола, кут перекриття дорівнюватиме заданому (кут, вписаний у коло, дорівнює половині відповідного центрального кута, $\angle C_1AC_2 = \frac{1}{2} \angle C_1FC_2 = \theta$). Щоб задача мала один розв'язок, задамося додатковою умовою – центр обертання кривошипа знаходиться на осі абсцис (інколи додатковою умовою може бути обмеження $\vartheta_{\max} < \vartheta_{\text{дон}}$). Відмітимо, що для більшої точності радіус $r=C_2F$ допоміжного кола можна порахувати за формулою $r = l_3 \frac{\sin(\beta/2)}{\sin \theta}$.

Після цього довжини кривошипа та шатуна вираховуємо за формулами (7.5). Зазначимо, якщо в спроектованому механізмі максимальний кут тиску виявиться більшим за допустимий, слід вибрати інше положення центра обертання кривошипа (на колі радіуса r , вище за точку A).

Кривошипно-повзунний механізм. У центральному кривошипно-повзунному механізмі швидкість повзуна в прямому та оберненому рухах однакова, коефіцієнт зміни середньої швидкості $k_v = 1$.

При синтезі таких механізмів часто виникає задача проектування за відомою середньою швидкістю v_{cp} вихідної ланки. Для центрального механізму хід повзуна дорівнює подвоєній довжині кривошипа. Тому можна записати

$$v_{cp} = \frac{2h}{60/n_1} = \frac{4l_1n_1}{60}, \quad (7.9)$$

де n_1 , об/хв – частота обертання кривошипа.

З виразу (7.9) одержуємо формулу для визначення довжини кривошипа

$$l_1 = \frac{15v_{cp}}{n_1}.$$

Довжину шатуна визначаємо за вибраним коефіцієнтом λ_2 , $l_2 = l_1 \lambda_2$.

Синтез кривошипно-повзунного механізму зі зміщенням за заданим коефіцієнтом зміни середньої швидкості k_v та ходом вихідної ланки. Коефіцієнт зміни середньої швидкості вихідної ланки для даного механізму

$$k_v = \frac{v_x}{v_p} = \frac{h/t_x}{h/t_p} = \frac{\varphi_p}{\varphi_x} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta} . \quad (7.10)$$

Розв'язавши рівняння (7.10) відносно кута θ , одержимо

$$\theta = 180^\circ \frac{k_v - 1}{k_v + 1} .$$

Після цього задача зводиться до знаходження центра обертання A кривошипа, яка є аналогічною до розглянутої задачі для кривошипно-коромислового механізму. Проводимо через середину ходу h повзуна пряму, перпендикулярну до C_2C_1 (рис. 7.4, б). Далі, через точку C_1 проводимо пряму, що складає кут θ з побудованим перпендикуляром. Коло радіуса $r=C_1F$, буде геометричним місцем шуканих центрів обертання кривошипа. Якщо задана величина зміщення e , то центр A знаходиться як точка перетину побудованої дуги кола $r=C_1F$ та осі абсцис, що знаходиться на відстані e від ходу h .

Кулісний механізм. Розглянемо проектування цих механізмів на прикладі шестиланкового механізму з коливною кулісою (рис. 7.5). Для таких механізмів, як правило, відомо хід h вихідної ланки та коефіцієнт зміни її середньої швидкості k_v .

Виявляється, що для механізмів даного виду коефіцієнт k_v залежить лише від кутового ходу куліси θ .

$$k_v = \frac{v_x}{v_p} = \frac{h/t_x}{h/t_p} = \frac{\varphi_p}{\varphi_x} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta} .$$

Як і у попередніх задачах, де зустрічається коефіцієнт зміни середньої швидкості вихідної ланки, знаходимо кут θ

$$\theta = 180^\circ \frac{k_v - 1}{k_v + 1} .$$

Для визначення довжини куліси розглянемо її крайнє ліве положення

$$l_3 = \frac{h}{2 \sin(\theta/2)} ,$$

а з прямокутного $\triangle ABC$ визначаємо співвідношення між розмірами ланок l_1, l_6

$$l_1 = l_6 \sin(\theta/2) \quad (7.11)$$

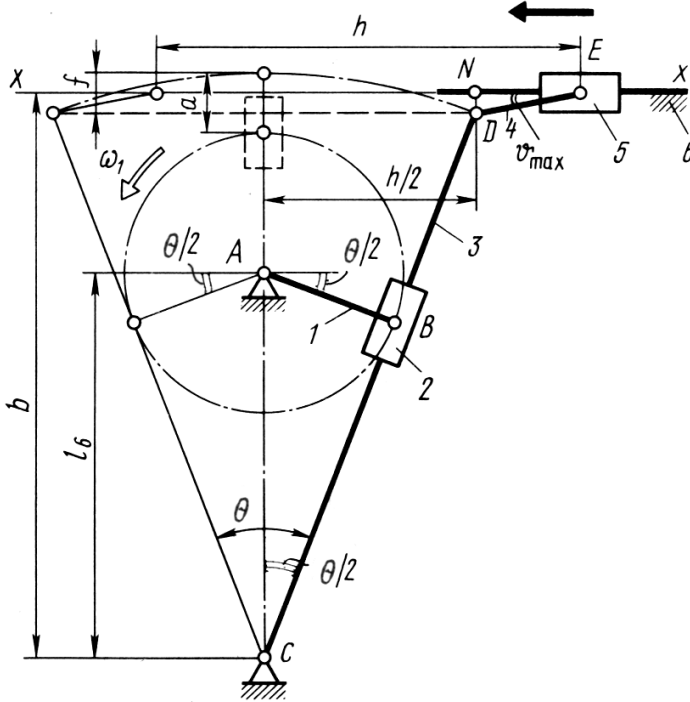


Рис. 7.5

З іншого боку, при вертикальному положенні куліси можна записати таке співвідношення, що зв'яже розміри l_1, l_3, l_6

$$l_3 = l_6 + l_1 + a, \quad (7.12)$$

де a – розмір, що вибирають з конструктивних міркувань.

З виразу (7.12), після підстановки (7.11), знаходимо

$$l_6 = \frac{l_3 - a}{1 + \sin(\theta/2)}.$$

Щодо кутів тиску, то при ведучому кривошипі кут $\vartheta_{32} = 0$, тобто за весь

період руху напрям зусилля, що передається від кулісного каменя (повзун 2) до куліси 3, співпадає зі швидкістю точки прикладання зусилля. Даний факт є важливою позитивною властивістю цих механізмів.

З метою забезпечення найменшого кута тиску ϑ_{34} при передачі зусилля від шатуна 4 до веденого повзуна 5 його напрямну xx необхідно розмістити таким чином, щоб вона ділила стрілку сегмента f навпіл, тоді

$$b = l_3 - f / 2 ,$$

де $f = l_3(1 - \cos(\theta/2))$.

Довжина шатуна 4 виражається через заданий допустимий кут тиску з ΔNDE

$$l_4 = \frac{f}{2 \sin \vartheta_{дон}} .$$

Для інших кулісних механізмів синтез виконується подібним способом.

Питання для самоконтролю

1. Що називається синтезом механізмів?
2. Назвіть найбільш характерні задачі синтезу плоских важільних механізмів.
3. Сформулюйте правило Грасгофа.
4. Що називається кутом тиску при передачі сил у механізмі?
5. Як враховується кут тиску при синтезі механізмів?
6. Що називається коефіцієнтом зміни середньої швидкості вихідної ланки?
7. Синтез механізмів за коефіцієнтом зміни середньої швидкості вихідної ланки.
8. Синтез механізмів за середньою швидкістю вихідної ланки

ГЛАВА 8. КУЛАЧКОВІ МЕХАНІЗМИ

8.1. Загальні відомості. Види кулачкових механізмів

За допомогою шарнірно-важільних механізмів багато законів руху та траєкторій точок вихідних ланок отримуються лише досить наближено, а деякі і зовсім неможливі. Значно більші можливості для виконання заданих законів руху мають механізми з вищими парами. Перш за все, це відноситься до кулачкових механізмів. За допомогою кулачкових механізмів можна отримати теоретично будь-який закон руху, при цьому - меншим числом ланок, ніж у випадку застосування механізмів з нижчими парами.

Кулачкові механізми застосовують, коли необхідно, щоб рух вихідної ланки виконувався точно у відповідності до заданого закону; був узгоджений з рухом інших механізмів; при цьому, можна забезпечити тимчасову зупинку (вистій) вихідної ланки при неперервному русі вхідної.

Кулачкові механізми - найпростіші, компактні та надійні механізми для точного виконання складних законів руху.

Недоліком кулачкових механізмів є значний питомий тиск між елементами вищої кінематичної пари і, як наслідок, порівняно велике їх спрацювання.

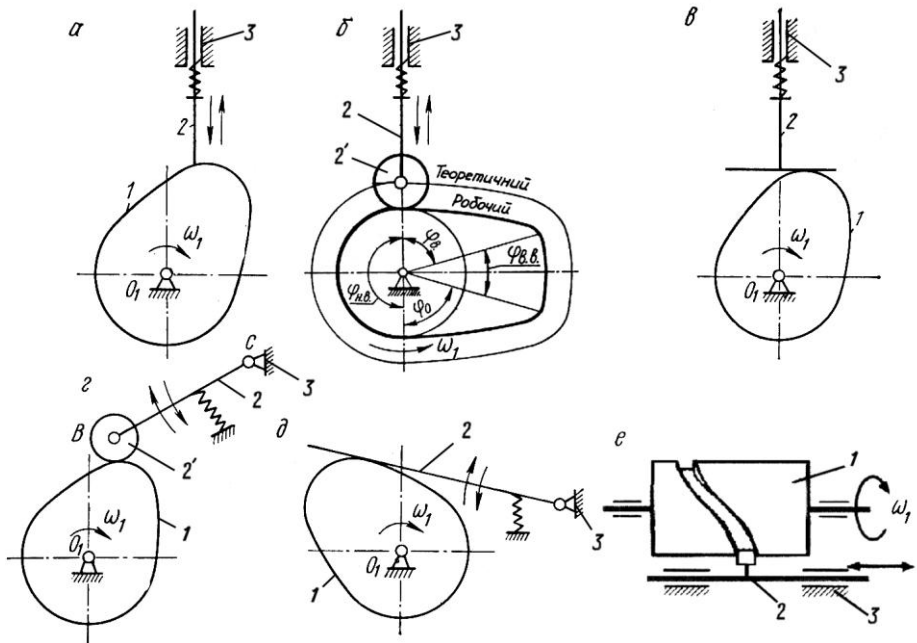


Рис. 8.1

Кулачковий механізм – механізм, до складу якого входить кулачок. Кулачком називається ланка, що утворює вищу кінематичну пару, елемент якої виконаний у вигляді поверхні змінної кривини.

Найпростіший кулачковий механізм являє собою триланковий механізм, що складається з кулачка 1, штовхача (штанги) 2 та стояка 3 (рис. 8.1). Кулачок, як правило, є вхідною ланкою механізму.

Кулачкові механізми поділяються: на плоскі та просторові; за видами руху вхідної та вихідної ланок; за способом замикання вищої пари; за видом елемента вищої пари вихідної ланки.

Найчастіше застосовують кулачкові механізми, в яких кулачок здійснює неперервний обертальний рух. Вихідна ланка переважно виконує зворотно-поступальний або коливальний рух. В останньому випадку вихідна ланка називається *коромислом* (рис.8.1, г, д).

Ще одним недоліком кулачкових механізмів є необхідність забезпечувати постійне замикання ланок, які утворюють вищу кінематичну пару. Постійний контакт елементів у вищій кінематичній парі може забезпечуватися *геометричним замиканням* (конструктивно за рахунок ролика у пазу чи охоплюючих роликів і т.ін.), або *силовим замиканням* (під дією сил пружності, сил ваги, гідравлічних чи пневматичних пристроїв). Завдяки простоті конструкції та меншим габаритам механізмів, найчастіше застосовують силові замикання за допомогою пружин. При структурному аналізі пружину не включають до загального числа ланок.

Вихідна ланка може мати різні форми елементів вищої пари: загострену (зі сферою малого радіуса), тарілчасту (з плоскою, циліндричною або сферичною контактними поверхнями) чи мати проміжну ланку – ролик; загострений штовхач здійснює найточніші переміщення за заданим законом, але швидко спрацьовується. Таку конструкцію застосовують у тихохідних механізмах з малими навантаженнями. Для зменшення втрат на тертя, підвищення стійкості проти спрацювання, надійності та довговічності механізму, між кулачком і штовхачем встановлюють ролик, або використовують тарілчастий штовхач. Встановлення ролика дозволяє частково замінити тертя ковзання тертям кочення.

Роликові вихідні ланки використовують в механізмах, у яких підвищені вимоги до стійкості проти спрацювання. Відмітимо, що в цьому випадку розрізняють два профілі кулачка: центровий (теоретичний) та дійсний (робочий, практичний). *Центровий профіль* являє собою траєкторію руху центра ролика при обкочуванні його навколо кулачка. *Дійсний профіль* – обгінну до послідовних положень ролика у тому ж відносному русі. Отже, центрові та дійсні профілі кулачка – еквідистантні (рівновіддалені) криві, відстані між якими, виміряна по нормалі, дорівнює радіусу ролика. Зазначимо, що заміна дійсного профілю на центровий є дуже зручною при аналізі та синтезі кулачкових механізмів; при цьому характер миттєвого відносного руху всіх ланок механізму не змінюється.

Тарілчастий штовхач (рис. 8.1, в) застосовують, коли в разі жорстких обмежень габаритних розмірів ролик встановити не вдається. З метою розподілу спрацювання тарілки на більшу поверхню, кінематичну пару “штовхач-напрямна” виконують як циліндричну пару, з можливістю обертання тарілки навколо осі.

Кулачкові механізми можуть бути *центральної* (вісь штовхача проходить через вісь обертання кулачка), або *зі зміщенням* осі штовхача в той чи інший бік (з ексцентриситетом, дезаксильні). Зміщення штовхача дає змогу при однакових інших умовах зменшити габарити механізму та тиск на напрямну.

При всій різноманітності профілів кулачкових механізмів, як правило, на ньому є чотири характерні ділянки, які накреслені (рис. 8.2, а): - радіусом – вектором що зростає ($A_0 - 6'$); - дугою кола максимального радіуса ($6' - 7'$); - радіусом – вектором, що спадає ($7' - 13'$); - дугою кола мінімального радіуса r_0 , яке називають основним (початковим). Рух вихідній ланці передається від кулачка тільки в тому випадку, коли вона дотикається до ділянки профілю змінного радіуса - вектора (ділянки $A_0 - 6'$ та $7' - 13'$). Якщо дотик відбувається на ділянці профілю, яка накреслена дугою кола з центром на осі обертання кулачка, то вихідна ланка буде нерухомою (ділянки $6' - 7'$ та $13' - A_0$).

Відповідно, в загальному випадку за час одного обертання кулачка розрізняють такі фази руху вихідної ланки: *віддалення* (піднімання; вихідна ланка віддаляється від центра кулачка O_1); *верхній вистій* (далекий вистій, верхня пауза; вихідна ланка нерухома в положенні найвіддаленішого від центра O_1); *опускання* (наближення, повернення; вихідна ланка наближається до центру обертання кулачка); *нижній вистій* (ближній вистій; вихідна ланка залишається нерухомою у початковому положенні). Кожній з цих фаз відповідає певний кут повороту кулачка $\varphi_6, \varphi_{6.в.}, \varphi_0, \varphi_{н.в.}$, звичайно $\varphi_6 + \varphi_{6.в.} + \varphi_0 + \varphi_{н.в.} = 360^\circ$, тому кут $\varphi_{н.в.}$ переважно не задається. Кути повороту кулачка, що визначають відповідні періоди руху штовхача, називають *фазовими кутами*.

Кут повороту кулачка, який дорівнює сумі кутів $\varphi_6, \varphi_{6.в.}, \varphi_0$, називається *робочим кутом* профілю.

У ТММ розглядаються дві основні задачі: аналіз механізмів та синтез механізмів. Аналіз роботи кулачкових механізмів виконується досить рідко, але розгляд методів аналізу полегшує розуміння та розв'язок задач синтезу. Задача синтезу кулачкового механізму полягає в побудові профілю кулачка за відомими законами руху вхідної і вихідної ланок.

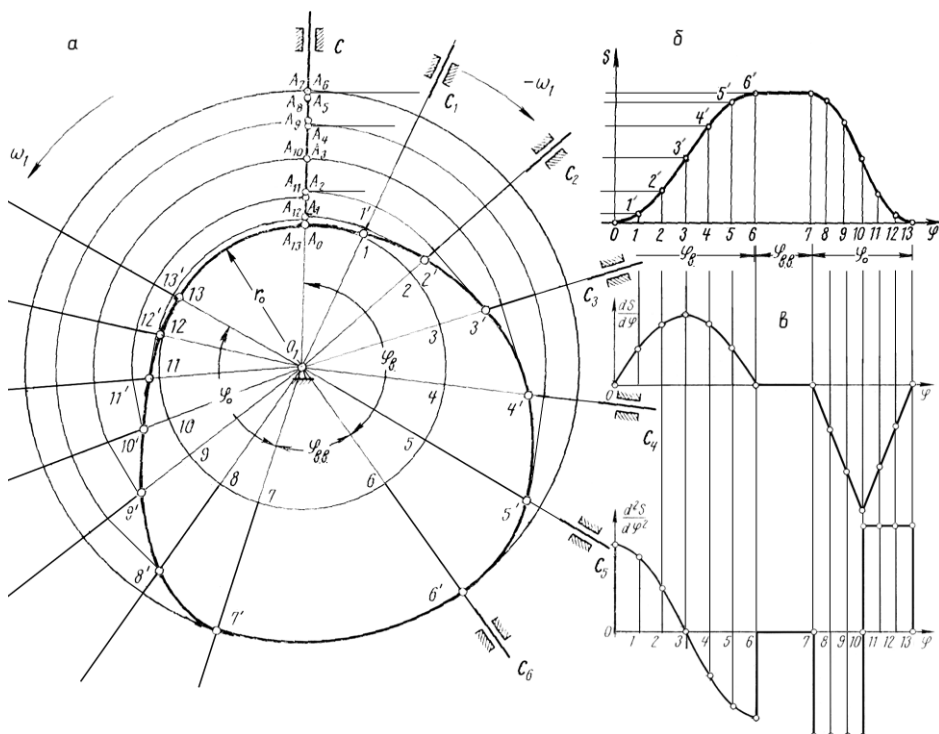


Рис. 8.2

Проектування кулачкового механізму проводиться у такій послідовності: вибір закону руху вихідної ланки (звичайно, кутову швидкість кулачка приймають сталою); вибір структурної схеми механізму; визначення основних розмірів; побудова профілю кулачка (розрахунок координат профілю). Методи виконання цих етапів можуть бути різні. Нижче переважно наведені традиційні графічні методи.

8.2. Кінематичний аналіз кулачкових механізмів

Кінематичне дослідження кулачкових механізмів полягає у визначенні закону руху вихідної ланки, тобто визначення залежності її переміщення, швидкості чи прискорення від часу або кута повороту кулачка, за відомими розмірами механізму, профілем кулачка і законом його руху. Розв'язок цієї задачі може бути виконаний графічним, графоаналітичним або аналітичним методами. Найчастіше застосовують графічний метод.

Розглянемо побудову діаграми переміщення штовхача для кулачкового механізму, зображеного на рис. 8.2, а. Для цієї мети використовується *метод обернення руху (інверсії)*, який дозволяє досить просто визначити відносне положення ланок механізму, без повторного викреслювання кулачка. Для цього всьому механізму в цілому умовно надається обертання з кутовою швидкістю кулачка, але в протилежному напрямі. Завдяки цьому кулачок зупиняється, а напрямна (стояк) разом зі штовхачем обертається з кутовою швидкістю $-\omega_1$ (миттєві положення $C_1, C_2, C_3, \dots$). У такому випадку визначення переміщення штовхача значно спрощується. Для цього проведемо мінімальним радіусом r_0 основне коло. Відкладемо фазові кути. Поділимо кути віддалення φ_e та опускання φ_o на довільне число рівних частин. Точки поділу 1, 2, 3... нумерують відповідно до напрямку оберненого руху. За початкове положення прийнято положення, при якому вістря штовхача т. А займає крайнє нижнє положення A_0 . Через точки 1, 2, 3... з центра O_1 кулачка проведемо промені до перетину з профілем кулачка в точках $1', 2', 3', \dots$. Продовження цих променів за профіль кулачка являють собою миттєві положення штовхача у його оберненому русі відносно кулачка. Переміщення вихідної ланки S_i в кожному з положень є відстанню від r_0 до відповідної точки профілю кулачка (відрізки $11', 22', 33', \dots$).

Для наочності та більшої зручності побудови діаграми переміщень $s(\varphi_x)$ інколи рекомендують з центра O_1 через точки $1', 2', 3', \dots$ провести дуги до перетину їх з лінією A_0C руху штовхача. Одержимо точки $A_0, A_1, A_2, \dots$, що зображають відносні положення т. А вістря штовхача при обертанні кулачка, тобто переміщення штовхача.

Знайдені переміщення т. А вихідної ланки дають можливість побудувати графік її руху (рис. 8.2, б). Для цього відкладемо на осі абсцис прямокутної системи координат, у деякому масштабі μ_φ , фазові кути $\varphi_e, \varphi_{ee}, \varphi_o$ (кут φ_{ee} можна відкладати без масштабу). Далі ділянки осі абсцис, які відповідають кутам φ_e, φ_o , поділимо на таке ж число частин, на яке поділені відповідні кути на кулачкові. З точок поділу вздовж вертикалей в деякому масштабі μ_s відкладемо відповідні переміщення штовхача s_i . З'єднавши плавною кривою кінці ординат, отримаємо діаграму переміщення штовхача залежно від кута повороту кулачка $s(\varphi)$. Як відомо, при обертанні кулачка з постійною кутовою швидкістю, діаграма $s(\varphi)$ є одночасно діаграмою $s(t)$, якщо від масштабу μ_φ перейти до μ_t .

Відмітимо, що з аналізу викладеного неважко зрозуміти порядок розв'язання основної задачі – синтезу кулачкового механізму, оскільки очевидно, що вона виконується у зворотному порядку.

За допомогою таких же нескладних побудов, за винятком незначних особливостей, можна визначити положення вихідної ланки та одержати закон руху для кулачкових механізмів інших типів. Наприклад, у випадку механізму з роликівим штовхачем потрібно спочатку побудувати центровий профіль кулачка, після цього задача розв'язується аналогічно до розглянутої.

Визначення швидкостей та прискорень. Дану задачу можна виконувати: методом кінематичних діаграм; методом планів; аналітичними методами; методом заміни кулачкового механізму важільним за наступним визначенням шуканих кінематичних параметрів для замінювального механізму. Якщо для кулачкового механізму визначені положення вихідної ланки та побудований графік $s(\varphi)$ або $s(t)$, то для визначення швидкостей та прискорень вихідної ланки зручніше за все застосувати метод кінематичних діаграм (рис. 8.2, б, в).

Необхідно зазначити, що графічне диференціювання може привести до значних неточностей, особливо у випадку двократного диференціювання при визначенні прискорень. Застосування методу планів дає можливість отримати точніші кінематичні характеристики механізму. Для цього рекомендують перейти до замінювального механізму, тобто, вищу кінематичну пару IV класу замінити умовною ланкою та двома парами V класу. Далі задача розв'язується як для звичайного важільного механізму. Зауважимо, що кожному окремому положенню кулачкового механізму буде відповідати замінювальний механізм зі своїми розмірами ланок. Побудова планів швидкостей та прискорень для кулачкового механізму може бути виконана і без заміни вищих кінематичних пар нижчими, тобто, безпосередньо за дійсною схемою кулачкового механізму.

У разі потреби отримання точніших результатів застосовують аналітичні методи дослідження кулачкових механізмів (як з допомогою замінювальних механізмів, так і без них).

8.3. Закон руху вихідної ланки

Під законом руху вихідної ланки кулачкового механізму розуміють залежність переміщення, швидкості чи її прискорення від часу. Закони руху вихідних ланок задаються, переважно, або аналітично у вигляді рівнянь, або графічно - у вигляді відповідних графіків. Оскільки в більшості випадків, що трапляються на практиці, рух кулачка відповідає рівномірному обертанню, то зручніше користуватися графіками, які являють собою залежність переміщення, аналога швидкості, чи аналога прискорення від кута повороту кулачка.

Закон руху вихідної ланки визначається профілем кулачка і є основною характеристикою механізму.

У практиці проектування кулачкових механізмів найбільше

поширення отримали відносно прості, типові закони руху, наприклад, зображені на рис. 8.3 (для фази віддалення штовхача): *а* - лінійний; *б* - параболічний; *в* - косинусоїдальний; *г* - синусоїдальний; *д*, *е* - описані поліномами.

Теоретично, кулачкові механізми можуть забезпечити будь-які закони руху вихідної ланки. Але на практиці користуються лише тими, які мають просту технологію обробки профілю кулачка та є сприятливими з точки зору динаміки роботи механізму. Від закону руху залежать динамічні та вібраційні властивості кулачкового механізму; він повинен бути таким, щоб зусилля, які виникають при русі, не впливали на точність відтворення передатної функції та не позначались на довговічності механізму.

Розрізняють закони руху вихідної ланки кулачкових механізмів трьох видів:

- *з жорсткими ударами*. Прикладом є лінійний закон (постійної швидкості, рис. 8.3, *а*). Швидкість руху штовхача на фазі віддалення постійна (прискорення дорівнює нулю), але на початку та в кінці фази швидкість має розрив. При миттєвій зміні швидкості штовхача прискорення, а отже, й сила інерції ланки, теоретично прямує до нескінченості, що є причиною жорстких ударів, і як наслідок - швидке спрацювання механізму. Такий закон допустимий лише в тихохідних механізмах при незначній масі штовхача (у випадку коли необхідно забезпечити постійну швидкість руху вихідної ланки);

- *з м'якими ударами*. До цієї групи відносяться закони, при яких швидкість змінюється неперервно, а графік прискорення має точки розриву. Це характерно для параболічного, косинусоїдального законів руху (рис. 8.3, *б*, *в*, *д*). У точках розриву кривої прискорення сили інерції раптово змінюються на кінцеву величину, що викликає так званий м'який удар. М'який удар є менш небезпечний, ніж жорсткий удар, проте робота механізму у цьому випадку також супроводжується вібраціями, шумом та підвищеним спрацюванням. Цей закон використовують при помірних швидкостях;

- *без ударів*. До безударних відносяться закони, при яких прискорення є неперервною функцією (рис. 8.3, *г*, *е*). Це закони, задані діаграмами прискорення, окресленою за синусоїдою, трикутником, трапецією та іншими. При плавних кривих зміни прискорення удари теоретично відсутні (якщо похибки виготовлення профілів незначні). Такі закони рекомендують використовувати у швидкохідних механізмах. Недоліком їх є повільне наростання переміщення веденої ланки.

Найбільше використання мають кулачки, які забезпечують плавну зміну прискорення штовхача.

Зауважимо, що при проектуванні кулачкових механізмів доцільно виходити з графіка прискорень – за ним можна зробити висновки про удари, шум, вібрації кулачкових механізмів, у той час, як за графіками переміщень

важко судити про закон руху, оскільки криві переміщення зовні мало відрізняються. Графіки швидкості та переміщення в таких випадках знаходяться методом графічного інтегрування.

Наголосимо, що не існує єдиного універсального критерію, який би враховував повний комплекс факторів, пов'язаних з вибором закону руху вихідної ланки кулачкового механізму. При оцінці ефективності профілю кулачка встановлюють комплекс заданих умов і обмежень, враховуючи їх вагомість.

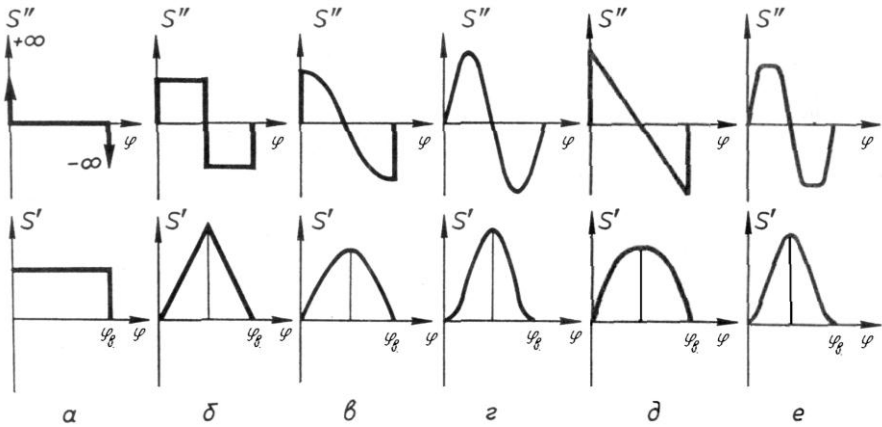


Рис. 8.3

8.4. Визначення основних розмірів кулачкового механізму

До основних розмірів кулачкового механізму відносяться: мінімальний радіус кулачка r_0 та зміщення e для механізму зі штовхачем; мінімальний радіус кулачка r_0 та міжосьова відстань l_0 для механізму з коромислом.

Кут тиску. Кут між нормаллю $n-n$ у точці дотику взаємодіючих профілів вищої пари та вектором швидкості точки дотику вихідної ланки називається *кутом тиску*. При проектуванні механізмів з вищими парами величина цього кута має суттєве значення.

Розглянемо кулачковий механізм зі штовхачем (рис. 8.4). Якщо знехтувати силою тертя у вищій кінематичній парі, то можна вважати, що сила тиску, з якою кулачок 1 діє на штовхач 2, направлена по спільній нормалі $n-n$ в точці дотику ланок. Гострий кут, що утворений напрямом сили F тиску кулачка на штовхач і вектором швидкості штовхача називається *кутом тиску* ϑ . Зауважимо, що кут тиску є величиною змінною. Кут, що доповнює кут тиску до 90° , називається *кутом передачі* (руху) ($\gamma = 90^\circ - \vartheta$).

Розкладемо силу F за двома напрямками: по лінії руху штовхача

$F' = F \cos \vartheta$ та перпендикулярно до неї $F'' = F \sin \vartheta$. Сила F' - корисна сила, яка рухає штовхач; сила F'' - викликає перекошування штовхача в напрямній 3, внаслідок чого збільшуються реакції та сила тертя. Зрозуміло, що кулачковий механізм буде працювати тим краще, чим менший кут тиску. Не важко показати, що миттєвий коефіцієнт корисної дії кулачкового механізму зменшується зі зростанням кута тиску. При збільшенні кута тиску до деякого значення, що називається *критичним* ϑ_k , виникає явище *заклинювання* (самогальмування). Для нормальної роботи кулачкового механізму, кут тиску при будь-якому положенні кулачка має бути меншим за допустимий кут тиску, тобто $\vartheta < \vartheta_{\text{доп}}$.

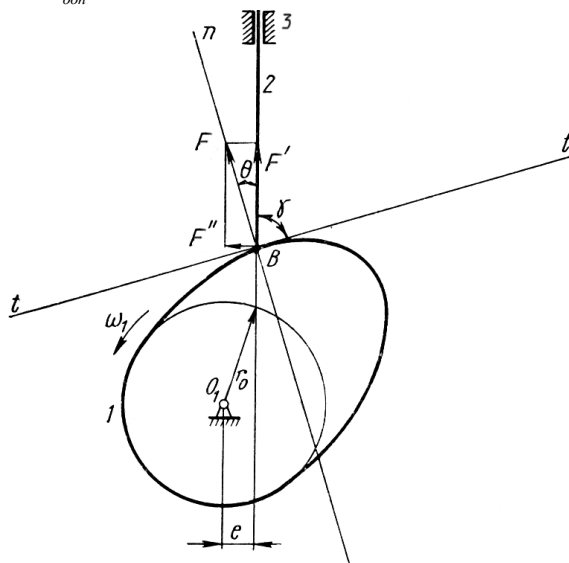


Рис. 8.4

Кут тиску можна виразити через геометричні параметри кулачкового механізму

$$\operatorname{tg} \vartheta_i = \frac{s'_i - e}{s_i + \sqrt{r_0^2 - e^2}}, \quad (8.1)$$

де s_i - переміщення; s'_i - аналог швидкості штовхача, що відповідає куту φ_i повороту кулачка від початку фази віддалення; e - зміщення напрямної штовхача відносно центра кулачка. Відмітимо, якщо при русі штовхача на фазі віддалення вгору вздовж напрямної, остання зміщена відносно центра кулачка праворуч, то при його обертанні проти стрілки годинника зміщення підставляється в (8.1) зі знаком плюс, а при обертанні за годинниковою стрілкою - мінус. При зміщенні напрямної ліворуч від центра обертання

кулачка знак e змінюється на протилежний.

Подібною формулою виражається залежність між кутом тиску та основними параметрами коромислового кулачкового механізму.

Аналіз цих залежностей свідчить, що при вибраному законі руху та зміщенні e можна зменшити кути тиску, збільшуючи мінімальний радіус кулачка, тобто габарити механізму. Аналогічно для коромислового кулачкового механізму кути тиску зменшуються при збільшенні r_0 , l_0 , тобто розмірів механізму.

Отже, при проектуванні кулачкових механізмів основні розміри - r_0 , e або r_0 , l_0 визначаються з умови *незаклинювання* механізму. Виняток становить тарілчастий кулачковий механізм, для якого $\vartheta = 0$ (найпоширеніший випадок тарілки, перпендикулярної до напрямної) і r_0 визначається з умови опуклості контуру.

Таким чином, одним із найважливіших питань при проектуванні кулачкових механізмів є вибір допустимого кута тиску $\vartheta_{дон}$, від величини якого залежить розподіл сил у механізмі, його К.К.Д., габаритні розміри і т. ін.

Рекомендовані такі значення допустимого кута тиску: $\vartheta_{дон} = 30^\circ \dots 40^\circ$ для механізмів зі штовхачем; $\vartheta_{дон} = 45^\circ \dots 50^\circ$ для коромислових механізмів. Якщо габарити механізмів дозволяють, то для зменшення втрат на тертя доцільно приймати менші значення кута тиску.

Визначення основних розмірів кулачкових механізмів за заданим допустимим кутом тиску. Аналітичний метод визначення основних розмірів кулачкових механізмів із штовхачем (з вістря або роликом) полягає у розв'язку рівняння (8.1) відносно шуканих параметрів при $\vartheta_i \leq \vartheta_{дон}$. В основі графічного методу також лежить залежність (8.1).

Розглянемо задачу графічного визначення r_0 мінімального радіуса кулачка для механізму, зображеного на рис. 8.4.

Зауважимо, що у випадку механізму з роликовим штовхачем усі побудови є аналогічними, але в результаті буде знайдений r_0 не дійсного, а центрального профілю кулачка.

Спочатку на основі попередньо побудованих графіків $s_2(\varphi_1)$, $s'_2(\varphi_1)$, шляхом виключення параметра φ_1 , будемо графік $s(s')$, забезпечивши чисельно однакові масштаби по обох осях, $\mu_s = \mu_{s'}$ (рис. 8.5). Для цього проводимо осі прямокутної системи координат. По осі ординат, в масштабі μ_s , відкладемо від початку координат, згідно з графіком $s_2(\varphi_1)$ переміщення штовхача (т. A_0 відповідає нижньому початковому положенню штовхача, лежить на колі мінімального радіуса). Через отримані точки $A_0, A_1, A_2, \dots$,

проводимо прямі, паралельні осі абсцис та відкладаємо на них у масштабі μ_s , відрізки, що рівні s'_i . Причому для фази віддалення ці відрізки відкладаються на напрямком обертання кулачка, а для фази опускання – обернено. Сполучивши плавною кривою кінці відкладених відрізків, отримаємо криву $s(s')$. Після цього проводимо до кривої $s(s')$ дотичні прямі $I-I$ та $II-II$ під кутами ϑ_{don} до осі ординат. Центр обертання кулачка може знаходитись у будь-якій точці заштрихованої області (між дотичними), у цьому випадку завжди буде забезпечене виконання умови $\vartheta < \vartheta_{don}$. Відмітимо, що точка O перетину дотичних визначає мінімально можливе значення r_0 , тобто, найменші розміри кулачка та всього механізму, при якомусь певному e .

Якщо величина зміщення задана $e = e'$, то проводять пряму $y-y$ на відстані e' від осі ординат (в масштабі μ_s). У цьому випадку мінімальний радіус r_0 дорівнює відрізку A_0O_2 у прийнятому масштабі. У випадку центрального кулачкового механізму ($e = 0$) центр обертання кулачка буде знаходитись на продовженні лінії руху штовхача, нижче точки O_1 , а найменший радіус $r_0 = \mu_s A_0O_1$.

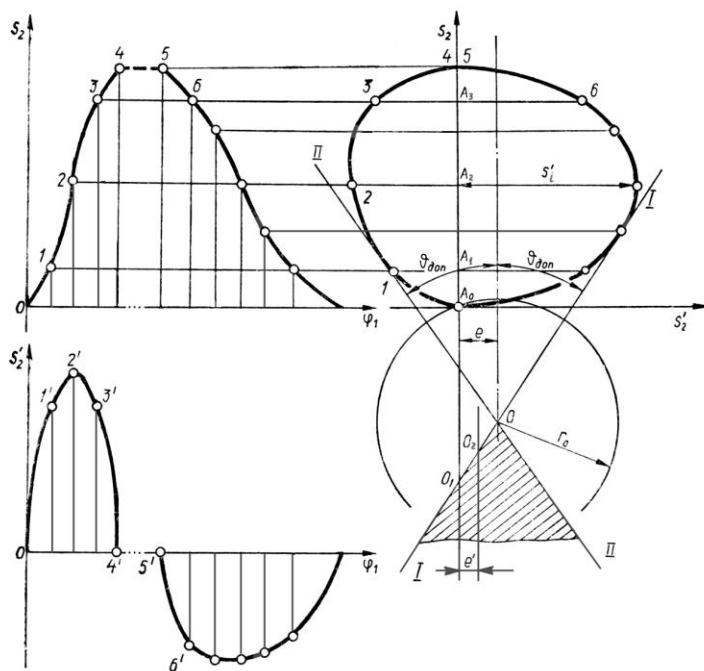


Рис. 8.5

Зауважимо, що в разі жорстких обмежень габаритних розмірів механізму беруть до уваги той факт, що небезпека заклинювання штовхача з силовим замиканням вищої пари має місце лише на фазі віддалення, оскільки при опусканні штовхач рухається під дією пружини (сили тяжіння). У цьому випадку при нереверсивному режимі роботи дотичну $I-I$ проводять через т. A_0 . У кулачкових механізмах з геометричним замиканням вищої кінематичної пари умова $\vartheta < \vartheta_{\text{дон}}$ повинна виконуватись як на фазі віддалення, так і опускання.

Така геометрична інтерпретація співвідношення (8.1) використовується і для графічного визначення габаритних розмірів кулачкових механізмів з коромислом.

Визначення мінімального радіуса кулачка за умовою опуклості профілю. Для кулачкових механізмів із плоским штовхачем при будь-якому положенні кулачка кут тиску є сталим. Зокрема, якщо тарілка перпендикулярна до осі штовхача (найрозповсюдженіший випадок), кут тиску дорівнює нулю.

Отже, при проектуванні таких механізмів кут тиску не може бути покладений в основу визначення r_0 . У такому випадку ставлять додаткову вимогу: профіль кулачка має бути опуклим. Лише при виконанні цієї умови кожна точка профілю зможе торкнутися тарілки штовхача.

Профіль кулачка буде опуклим, якщо радіус кривини профілю в будь-якій точці буде більшим за нуль, $\rho > 0$. Цю умову можна виразити нерівністю

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} > \frac{-s''}{s + r_0}. \quad (8.2)$$

Нерівність (8.2) дозволяє графічно визначити величину r_0 , метод проф. Геронімуса. Для цього, на основі попередньо побудованих графіків $s_2(\varphi_1)$, $s_2''(\varphi_1)$ будується графік $s_2''(s_2)$. По осі ординат відкладемо значення s_2 , а через отримані точки паралельно осі абсцис - відповідні значення s_2'' (рис. 8.6, а). Уся побудова виконується в одному масштабі μ_s . Сполучивши плавною кривою отримані точки, одержимо діаграму $s_2''(s_2)$.

До цієї діаграми, на ділянці, що відповідає максимальному від'ємному значенню під кутом 45° до осі ординат проводиться дотична $I-I$. Згідно з нерівністю (8.2), за центр обертання кулачка може бути вибрана будь-яка точка, що розміщена нижче за точку перетину дотичної з віссю ординат. Наприклад, на рис. 8.6, а точка O_1 , тоді мінімальний радіус є відрізок A_0O_1 , а його величина визначається за формулою $r_0 = \mu_s A_0O_1$.

(обернено до порядку побудови діаграми переміщення штовхача при кінематичному аналізі механізму, 8.2):

1. Із довільної точки O_1 (вважаючи її центром обертання кулачка) проводимо коло радіусом r_0 , у масштабі μ_s (рис. 8.2, а). Зазначимо, що масштаб μ_s зручніше прийняти рівним масштабу діаграми переміщення.

2. З точки O_1 проводимо вертикальну пряму O_1C , яку приймаємо за лінію руху штовхача. Точка перетину прямої O_1C з колом r_0 визначить положення т. A вістря штовхача, що відповідає початку фази віддалення, т. A_0 .

3. Користуючись діаграмою переміщень, розмічаємо шлях т. A вістря штовхача в його абсолютному русі, точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$. Для зручності побудови бажано, щоб вісь абсцис діаграми переміщень проходила через точку A_0 . Тоді ординати $1-1', 2-2', 3-3', \dots$ діаграми переміщення безпосередньо визначають миттєві положення вістря штовхача.

4. Від прямої O_1C в напрямі, протилежному напрямку обертання кулачка, відкладемо фазові кути $\varphi_e, \varphi_{ee}, \varphi_o$. Ділимо кути φ_e, φ_o на стільки ж рівних частин, на скільки вони поділені на діаграмі переміщення штовхача (8.2, б). Через точки поділу $1, 2, 3, \dots, 13$ на колі r_0 з центру обертання кулачка проводимо промені, які в оберненому русі визначатимуть положення осі штовхача.

5. Переносимо за допомогою циркуля миттєві положення точки A — $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$ на відповідні промені, і отримуємо на них точки $1', 2', 3', \dots, 13'$ — положення т. A вістря штовхача у відносному русі. Інколи для знаходження даних точок рекомендують безпосередньо з діаграми $s(\varphi)$ відкласти від кола r_0 , на відповідні промені, переміщення штовхача $1-1', 2-2', 3-3', \dots, 13-13'$.

6. З'єднавши ці точки плавною кривою, одержимо частину профілю кулачка на кутах φ_e та φ_o . Профілі кулачка, що відповідають фазовим кутам $\varphi_{ee}, \varphi_{ne}$, будуть окреслені дугами кіл, які описані з т. O_1 відповідно радіусами O_16' та O_113' . Таким чином, отримаємо дійсний профіль кулачка.

7. У випадку, якщо штовхач закінчується роликом, то отриманий профіль — центровий. Використовуючи центровий профіль як геометричне місце центрів ролика у відносному русі, будуємо дійсний профіль. Дійсний профіль одержимо як обгінну сім'ю дуг радіуса r_p , проведених з точок центрального профілю (рис. 8.7, б).

Позацентричний кулачковий механізм з роликовим штовхачем.

Вважаємо, що згідно з заданим законом руху попередньо накреслено графік функції $s(\varphi)$ (рис. 8.7, а).

Побудову профілю кулачка виконують у такій послідовності.

1. З довільної точки O_1 проводимо у вибраному масштабі μ_s кола радіусами r_0 і e (рис. 8.7, б).

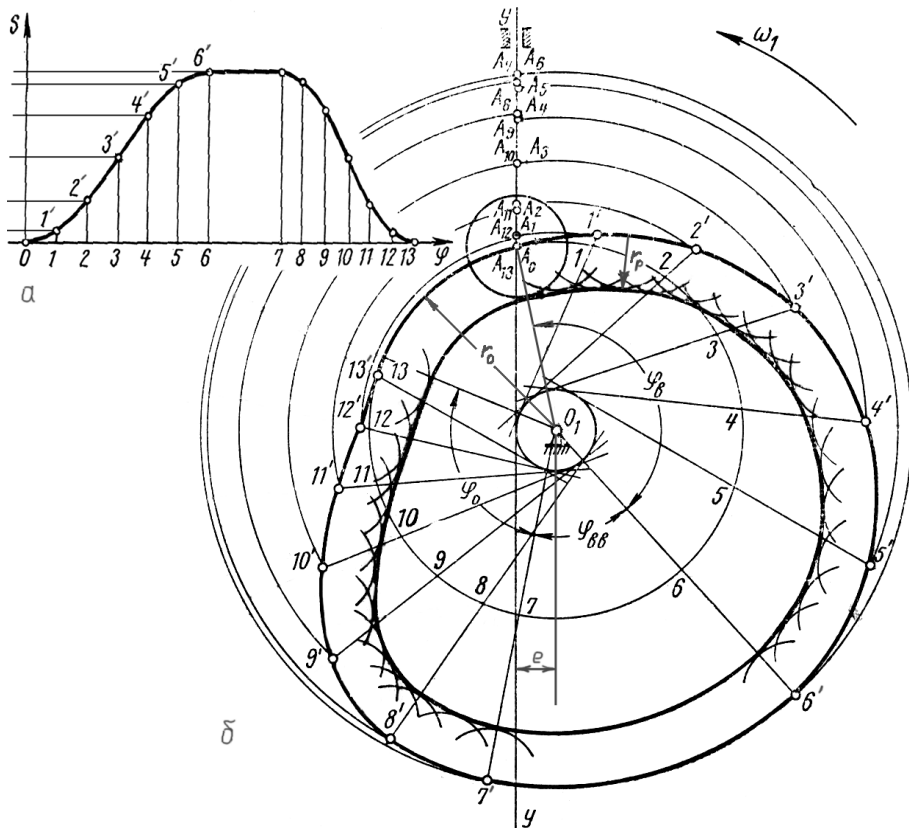


Рис. 8.7

2. Дотично до кола радіуса e проводимо вертикальну лінію переміщення штовхача згідно з її положенням на схемі механізму. Точка перетину A_0 цієї прямої з колом r_0 є положенням центра ролика, що відповідає початку фази віддалення (нижнє, початкове положення осі ролика).

3. Від т. A_0 вздовж лінії у-у відкладаємо переміщення штовхача A_1 ,

$A_2, A_3, \dots$, згідно графіка переміщень $s(\varphi)$. Точка A_6 визначить положення центра ролика, що відповідає закінченню фази віддалення.

4. З'єднаємо т. A_0 з центром обертання кулачка O_1 . Від прямої A_0O_1 в напрямі, протилежному напрямку обертання кулачка, відкладемо фазові кути $\varphi_6, \varphi_{66}, \varphi_0$. Ділимо кути φ_6, φ_0 на стільки ж рівних частин, на скільки вони поділені на діаграмі переміщення штовхача. Через точки поділу $1, 2, 3, \dots, 13$, на колі r_0 проводимо дотичні до кола радіуса e , як ряд послідовних положень ліній переміщення штовхача у відносному русі навколо кулачка.

5. З центра O_1 радіусами $O_1A_1, O_1A_2, O_1A_3, \dots$ проведемо концентричні дуги до перетину з відповідними дотичними. Точки перетину $1', 2', 3', \dots$ являють собою положення ролика у відносному русі. З'єднавши ці точки плавною кривою, одержимо центровий профіль кулачка.

6. Проводимо ряд дуг радіусом r_p з центрами, що розміщені на центровому профілі кулачка. Будуємо дійсний профіль кулачка як обгінну сім'ю цих дуг

Вибір радіуса ролика. Для забезпечення руху вихідної ланки механізму за заданим законом необхідно, щоб радіус ролика був менший за радіус кривини в будь-якій точці центрового профілю кулачка

$$r_p \leq 0,7\rho_{\min},$$

де $\rho_{\min}$ – мінімальний радіус кривини центрового профілю кулачка.

Окрім того, радіус ролика обмежують умовою $r_p \leq 0,4r_0$.

При проектуванні кулачкових механізмів радіус ролика приймають таким, щоб забезпечити виконання наведених умов. При цьому конкретне значення призначають відповідно до стандартного ряду лінійних розмірів.

Кулачковий механізм з тарілчастим штовхачем (рис. 8.1, в). Побудова профілю даного механізму виконується аналогічно (включно по п.5) до описаної вище побудови профілю центрального кулачкового механізму зі штовхачем. Різниця є лише в останньому етапі.

6. Через точки $1', 2', 3', \dots, 13'$ проводимо перпендикуляри до відповідних променів (рис. 8.6, б). Дані перпендикуляри являють собою послідовні положення площини тарілки штовхача у відносному русі навколо кулачка. Обгінна крива перпендикулярів і буде дійсним профілем кулачка.

Питання для самоконтролю

1. Переваги і недоліки кулачкових механізмів.
2. Як класифікують кулачкові механізми?
3. Назвіть фази руху кулачкових механізмів.
4. Які ділянки профілю кулачка мають змінний радіус кривизни.
5. Назвіть методи кінематичного дослідження кулачкових механізмів.
6. Закони руху вихідної ланки кулачкових механізмів.
7. Що характерно для закону руху вихідної ланки з жорсткими ударами?
8. Що називається кутом тиску і кутом передачі руху?
9. Яка різниця між кінематичним та динамічним синтезом кулачкових механізмів?
10. З яких умов визначається мінімальний радіус кулачка?
11. Послідовність побудови профілю кулачка.
12. Вибір радіуса ролика кулачкового механізму.

ГЛАВА 9. ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ

Зубчасті передачі є найпоширенішими механічними передачами у сучасному машино- та приладобудуванні. Їх застосовують як у механізмах найточніших приладів, де розміри коліс вимірюються кількома міліметрами, так і в найпотужніших машинах із розмірами коліс до 10 м. Зубчасті передачі здатні працювати в різноманітних умовах із коловими швидкостями від зовсім малих до 150 м/с і більше.

Зубчаста передача складається з двох рухомих ланок – коліс, на ободах яких розміщені зубці та стояка. Зубці коліс входять у зачеплення між собою і завдяки їхній взаємодії забезпечують передавання обертового руху від одного колеса до другого. Менше з двох спряжених коліс називають шестірнею, більше – колесом; термін "зубчасте колесо" належить до обох коліс передачі.

Переважно зубчаста передача призначена для передавання обертового руху, але її можна використовувати і як передачу для перетворення обертового руху в поступальний (передача зубчасте колесо-рейка).

Зубчасті передачі можуть використовуватись для передавання обертового руху між довільно розміщеними у просторі валами, мають високий К.К.Д. ($\eta = 0,94...0,99$), їх можна легко та зручно компонувати у окремі агрегати для серійного виробництва (редуктори), вони забезпечують достатній діапазон передаточних чисел ($u \leq 20$).

Порівняно з іншими механічними передачами зубчасті передачі мають такі переваги: сталість передатного відношення; високу надійність та довговічність роботи; великий діапазон навантажень та компактність конструкції; незначні навантаження на вали передачі та їхні опори.

До недоліків зубчастих передач належать: порівняно високі вимоги до точності виготовлення та монтажу; шум при роботі з високими швидкостями; потреба у постійному змащуванні; неможливість безступеневої зміни передатного числа.

У зв'язку з великою відмінністю умов використання зубчастих передач форма елементів зубчастих зачеплень та конструкції зубчастих коліс дуже різноманітні. Тому зубчасті передачі та колеса можна класифікувати за цілою низкою ознак.

За формою профілю зубців розрізняють евольвентні зубчасті передачі, які є найбільш поширеними та неевольвентні передачі. До останніх відносять зубчасті передачі із круговим профілем зубців (передачі із зачепленням Новікова) та передачі із циклоїдальним профілем зубців, які здебільшого застосовують у приладах та годинникових механізмах.

За взаємним розміщенням осей валів зубчасті передачі бувають:

- із паралельними осями валів - циліндричні передачі зовнішнього зачеплення (рис. 9.1, а, б, в), передачі типу зубчасте колесо-рейка (рис. 9.1, г) та циліндричні передачі внутрішнього зачеплення (рис. 9.1, д);
- із валами, осі яких перетинаються, - конічні зубчасті передачі

(рис. 9.2, а, б);

- із мимобіжними у просторі осями валів - гвинтові зубчасті передачі (рис. 9.2, в).

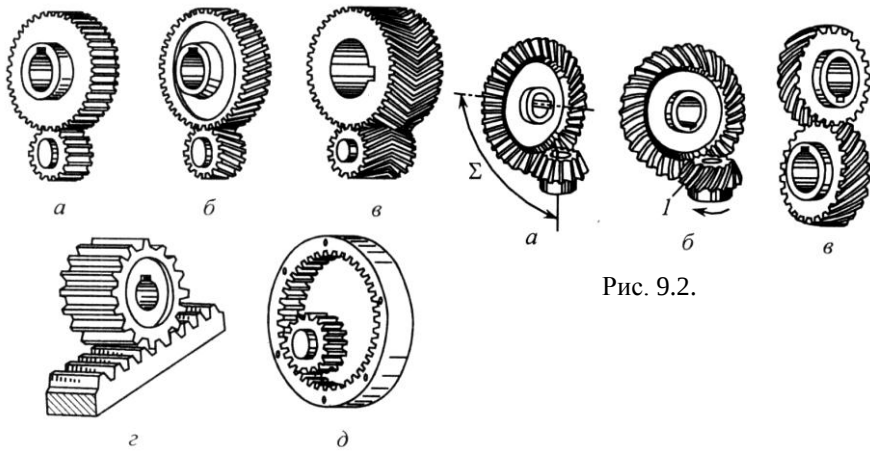


Рис. 9.2.

Рис. 9.1.

За розміщенням на ободі та формою зубців розрізняють передачі та колеса: прямозубі (див. рис. 9.1, а, г, д), косозубі (див. рис. 9.1, б), шевронні (див. рис. 9.1, в) та з круговими зубцями (див. рис. 9.2, б).

За конструктивним оформленням зубчасті передачі бувають: закриті (розміщені у спеціальному корпусі та забезпечені постійним змащуванням) і відкриті (працюють без мастила або змащуються періодично).

За коловою швидкістю зубчастих коліс передачі поділяють на тихо- ($v \leq 3$ м/с), середньо- ($v = 3 \dots 15$ м/с) та швидкохідні ($v > 15$ м/с).

9.1. Основна теорема зачеплення

Наведемо деякі визначення. *Взаємобвідними* називають такі криві, при коченні та ковзанні яких одна по одній точка їх дотику здійснює неперервний рух вздовж кожної кривої; або до яких у точці дотику завжди можна провести спільну нормаль. Поверхні елементів вищої кінематичної пари, що забезпечують передачу заданого закону руху, називають *спряженими*. Отже, спряжені профілі мають задовольняти певні вимоги.

Основна теорема зачеплення встановлює взаємозв'язок між геометрією спряжених поверхонь та законом відносного руху елементів вищої кінематичної пари.

Стосовно задач синтезу спряжених поверхонь (профілів) – закон відносного руху є заданим. Основною кінематичною величиною механізмів, через яку і задається закон руху, є передатна функція $u_{1,2} = \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)}$. Передатна функція зубчастих механізмів, як правило, стала і називається передатним відношенням, $u_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Нагадаємо, що передатним називається відношення кутової швидкості ведучого вала (колеса) до кутової швидкості веденого вала (колеса).

Синтез механізмів з вищими парами полягає в знаходженні спряжених поверхонь по заданому закону їх відносного руху. Для розв'язку цієї задачі користуються основною теоремою зачеплення.

Нехай передача обертового руху між двома осями O_1 та O_2 (рис. 9.3, а) з кутовими швидкостями ω_1 та ω_2 здійснюється за допомогою двох взаємообвідних профілів Π_1 та Π_2 , що належать ланкам 1 та 2. Проведемо у точці дотику K кривих Π_1 та Π_2 дотичну $t-t$ та нормаль $n-n$ до цих кривих. Із точок O_1 та O_2 проведемо до нормалі $n-n$ перпендикуляри O_1N_1 і O_2N_2 .

Швидкості v_{K_1} та v_{K_2} точок K_1 та K_2 , що належать ланкам 1 та 2, зв'язані умовою:

$$\vec{v}_{K_2} = \vec{v}_{K_1} + \vec{v}_{K_2K_1}.$$

План швидкостей механізму за цим рівнянням приведений на рис. 9.3, б. Відрізок p_vK_0 представляє собою нормальну складову v^n векторів швидкостей v_{K_1} і v_{K_2} . З подібності трикутників $\Delta O_1N_1K_1$ та $\Delta p_vK_0K_1$, $\Delta O_2N_2K_2$ та $\Delta p_vK_0K_2$ маємо

$$\frac{O_1N_1}{O_1K_1} = \frac{p_vK_0}{p_vK_1} = \frac{v^n}{v_{K_1}} \quad \text{та} \quad \frac{O_2N_2}{O_2K_2} = \frac{p_vK_0}{p_vK_2} = \frac{v^n}{v_{K_2}},$$

або

$$v^n = v_{K_1} \frac{O_1N_1}{O_1K_1} = v_{K_2} \frac{O_2N_2}{O_2K_2} \quad (1)$$

Відзначимо, що постійним дотик профілів буде тільки тоді, коли проекції швидкостей v_{K_1} та v_{K_2} на спільну нормаль $n-n$ до профілів у точці зачеплення K , будуть рівні між собою.

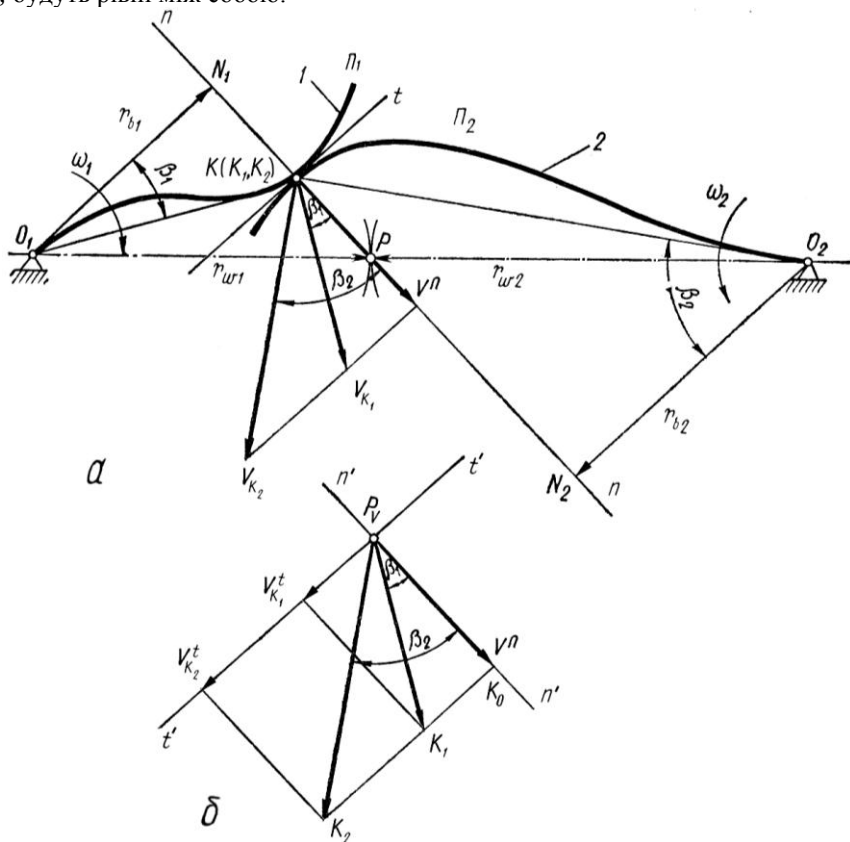


Рис. 9.3

Враховуючи, що $v_{K_1} = \omega_1 O_1 K_1$; $v_{K_2} = \omega_2 O_2 K_2$ та підставляючи ці вирази в (1), отримуємо $\omega_1 O_1 A = \omega_2 O_2 B$

Отже, передатна функція (число) u_{12} рівна

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 N_2}{O_1 N_1} = \frac{r_{b_2}}{r_{b_1}}.$$

З подібності $\Delta O_1 N_1 P$ та $\Delta O_2 N_2 P$ маємо

$$\frac{O_2 N_2}{O_1 N_1} = \frac{O_2 P}{O_1 P} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} \text{ або } u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 P}{O_1 P}. \quad (2)$$

Рівність (2) є основною теоремою зачеплення, яку можна сформулювати так: *спільна нормаль у точці дотику елементів вищої пари кочення та ковзання ділить лінію центрів на частини, обернено пропорційні кутовим швидкостям*. Цю теорему ще називають *теоремою Вілліса*.

Деколи використовують іншу форму доведення. Розглядають проекції на нормаль абсолютних швидкостей v_{K_1} та v_{K_2} . Вони повинні бути рівні між собою за умовою контактування профілів Π_1 та Π_2 без розмикання контакту та без проникнення одного профілю у інший:

$$v^n = \omega_1 O_1 K \cdot \cos \beta_1 = \omega_2 O_2 K \cdot \cos \beta_2,$$

або враховуючи, що $O_1 K \cos \beta_1 = O_1 N_1$, а $O_2 K \cos \beta_2 = O_2 N_2$,

$$\text{отримаємо } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 N_2}{O_1 N_1} = \frac{O_2 P}{O_1 P}.$$

Точка P , що ділить лінію центрів $O_1 O_2$ на частини, обернено пропорційні кутовим швидкостям, є миттєвим центром обертання у відносному русі ланок 1 і 2, в теорії зачеплення називається *полюсом зачеплення*. Радіуси r_{w_2} і r_{w_1} є радіус-векторами центроїд у відносному русі ланок 1 та 2.

Згадаємо теоретичну механіку. Нерухомою центроїдою називають геометричне місце миттєвих центрів обертання, тобто, положень т. P на нерухомій площині. Рухомою центроїдою називають геометричне місце миттєвих центрів швидкостей у площині, яка зв'язана з рухомою плоскою фігурою. При русі плоскої фігури у її площині рухома центроїда котиться без ковзання по нерухомій. Обернена теорема про центроїди свідчить, що будь-який рух плоскої фігури в її площині можливо здійснити шляхом кочення без ковзання рухомої центроїди по нерухомій.

Миттєвий центр швидкостей P є точка плоскої фігури, швидкість якої у даний момент дорівнює нулю. Вона визначається як точка перетину перпендикулярів, проведених з будь-яких двох точок фігури до векторів швидкостей цих точок. У кожний момент часу з миттєвим центром швидкостей співпадає миттєвий центр обертання – точка нерухомої площини, поворотом навколо якої плоска фігура переміщується з одного положення у нескінченно близьке до нього.

Знайдемо центроїди для розглядуваного випадку. По відношенню до ланки 1 ланка 2 має складний рух. Використовуючи метод обернення руху

(зупинки) можна вказати напрями відносних швидкостей двох точок, наприклад O_2 і K_2 : це, відповідно, перпендикуляр до O_1O_2 та спільна дотична $t-t$ до профілів. Звідси, миттєвий центр швидкостей P знаходиться у точці перетину міжосьової віддалі O_1O_2 та спільної нормалі до профілів, яка проведена у точці контакту K .

Сукупність послідовних положень т. P на нерухомій та рухомій площинах утворюють, відповідно, рухому та нерухому центроїди.

При змінному значенні передатної функції u_{12} полюс зачеплення P займає на лінії центрів O_1O_2 змінне положення. При сталому значенні u_{12} полюс зачеплення розміщується в одній і тій же точці на прямій O_1O_2 ; радіуси центроїд ланок 1 і 2 постійні. Отже, при передачі обертового руху між ланками з паралельними осями і постійним передатним відношенням центроїди представляють собою кола. В теорії зачеплення ці кола називаються початковими колами і позначаються r_w .

Відзначимо також, що відносний рух зубчастих коліс представляють як кочення без ковзання одного початкового кола по іншому.

Основною кінематичною умовою для профілів зубців зубчастих коліс є умова сталості миттєвого передатного числа.

Основну теорему зачеплення стосовно зубчастих коліс формують ще так: для того, щоб передатне відношення за період зачеплення двох профілів зубців було сталим, необхідно, щоб нормаль до профілів у точці їх дотику, проходила через одну і ту ж точку на лінії центрів коліс та ділила лінію центрів у незмінному відношенні.

Зауважимо також, що якщо полюс зачеплення P розміщений між осями O_1 і O_2 , то ланки обертаються у різних напрямках, тобто u_{12} має знак мінус, а зачеплення називається зовнішнім. Якщо полюс P розміщується ззовні відрізка O_1O_2 , то ланки обертаються в однакових напрямках, передатне відношення має знак плюс, а зачеплення називається внутрішнім.

Усі криві, що задовольняють основну теорему зачеплення, можуть бути використані для утворення бокових поверхонь зубців циліндричних передач.

Отже, першою вимогою до кривих, якими окреслені профілі зубців, є відповідність профілів основній теоремі зачеплення. Цю умову задовольняють багато кривих. Однак профілі зубців повинні ще бути такими, щоб сприяти нескладному виготовленню зубчастих коліс з різним числом зубців, забезпечувати високий коефіцієнт корисної дії передачі, достатню міцність зубців, тощо. Цим вимогам найбільше відповідає евольвентне зачеплення і тому його найбільш широко застосовують у зубчастих передачах загального машинобудування.

Евольвентне зачеплення, запропоноване Ейлером, має суттєві технологічні та експлуатаційні переваги:

- простота побудови евольвентних профілів зубців;

– виготовлення евольвентних коліс та інструменту для їх нарізання є найбільш простим, зокрема зубці можна нарізати інструментом рейкового типу з прямолінійним профілем;

– допускається, в певних межах, відхилення міжосьової відстані (при неточності виготовлення, монтажу), при цьому зберігається постійним передатне відношення;

– евольвентне зачеплення допускає виправлення (коригування) робочого профілю зубців із метою вибору оптимальних відрізків евольвенти, що забезпечує кращі характеристики передачі.

Використовують інші види зачеплень (циклоїдальні, кругові, годинникові та інші). Серед “неєвольвентних” зачеплень найбільше розповсюдження отримало зачеплення Новікова, яке характеризується високою міцністю зубців.

9.2. Евольвента кола, її властивості та рівняння

Евольвентою кола називається крива, яку описує будь-яка точка прямої, що перекочується по колу без ковзання. Пряму, що перекочується, називають твірною або відтворюючою прямою, вона являє собою рухоми центроїду, а коло, відповідно, є нерухомою центроїдою. При перекочуванні за годинниковою стрілкою дотичної прямої $n-n$ по колу r_b , т. K_0 вказаної прямої опише евольвенту K_0K_y (рис. 9.4). Зазначимо, що при перекочуванні даної прямої у протилежному напрямі т. K_0 опише також евольвенту, $K_0K'_y$ (точніше ліву вітку евольвенти). Оскільки пряма перекочується без ковзання, справедлива рівність $N_nK_y = \cup K_0N_y$. Наведемо також інші визначення.

Геометричне місце центрів кривини якої-небудь кривої називається *еволютою*, а сама крива по відношенню до еволюти – *розгортка* або *евольвента*. Отже, евольвента кола є крива, центри кривини якої лежать на колі. В теорії зачеплення це коло називають основним, оскільки воно служить основою для побудови евольвенти, і позначають завжди з індексом e , тобто, r_e . Отже, основне коло – коло, евольвентою якого є профіль зуба.

Детально побудову евольвенти основного кола r_e , при перекочуванні по ньому твірної прямої $n-n$, розглянемо на занятті з курсового проектування при побудові картини зубчастого зачеплення.

Рівняння евольвенти. Із умови утворення евольвенти довжина відрізка K_yN_y (радіус кривини евольвенти в т. K_y) повинна бути рівна дузі, що розгортається $N_yK_y = \cup K_0N_y$. В свою чергу, дуга $\cup K_0N_y = r_e(\theta_y + \alpha_y)$, а відрізок $K_yN_y = r_e \operatorname{tg} \alpha_y$. Звідки

$$r_e(\theta_y + \alpha_y) = r_e \operatorname{tg} \alpha_y,$$

або

$$\text{inv } \alpha_y = \theta_y = \text{tg } \alpha_y - \alpha_y, \quad (3)$$

де α_y – кут профілю, гострий кут між дотичною до евольвенти (до профілю зуба) у т. K_y і її радіусом вектором OK_y ; θ_y – евольвентний кут – кут, утворений початковим радіус-вектором OK_0 та біжучим радіус-вектором OK_y . Тригонометричну функцію кута $\alpha_y - \theta_y = \text{tg } \alpha_y - \alpha_y$ називають евольвентною функцією, позначають скорочено inv (інвалюта) та використовують при геометричному розрахунку евольвентних зубчастих коліс. Для спрощення розрахунків значення $\text{inv } \alpha_y$ наводяться у таблицях для різних значень кута α_y .

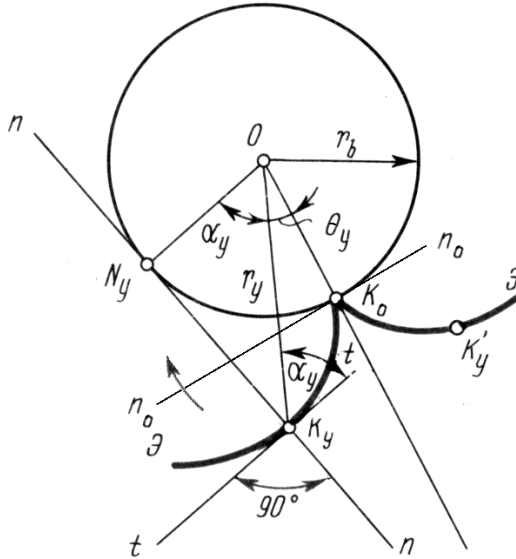


Рис. 9.4

Будь-яка т. K_y евольвенти повністю визначається двома параметрами: радіус-вектором r_y та евольвентним кутом θ_y .

Зв'язок між r_y та кутом α_y встановлюється з ΔN_yOK_y залежністю

$$r_y = r_b / \cos \alpha_y \quad (4)$$

Формули (3) та (4) визначають рівняння евольвенти в полярних координатах r_y і θ_y . Ці рівняння, після виключення параметра α_y , вказують на те, що евольвента повністю визначається основним колом.

Для теорії зачеплення важливе значення мають такі *основні властивості евольвенти*:

- евольвента являє собою симетричну криву, що має дві вітки, які збігаються у початковій точці K_0 , розміщеній на основному колі. Отже,

евольвента не має точок всередині основного кола;

- точки N_y є миттєвими центрами швидкостей твірної прямої $n-n$ і центрами кривини евольвенти у точках K_y . Отже, нормалі до евольвенти в будь-якій точці є прямі, що дотичні до основного кола у відповідних точках;

- основне коло є геометричним місцем центрів кривини евольвенти, що описують твірні прямі, тому відрізки $N_y K_y$ є радіусами кривини евольвенти у відповідних точках K_y ;

- кут профілю α_y та радіус кривини r_y евольвенти у початковій точці K_0 дорівнюють нулю. По мірі віддалення точок евольвенти від основного кола, кут профілю збільшується, кривина евольвенти зменшується, тобто радіус кривини збільшується;

- при збільшенні радіуса основного кола евольвентний профіль поступово втрачає свою кривину і при $r_e = \infty$ евольвента перетворюється на пряму лінію.

Отже, щоб визначити радіус кривини евольвенти (зубця) у певній точці треба провести від неї дотичну до основного кола.

9.3. Основні геометричні параметри циліндричних зубчастих передач

Розглянемо основні елементи зубчастого колеса (рис. 9.5, а). Циліндрична поверхня (1), що відокремлює зубці від тіла зубчастого колеса, називається поверхнею западин зубців. Циліндрична поверхня (2), що обмежує зуби по висоті – поверхня вершин зубців. Простір між двома сусідніми зубцями (3) – западина. Поверхня, що обмежує зуб зі сторони западини (4), називається бічною поверхнею зуба.

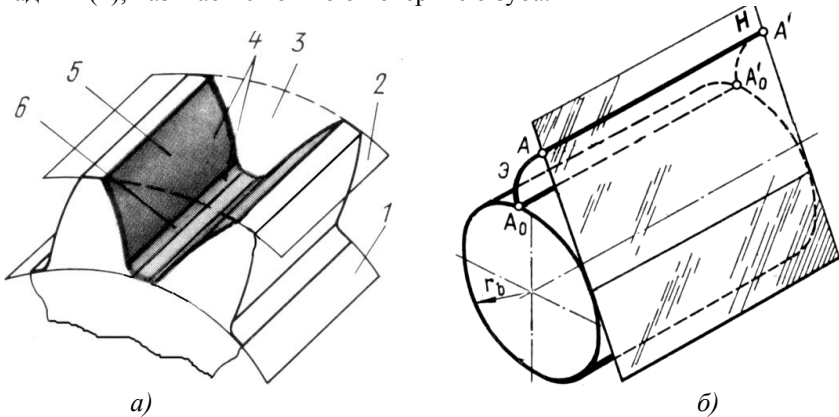


Рис. 9.5

Бічна поверхня складається із головної (5) та перехідної (6) поверхонь. Головна поверхня – це та частина бокової поверхні зуба, яка взаємодіє з головною поверхнею іншого зуба і при цьому забезпечує задане передаточне відношення. Перехідна поверхня з'єднує головну поверхню з поверхнею западин.

Головною поверхнею, як зазначалось вище, найчастіше є евольвентна поверхня. Її можна подати як сукупність цілком однакових евольвент, що розміщені у площинах, перпендикулярних до осі колеса. Ці евольвенти є траєкторіями точок твірної прямої $A_0A'_0$, що належить площині H , яка перекочується по основному циліндру без ковзання (рис. 9.5, б).

На рис. 9.6 зображено зубчасте колесо із зовнішніми зубцями. При розгляді зубчастих коліс зазначають чотири кола:

- *коло вершин* (виступів, зовнішнє коло), r_a – коло, що належить поверхні вершин;
- *коло западин*, r_f – коло, що належить поверхні западин;
- *основне коло*, r_b – коло, яке є базою для побудови евольвентного профілю зубців. Діаметр основного кола – єдиний параметр, що визначає форму евольвенти, оскільки кожному конкретному колу відповідає одна певна евольвента;

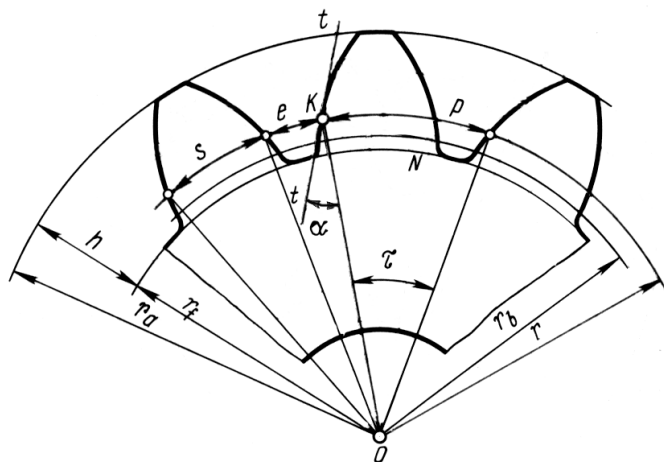


Рис. 9.6

- *ділильне коло*, r – коло, яке є базою для визначення розмірів елементів зубців. Ділильне коло, це коло, що перетинає профіль зуба в точці, для якої кут профілю дорівнює стандартному куту, $\alpha=20^\circ$ (куту нахилу зуба інструментальної рейки). Нагадаємо, гострий кут у поперечному перерізі зубця, між дотичною до профілю зубця у даній точці та лінією, що проходить

через цю точку і центр колеса, називається *кутом профілю зубця*. Кут профілю зубця у т.К, яка знаходиться на ділильному колі, стандартизований і дорівнює 20° . Ділильне коло ділить зубець на дві частини – головку та ніжку

Коли мова йде про зачеплення зубчастих коліс, розрізняють ще початкове коло. Початкове коло – це поняття кінематичне і у окремо взятого колеса такого кола не має. *Початкові кола*, як вже відмічалось, це центроїди у відносному русі зубчастих коліс, тобто кола, якими зубчасті колеса у відносному русі перекочуються одне по одному без ковзання. Для зачеплення нормальних, нульових коліс, радіуси початкових кіл дорівнюють радіусам ділильних кіл, $r_w = r$.

Відстань між однойменними точками профілів двох сусідніх зубців по дузі концентричного кола зубчастого колеса називається *коловим кроком* зубців і позначається p (з індексом відповідного кола). Розрізняють ділильний p , початковий p_w , основний p_b та інші колові кроки зубців, що відповідають ділильному, початковому, основному та іншим концентричним колам зубчастого колеса.

Крок зубців по будь-якому колу можна представити як суму товщини зуба s та ширини западини e ; тобто

$$p = s + e; p_i = s_i + e_i.$$

Дуги p , p_b , p_w та p_i відповідають одному і тому ж кутовому кроку

$$\tau = \frac{p}{r} = \frac{p_b}{r_b} = \frac{p_i}{r_i}.$$

Центральний кут, що опирається на дугу кола зубчастого колеса, яка дорівнює коловому кроку називається *кутовим кроком*.

Кутовий крок можна виразити і так

$$\tau = \frac{2\pi}{z}, \text{ або } \tau = \frac{360^\circ}{z}.$$

Важливим елементом зубчастого колеса є крок по ділильному колу. Виразимо довжину ділильного кола через крок p і число зубців z :

$$2\pi r = p z \text{ або } d = \frac{p}{\pi} \cdot z = m \cdot z.$$

Відношення p/π позначають буквою m і називають модулем. Це зв'язано з тим, що π – число ірраціональне (3,1459...), і відношення p/π не може бути точно пораховане. Цей факт ускладнює підбір розмірів зубчастих коліс при проектуванні коліс та практичний їх вимір. З іншого боку, зубці коліс нарізаються на спеціальних станках ріжучим інструментом, розміри і форма якого залежать від величини модуля. Щоб не мати на заводах

надмірної кількості ріжучого інструменту, домовились для деякого кола, що називається ділильним, вибрати модулі із ряду раціональних чисел. Модулі зубців стандартизовані. У ДСТУ наведено значення модулів, починаючи від 0,05 до 100 мм, у вигляді двох рядів (основного та допоміжного). До цих значень можуть заокруглюватись модулі, що отримані при розрахунку.

Модуль є основною характеристикою зубчастих коліс. Через модуль виражають розміри зубчастих коліс, передач та зубонарізного інструменту.

Модуль – це крок на ділильному колі, поділений на π . Одиниця модуля – мм.

Стандартні модулі від 1 до 5 мм такі:

1-й ряд: 1 1,25 1,5 2 2,5 3 4 5

2-й ряд: 1,125 1,375 1,75 2,25 2,75 3,5 4,5 5,5

Радіальна відстань h між колами вершин та западин є висотою зуба; вона складається із двох частин: висоти головки h_a та висоти ніжки h_f . Тобто,

$$h = h_a + h_f.$$

Визначимо розміри зубчастих коліс, у яких ділильні кола співпадають з початковими; такі колеса будемо називати нульовими. Ці розміри, як зазначалося, можуть бути завжди виражені у функції модуля.

Наприклад, ділильний діаметр $d = mz$. Діаметр вершин

$$d_a = d_1 + 2h_a = mz_1 + 2m = m(z_1 + 2).$$

Діаметр западин

$$d_f = d_1 - 2h_f = mz_1 - 2,5m = m(z_1 - 2,5).$$

Тут враховано, що висота h_a головки зуба та висота h_f ніжки зуба переважно приймаються рівними $h_a = m$, $h_f = 1,25m$. Більший розмір ніжки у порівнянні з головкою забезпечує зазор між головкою зуба одного колеса та впадиною іншого. Відзначимо, що деколи застосовуються колеса з вкороченими зубцями, для яких $h_a = 0,8m$, $h_f = m$.

Міжосьова відстань a_w між центрами коліс O_1 та O_2 також може бути виражена через m

$$a_w = 0,5(d_1 + d_2) = 0,5m(z_1 + z_2).$$

9.4. Якісні показники зубчастої передачі

Розглянемо якісні показники зубчастої передачі, які дають можливість оцінити передачу у відношенні плавності та безшумності зацеплення, стійкості щодо можливого спрацювання, міцності зубців, а також порівняти ряд передач за цими показниками. Така оцінка важлива для раціонального призначення коефіцієнтів зміщення при проектуванні та виготовленні зубчастих передач.

Коефіцієнт перекриття враховує неперервність, плавність, безшумність та безударність зацеплення. Такі якості передачі забезпечуються перекриттям роботи однієї пари зубців роботою іншої пари. Зубчасте зацеплення є багатопрофільним зацепленням, в якому спряжені пари зубців по чергово входять у зацеплення. Тому перш ніж одна пара зубців вийде із зацеплення, необхідно, щоб друга пара обов'язково ввійшла в зацеплення. Про це судять за коефіцієнтом перекриття.

Відношення кута торцевого перекриття зубчастого колеса до його кутового кроку називається *коефіцієнтом перекриття* ε_α . Отже, коефіцієнт перекриття прямозубої передачі

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varphi_{\alpha_1}}{\tau_1} = \frac{\varphi_{\alpha_2}}{\tau_2}. \quad (5)$$

Кут торцевого перекриття φ_α – кут повороту зубчастого колеса від моменту входу зубця в зацеплення до моменту виходу його із зацеплення.

Коефіцієнт перекриття повинен бути більшим за одиницю, інакше при роботі зубчастої передачі можуть виникнути моменти, коли у зацепленні не буде знаходитися жодна пара зубців і передача буде працювати з ударами. Із-за неточностей виготовлення та монтажу і внаслідок зношення величина коефіцієнта перекриття може виявитися меншою за розрахункову. Тому при проектуванні зацеплення найменшою допустимою величиною коефіцієнта перекриття вважають $\varepsilon_\alpha = 1,05$, який забезпечить неперервність процесу зацеплення з 5% запасом. Але бажано, щоб значення коефіцієнта ε_α було якомога більшим.

Коефіцієнт перекриття іноді називають коефіцієнтом плавності або тривалості зацеплення. Він визначає середнє число пар зубців, що одночасно знаходяться у зацепленні. Наприклад, якщо $\varepsilon_\alpha = 1,7$, це означає, що протягом 70% всього часу роботи передачі в зацепленні знаходяться дві пари зубців, а на протяг 30% – одна пара.

Зі збільшенням коефіцієнта перекриття підвищується плавність роботи та несуча здатність передачі, зменшуються динамічні навантаження та шум передачі. Тому у швидкохідних та високонавантажених передачах замість прямозубих коліс ($\varepsilon_{\alpha max} \leq 1,98$) використовують косозубі чи шевронні колеса, або колеса з криволінійними зубцями, які забезпечують більші коефіцієнти перекриття (до 10 і більше).

Коефіцієнт перекриття може бути визначений аналітично

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{a_1} - \operatorname{tg} \alpha_w}{\tau_1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha_{a_2} - \operatorname{tg} \alpha_w}{\tau_2},$$

де $\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2}$ – кути профілю зубців у точці на колі вершин.

Коефіцієнт питомого тиску враховує вплив геометрії зубців (радіусів кривини їхніх профілів) на величину контактних напружень, що виникають у місцях дотику профілів.

Формулу Герца, що визначає величину контактних напружень, можна написати у вигляді

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{Q}{b}} E \frac{1}{\rho} = 0,418 \sqrt{\frac{QE}{bm}} \sqrt{\vartheta},$$

де Q – сила взаємодії зубців; b – ширина зубчастих коліс; E – зведений модуль пружності їхніх матеріалів; ρ – зведений радіус кривини евольвентних профілів у точці контакту; ϑ – коефіцієнт питомого тиску.

У цій формулі тільки величина ϑ залежить від геометрії профілів зубців.

Коефіцієнтом питомого тиску називається відношення модуля до зведеного радіуса кривини евольвентних профілів у точці контакту

$$\vartheta = \frac{m}{\rho}.$$

Коефіцієнт ϑ величина безрозмірна, що не залежить від модуля, оскільки ρ пропорційний модулю.

Враховуючи, що $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2}$ та що згідно з властивостями

евольвентних профілів радіус кривини ρ – відстань від точки контакту K до основного кола ($\rho_1 = N_1 K$, $\rho_2 = N_2 K$), розрахункова формула для коефіцієнта ϑ має вигляд

$$\vartheta = \frac{m N_1 N_2}{N_1 K \cdot N_2 K}. \quad (6)$$

При повороті зубчастих коліс та переміщенні точки контакту K по лінії зачеплення ρ_1 та ρ_2 суттєво змінюються, тому коефіцієнт ϑ – функція положення точки контакту на лінії зачеплення.

При розрахунку зубців на міцність особливо важливе значення має коефіцієнт ϑ_p у полюсі зачеплення P (всередині зони однопарного зачеплення)

$$\vartheta_p = \frac{mN_1N_2}{N_1P \cdot N_2P}.$$

Коефіцієнт питомого тиску ϑ зменшується (відповідно і контактні напруження) при збільшенні коефіцієнтів зміщення x_1, x_2 . При цьому зуби утворюються більш пологими ділянками евольвенти. Отже, конструктор може зменшувати контактні напруження, призначаючи відповідні коефіцієнти зміщення.

Коефіцієнт ковзання. У точці контакту зубців, що перебувають у зачепленні, мають місце відносні перекочування та ковзання профілів. Ковзання профілів супроводжується тертям. Тертя є причиною втрат енергії та спрацювання робочих поверхонь. Швидкість v_s ковзання профілів є одним із основних факторів, які визначають втрати енергії у зачепленні і стійкість зубців проти спрацювання та заїдання.

Неважко показати, що швидкість ковзання спряжених профілів у вищій парі дорівнює добутку відстані між точкою контакту K та полюсом зачеплення P на кутову швидкість $\overline{\omega}_{12} = \overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2$ у відносному русі профілів

$$v_s = (\overline{KP})(\omega_1 \pm \omega_2),$$

де KP - змінна відстань від точки дотикання профілів зубців до полюса зачеплення.

Отже, швидкість ковзання у зачепленні пропорційна відстані точки контакту до полюса. У полюсі P вона дорівнює нулю, а при переході через полюс міняє свій знак. Чим далі розміщена т. K від полюса P , тим більша швидкість ковзання. Максимальні значення швидкості ковзання приймає при контакті верхньої точки профілю головки зубця із нижньою точкою профілю ніжки зубця. Зауважимо, що оскільки зношення контактуючих поверхонь є функцією швидкості ковзання, то конструктор повинен вибирати таке розміщення спряжених профілів відносно центроїд, щоб швидкість ковзання знаходилась у допустимих межах.

Швидкість ковзання збільшується зі зростанням висоти зубців, тобто їх модуля. У коліс із малим модулем та великим числом зубців ковзання менше, ніж у коліс із великим модулем та малим числом зубців.

Проводити оцінку ковзання профілів у відносному русі тільки по величині швидкості ковзання недостатньо: необхідно ще враховувати швидкість руху точки дотику по кожному з профілів, тобто швидкостей $v_{\kappa_1}^t, v_{\kappa_2}^t$ (див. рис. 9.3).

Коефіцієнтами ковзання називають відношення швидкості ковзання v_s профілів до дотичних складових швидкостей точок дотику K_1, K_2 спряжених профілів

$$\lambda_1 = \frac{v_s}{v_{K_1}^t}, \quad \lambda_2 = \frac{v_s}{v_{K_2}^t}.$$

Коефіцієнт ковзання враховує вплив геометричних та кінематичних факторів на величину ковзання у процесі зачеплення.

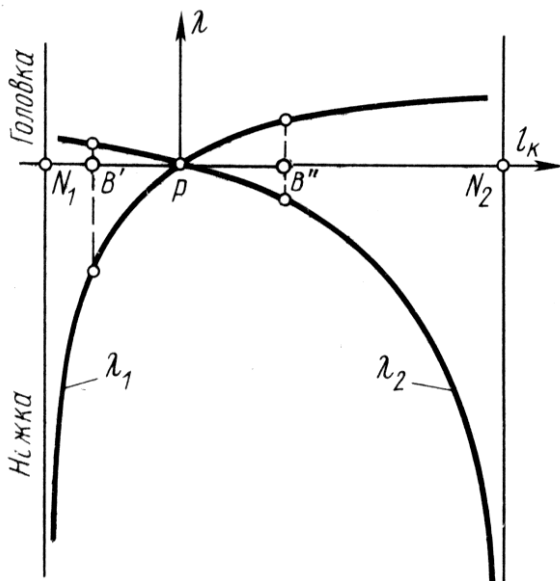


Рис. 9.7

Розрахункові формули для коефіцієнтів ковзання λ_1 та λ_2 мають такий вигляд

$$\lambda_1 = \left(1 + \frac{1}{u_{12}}\right) \frac{l_K}{l_K + l_{P_1}}; \quad \lambda_2 = \left(1 + \frac{1}{u_{12}}\right) \frac{l_K}{l_K - l_{P_2}}, \quad (7)$$

де l_K – алгебраїчне значення відстані від полюса до точки контакту пари зубців (з урахуванням знаку); l_{P_1}, l_{P_2} – абсолютні значення довжини відрізків PN_1, PN_2 .

На рис. 9.7 показані криві зміни коефіцієнтів ковзання вздовж лінії зачеплення. Детально побудову діаграм розглянемо на занятті з курсового проектування.

Аналізуючи отримані епюри, можна констатувати:

- відносне ковзання на ніжці зубця більше ніж на головці. Тому ніжка в евольвентному зубці зношується сильніше, ніж головка;

- при наближенні до основного кола відносне ковзання стає дуже великим. Звідси, у малих колесах ніжка зношується сильніше ніж у великих.

Зазначимо, що значення коефіцієнтів λ_1, λ_2 залежить від коефіцієнтів зміщення. Із зростанням коефіцієнтів x_1, x_2 коефіцієнти ковзання збільшуються.

9.5. Деякі відомості про способи нарізання зубчастих коліс

Сучасні методи нарізування поверхонь зубців зубчастих коліс достатньо різноманітні і нараховують у загальній кількості близько десятка найменувань. Водночас можна виділити два принципово різних способи: копіювання та обкатки.

Метод копіювання – профіль зубців дістають як копію контуру робочої частини зуборізного інструменту.

Інструментом у цьому випадку є дискові або пальцеві фрези, які послідовно прорізають впадини між зубцями (рис. 9.8, а, б). Тобто за кожний хід фрези вздовж осі колеса виходить нарізаною одна впадина. Основні недоліки цього методу – це відносно низька продуктивність, мала точність та потреба великої кількості зуборізного інструменту, оскільки форма профілю зубців залежить не тільки від модуля, а й від числа зубців зубчастого колеса.

Метод обкатки (огинання) – основний, більш продуктивний та точний метод нарізування зубців. У цьому випадку одночасно нарізується кілька зубців. Профіль зубців утворюється у вигляді огинаючої лінії послідовних положень різальних кромek інструменту, тобто інструмент ніби обкочує колесо, що нарізується.

При способі обкатки заготовці та ріжучому інструменту, що має зубчасту форму (черв'ячна фреза, рейка, довбач), надають на верстаті такі рухи одне відносно одного, які відтворюють процес зачеплення (рис. 9.8, в, г, д).

Це зачеплення інструменту та заготовки називається *верстатним*. Тобто, ріжучому інструменту, наприклад, довбачу, та заготовці надають той відносний рух, який мали б два зубчасті колеса, що перебувають у правильному зачепленні. Крім рухів, що відтворюють процес зачеплення, інструменту надається ще технологічний рух різання. При цьому ріжучі кромки інструменту описують зубчасту поверхню, яка називається *“продукуючою”*.

При способі обкатки одним інструментом можна нарізувати зубчасті колеса з різним числом зубців даного модуля (оскільки зубчасте колесо даного модуля може ввійти в зачеплення з іншим колесом цього модуля з

будь-яким числом зубців). У випадку інструменту – довбача, можна нарізувати колеса як зовнішнього так і внутрішнього зачеплень. При безмежному збільшенні діаметра та числа зубців довбача, будемо мати інструментальну рейку – найбільш простий, дешевий та точний інструмент для нарізування зубців за методом обкочування. Принцип стругання з почерговими робочими та холостими ходами інструменту, який має місце при нарізуванні зубців довбачем та рейкою, не забезпечує високої продуктивності.

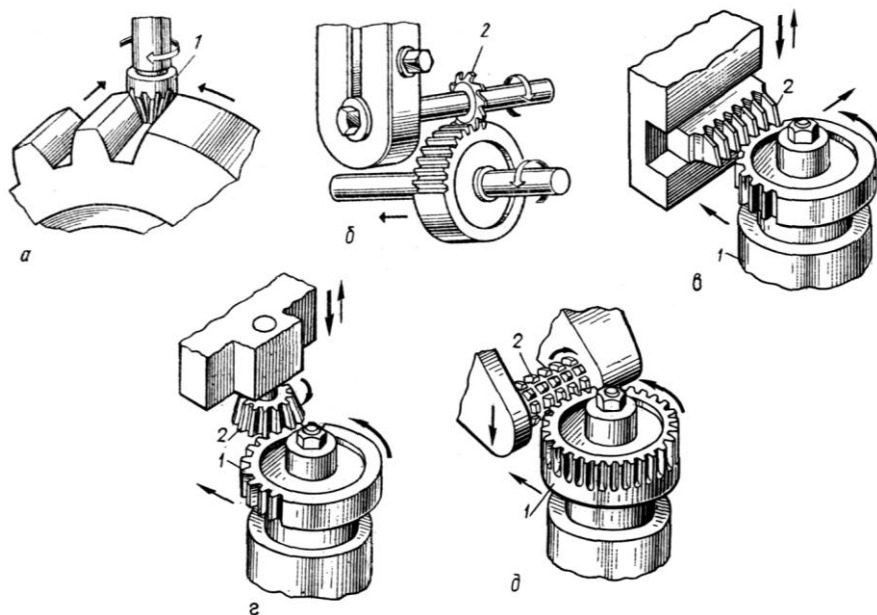


Рис. 9.8

Якщо замінити інструментальну рейку черв'ячною фрезою, що має у нормальному перерізі профіль рейки, то процес стругання замінюється неперервним, більш продуктивним процесом фрезерування. Цей спосіб нарізування зубців має переважне застосування. Він використовується для коліс як з прямими, так і з косими зубцями. Відзначимо, що метод обкатки застосовується і для нарізування зубців конічних зубчастих коліс, яке здійснюється на спеціальних верстатах.

9.6. Початковий (вихідний) контур зубчастих коліс

Для забезпечення зачеплення евольвентних зубчастих коліс, що виготовляються у різних умовах, необхідно, щоб будь-яке колесо відповідало вимогам стандарту, що встановлює основні параметри зачеплення. Стандарт на параметри зубчастої рейки встановлений на основі властивості спряженості прямолінійного профілю рейки з евольвентною кола.

При безмежно великому діаметрі основного кола зубчасте колесо перетворюється у зубчасту рейку (всі кола перетворюються у паралельні прямі), а евольвентний профіль зубця – у прямолінійний (надзвичайно зручний для виготовлення та контролю розмірів). Можливість зачеплення евольвентного зубчастого колеса із зубчастою рейкою має важливе практичне значення, що дозволяє виготовляти зуборізний інструмент у вигляді рейки із зубцями прямолінійного профілю (який можна виготовити порівняно дешево та достатньо точно).

В основу рейкового інструменту в нашій країні покладено стандартний початковий (вихідний) продукуючий рейковий контур (рис. 9.9)

Профілювання зубців евольвентного профілю та інструменту для їх нарізування здійснюється відповідно до початкового контуру.

Рейковий контур, покладений в основу стандарту, тобто, прийнятий в якості базового для визначення теоретичних форм і розмірів зубчастих коліс, називається теоретичним початковим (вихідним) контуром, або *початковим контуром*.

Параметри початкового контуру стандартизовані, оскільки він визначає геометрію зуборізного інструменту і зубчастих коліс.

На рис. 9.9 зображено початковий контур для циліндричних евольвентних коліс за ДСТУ. Це прямобічний рейковий контур. Профіль зубців є прямолінійним на однаковій довжині по обидва боки від середньої лінії *c-c*, на якій товщина зубця та ширина западини рівні між собою. Середня лінія рейки називається *ділильною прямою*.

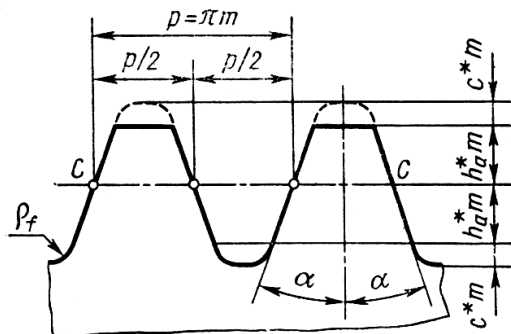


Рис. 9.9

Зазначимо, профіль зуба ріжучого інструменту відрізняється від початкового профілю тим, що висота головки збільшена на величину радіального зазору (штрихова лінія).

Стандартом встановлені наступні параметри та коефіцієнти початкового контуру: кут профілю $\alpha=20^\circ$; коефіцієнт висоти головки зуба $h_a^*=1,0$; коефіцієнт радіального зазору $c^*=0,25$; коефіцієнт радіуса кривини перехідної кривої $\rho_f^*=0,38$. Абсолютні розміри зуба вихідного контуру отримують множенням перелічених коефіцієнтів на модуль.

Згідно з названими параметрами початкового контуру, розміри зубців нормального евольвентного зачеплення визначають за формулами:

$$\text{висота головки зубців } h_a = h_a^* \cdot m;$$

$$\text{висота ніжки зубців } h_f = h_f^* \cdot m = (h_a^* + c^*)m;$$

$$\text{висота зубців } h = h_f + h_a = (2h_a^* + c^*)m;$$

$$\text{радіус кривини перехідної кривої } \rho_f = \rho_f^* \cdot m;$$

$$\text{радіальний зазор } c = c^* \cdot m.$$

Вихідний контур відрізняється від контуру робочої рейки збільшеною на c^*m висотою головки зуба, необхідної для утворення більшої глибини западини, що забезпечує радіальний зазор у зачепленні.

Діаметр вершини зубців та діаметр западин зубчастого колеса можна визначити за виразами:

$$d_a = d + 2h_a = mz + 2h_a^* \cdot m;$$

$$d_f = d - 2h_f = mz - 2h_f^* \cdot m = mz - 2(h_a^* + c^*) \cdot m.$$

Зазначимо, для спеціальних цілей деколи застосовують початкові контури з деякими іншими параметрами. Ці контури не стандартизовані.

9.7. Підрізання зубців. Мінімальне число зубців при виготовленні зубчастих коліс

При виготовленні зубчастих коліс за методом обкатки в деяких випадках відбувається явище підрізування зубців виготовлюваного колеса різальним інструментом. Суть цього явища полягає в тому, що зуб інструменту, перекочуючись у западині колеса, що виготовляється, зрізує частину тіла на ніжці зуба. Це явище відбувається, якщо число зубців у нарізаного зубчастого колеса менше від деякого граничного значення z_{min} . Підрізування зменшує евольвентну частину профілю зуба, що порушує

правильність зачеплення та послаблює зуб в небезпечному січенні, де діють найбільші напруження згину (рис. 9.10).

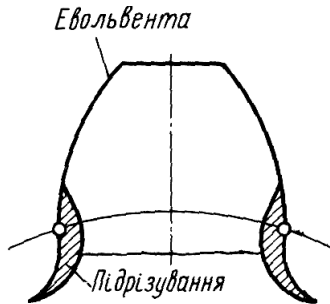


Рис. 9.10

Зі властивостей евольвентного зачеплення прямолінійна частина інструменту – його ріжуча кромка та евольвентна частина профілю зубця, що виготовляються, розміщуються по дотичній одна до одної тільки на лінії верстатного зачеплення. Розглянувши верстатне зачеплення та записавши граничну умову – коли вся можлива лінія зачеплення є активною, одержують формулу для визначення мінімального числа зубців, при якому вони ще не будуть підрізані:

$$z \geq 2(h_a^* - x) / \sin^2 \alpha . \quad (8)$$

Якщо коефіцієнт зміщення $x=0$ (див. нижче), то з (8) отримується формула для мінімального числа зубців, що може бути нарізаною рейковим інструментом без зміщення:

$$z_{\min} = 2h_a^* / \sin^2 \alpha .$$

Наголосимо, що при проектуванні коліс без зміщення число зубців необхідно брати рівним або більшим $z_{\min}$. У випадку стандартного рейкового інструменту ($h_a^*=1,0$; $\alpha=20^\circ$) для прямозубих циліндричних зубчастих коліс $z_{\min}=17$. Для інших зубчастих коліс це число уточнюється в довіднику. Число зубців менше за $z_{\min}$ можна нарізати, застосувавши коригування зубчастих коліс.

9.8. Коригування (виправлення) зубчастих коліс евольвентного зачеплення

Щоб надати зубчастому зачепленню певних властивостей або щоб усунути явище підрізання зубців, використовують спеціальні способи виправлення їх профілю, які називаються коригуванням зубчастих зачеплень (рис. 9.11). Існує таке визначення: виправлення зубчастого зачеплення з метою його покращення називається коригуванням.

Коригування зубчастих коліс виконується з метою:

- підвищити міцність зубців на згин;
- підвищити контактну міцність зубців;
- зменшити спрацювання зубців;
- підвищити плавність, швидкохідність, безшумність роботи передачі, тобто, змінити ті чи інші якісні показники зубчастого зачеплення (коефіцієнт перекриття, коефіцієнт питомого тиску, коефіцієнт ковзання);
- вписати зубчасту передачу у наперед задану міжосьову відстань;
- усунути явище підрізання зубців різальним інструментом, якщо число зубців z на виготовлюваному зубчастому колесі менше від деякого граничного значення $z_{\min}$.

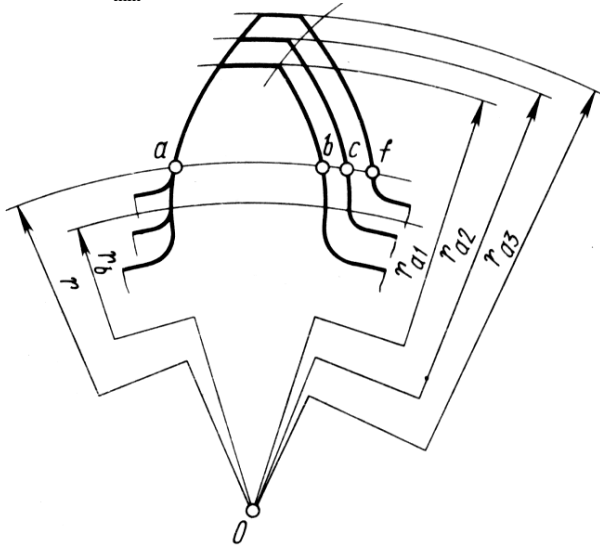


Рис. 9.11

Кориговане зачеплення відрізняється від нормального тим, що профілі зубців виконують іншими, більш доцільними для даної передачі відрізками евольвенти того самого основного кола. Кориговані зубчасті колеса виготовляють на тому самому обладнанні та тим же стандартним

інструментом, що й некориговані. Різниця полягає в тому, що для коригування коліс інструмент встановлюють з деяким зміщенням у радіальному напрямі. Відстань, на яку зміщують зубонарізний інструмент, називають *зміщенням* інструменту. Його виражають у вигляді добутку модуля m на коефіцієнт зміщення x та йому присвоюють знак:

- при нульовій установці зміщення $m \cdot x = 0, x = 0$;
- при позитивній установці $m \cdot x > 0, x > 0$;
- при від'ємній установці $m \cdot x < 0, x < 0$.

На рис. 9.11 показана форма зубців, що нарізані одним і тим же інструментом на одній і тій же заготовці, але з різним коефіцієнтом зміщення. Усі зубці мають однаковий основний діаметр d_b , отже профілі зубців накреслені по одній і тій же евольвенті. Чим більше зміщення, тим віддаленішими від основного кола відрізками евольвенти окреслюється профіль зубців. При цьому зменшується кривина евольвентного профілю, зубець в основі потовщується, а на вершині загострюється.

Отже, коефіцієнти зміщення суттєво впливають на форму зубців, а таким чином і на якісні характеристики зубчастої передачі. Призначаючи при проектуванні зубчастої передачі ті чи інші коефіцієнти зміщення, можна наділяти передачі бажаними якістьми відповідно до умов їх роботи.

9.9. Вибір коефіцієнтів зміщення

Вибір коефіцієнтів зміщення – один із основних етапів проектування зубчастої передачі. Для кожної передачі коефіцієнти зміщення призначають індивідуально залежно від призначення передачі та заданих умов її експлуатації. Нагадаємо, що призначаючи при проектуванні той чи інший коефіцієнт зміщення, можна впливати на форму зуба і, відповідно, на якісні показники зубчастої передачі.

Коефіцієнти зміщення вибирають зі спеціально складених таблиць, графіків, за допомогою рекомендацій ISO* або розраховують за номограмами.

Найбільш зручним та універсальним методом вибору коефіцієнтів зміщення є визначення коефіцієнтів зміщення за допомогою блокуючих контурів. Сукупність ліній в системі координат x_1 та x_2 , що обмежують зону допустимих значень коефіцієнтів зміщення для передачі з заданими числами зубців z_1 та z_2 , називають блокуючим контуром (рис. 9.12).

При призначенні коефіцієнтів зміщення x_1 та x_2 для будь-якої передачі повинні бути виконані такі три умови:

- відсутність підрізання зубців;
- відсутність загострення зубців;
- неперервність зачеплення, тобто коефіцієнт перекриття має бути не менше граничного значення.

Перша умова виконується, якщо коефіцієнти зміщення x більші за свій мінімальний рівень $x_{\min}$. Друга та третя умова обмежують коефіцієнти зміщення верхню межею $x'_{\max}$ та $x''_{\max}$. Ці межі неоднакові і для розрахунку зубчастої передачі важливий той $x_{\max}$, який має менше значення. Таким чином, коефіцієнти зміщення x треба призначати так, щоб виконувались співвідношення $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$. Для ряду передач з певним числом зубців z_1 та z_2 в координатах x_1 та x_2 побудовані області допустимих значень коефіцієнтів зміщень. Ці області обмежені лініями $x_{\min 1}$, $x_{\min 2}$, $x'_{\max 1}$, $x'_{\max 2}$, $x''_{\max 1}$, $x''_{\max 2}$, що складають так звані блокуючі контури. Внутрішня зона блокуючого контуру – зона рекомендованих значень коефіцієнтів зміщення. Для оптимального підбору коефіцієнтів зміщення у середині блокуючого контуру зображені лінії, що відповідають конкретним значенням якісних показників зачеплення.

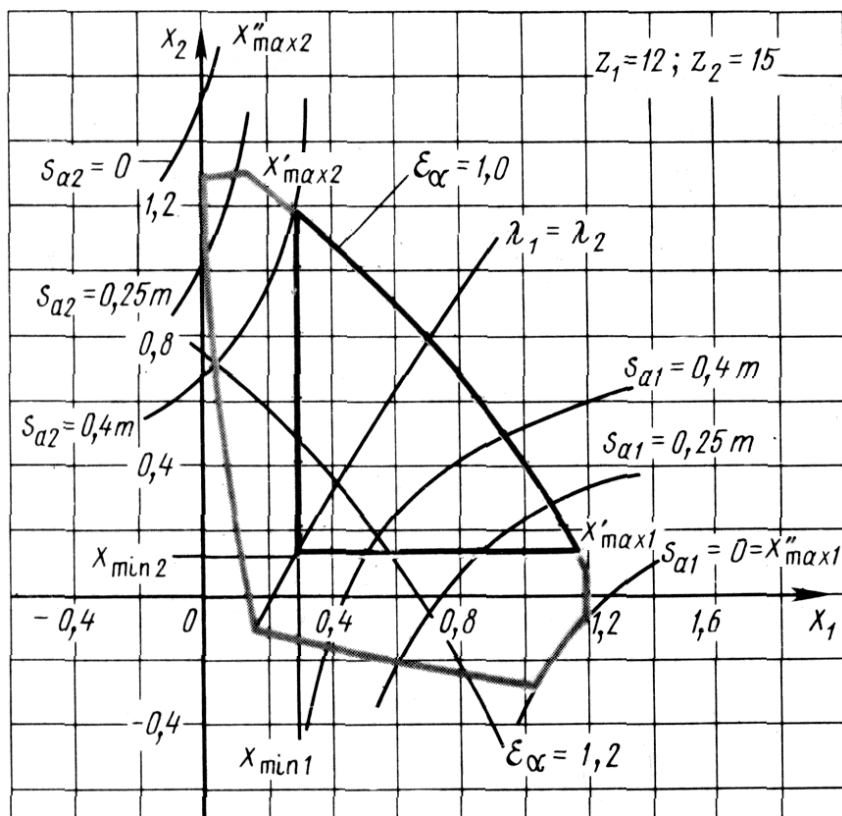


Рис. 9.12

У вказаних межах, коефіцієнти зміщення треба призначати так, щоб залежні від них якісні показники передачі мали б оптимальне значення. При цьому треба враховувати конкретні умови роботи передачі: швидкохідність, характер навантаження, наявність та відсутність закритої масляної ванни, матеріалів шестерні та колеса, вид їх термообробки та інше.

Отже, задача вибору коефіцієнтів зміщення розв'язується як задача оптимізації двох параметрів x_1 та x_2 по декількох критеріях, залежно від конкретних вимог до проектного зубчастого зачеплення.

9.10. Особливості евольвентної передачі внутрішнього зачеплення

Внутрішнє зубчасте зачеплення, як і зовнішнє, задовільняє основній теоремі зачеплення

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{z_2}{z_1},$$

але для нього початкові кола розміщені одне всередині іншого, точка їх дотику – полюс зачеплення P знаходиться на продовженні міжосьової лінії O_1O_2 коліс поза межами відрізка O_1O_2 (рис. 9.13); ланки 1 та 2 обертаються у одному напрямі і передатне відношення u_{12} має додатній знак.

Евольвентні профілі зубців, як і у випадку зовнішнього зачеплення, будують шляхом перекочування твірної прямої $y-y$ по основному колу. При цьому зубці шестерні нічим не відрізняються від зубців шестерні зовнішнього зачеплення, у той час як профілі зубців колеса не опуклі, а ввігнуті. Саме ж колесо має форму кільця, вершини зубців якого напрямлені до центру. Отже, радіус кола вершин менший за радіус кола западин.

Основні геометричні розміри внутрішнього евольвентного зачеплення розраховують за формулами, аналогічними тим, за якими обраховують зовнішнє зачеплення.

Виготовляються зубчасті колеса з внутрішніми зубцями довбачем на зубодовбальних верстатах (рейковим інструментом нарізувати такі колеса неможливо). Відмітимо, що внутрішнє зачеплення дуже чутливе до всілякого роду інтерференцій (заклинюванням у зачепленні та зрізам (підрізам) при нарізуванні зубців). При виготовленні коліс довбачем може відбуватися не лише підрізання ніжки зубців чи загострення їх вершин, але й зрізання зубців біля вершин. Ці явища мають бути врахованими при проектуванні внутрішнього зачеплення. Так, наприклад, при малій різниці зубців коліс стає ймовірною інтерференція (накладання) зубців, тому мінімальна різниця зубців повинна бути не меншою за вісім, $z_2 - z_1 \geq 8$.

Перевагами внутрішнього зачеплення є: компактність, менші габарити; більші коефіцієнти перекриття; менший питомий тиск і, відповідно, зношення; більша навантажувальна здатність, оскільки відбувається взаємодія ввігнутого профілю колеса з опуклим профілем шестерні; радіуси кривини обох профілів напрямлені в одну сторону, що зменшує питомий тиск

$$g = m \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right); \text{ менша швидкість ковзання і, відповідно, менше зношення}$$

профілів та вищий ККД (оскільки швидкість ковзання пропорційна різниці абсолютних значень кутових швидкостей коліс, $v_s = PK(\omega_2 - \omega_1)$).

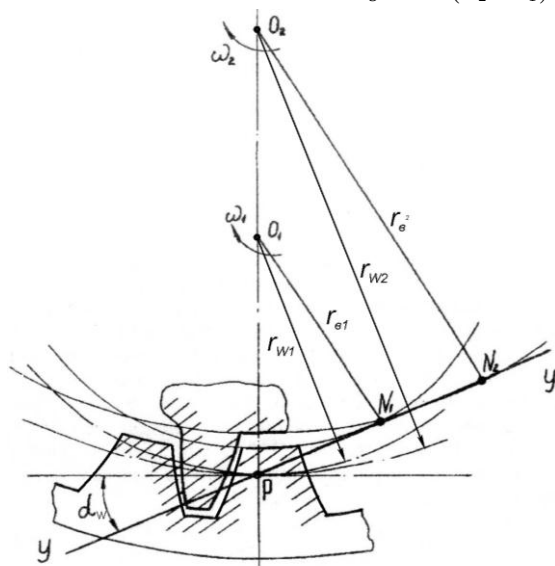


Рис. 9.13

Недоліки передач: низька продуктивність виготовлення колеса, більша складність та вартість передач; вали коліс консольні; неможливість отримати передатне відношення близьке до одиниці.

9.11. Особливості геометрії косозубих циліндричних передач

Зачеплення циліндричних прямозубих коліс має низку недоліків. Це, перш за все, невеликий коефіцієнт перекриття (для зовнішнього зачеплення $\varepsilon_\alpha < 1,98$). Внаслідок цього все навантаження, незалежно від кількості зубців коліс, розподіляється не більше ніж на дві пари зубців. Контакт зубців у прямозубих передачах відбувається по прямих лініях, паралельних осям

обертання коліс, причому зубці одночасно по всій своїй ширині входять у зачеплення й одночасно по всій ширині виходять з нього. Отже, навантаження (перехід зачеплення) з зубця на зубець передається миттєво і, як наслідок, супроводжується ударом і шумом. Плавність роботи у прямозубих передач порівняно невелика. Картина зачеплення у будь-якій площині, перпендикулярній до осі обертання коліс, повністю однакова за геометрією та часом. Якщо при виготовленні зубчастих коліс, як це завжди має місце, були допущені якісь похибки (наприклад, неточність профілю, несталість кроку та ін.), то умови роботи передачі істотно погіршуються.

Особливістю геометрії косозубих зубчастих коліс є, перш за все те, що зубці розташовані на циліндрах обох коліс по гвинтових лініях. Якщо ці циліндри розгорнути на площині, то косі зубці (у розгортці) виявляться розміщеними на похилих паралельних прямих (рис. 9.14).

У площинах, перпендикулярних до осі колеса, зачеплення відбувається так само, як і у прямозубих зубчастих колесах, але у кожній з площин у зачепленні задіяні різні точки профілю. Зачеплення у всіх перетинах відбувається не синхронно у часі. Контакт пари зубців починається з точки на одному з торців коліс, плавно в міру їх повороту переходить у лінію, що розповсюджується на всю товщину зубця, а потім, так само плавно, зменшується до точки на протилежному торці та зникає. Отже, зубці поступово входять і поступово виходять із зачеплення. Все це сприяє більшій плавності, швидкохідності, безшумності, навантажувальній здатності, меншій чутливості зубців до похибок монтажу і виготовлення.

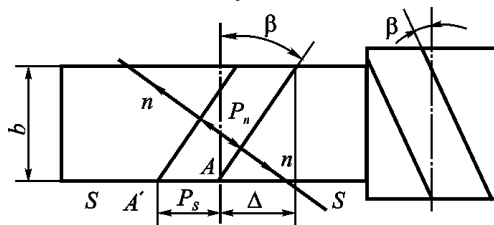


Рис. 9.14

У косозубій передачі зубці розташовані під деяким кутом β до твірної циліндра зубчастих коліс і з торцем колеса створюють непряий кут. Два спряжені колеса повинні мати рівні кути нахилу зубців. При зовнішньому зачепленні гвинтова лінія нахилу зубця на одному колесі повинна бути правою, а на іншому лівою ($\beta_1 = -\beta_2$).

У передачі розрізняють два кроки: p_t – торцевий, p_n – нормальний і, відповідно, два модулі m_t , m_n

$$m_t = \frac{p_t}{\pi}, \quad m_n = \frac{p_n}{\pi},$$

між ними існує очевидний зв'язок $m_n = m_t \cdot \cos \beta$.

Стандартним модулем є нормальний модуль, оскільки нарізання зубців косозубих коліс може бути виконано стандартним рейковим інструментом, встановленим під кутом β до осі заготовки.

Формулу для визначення коефіцієнта перекриття косозубого зачеплення, згідно з рис. 9.14, можна подати у вигляді

$$\varepsilon = \varepsilon_{np} + \frac{\Delta}{p_s} = \varepsilon_{np} + \frac{btg\beta}{p_s}.$$

Отже, коефіцієнт перекриття більший на величину $btg\beta/p_s$, ніж коефіцієнт перекриття у прямозубого зачеплення. Таким чином, збільшуючи кут нахилу гвинтової лінії β та ширину колеса, можна підвищити коефіцієнт перекриття.

На практиці трапляються косозубі передачі з коефіцієнтом перекриття порядку восьми, десяти. Отже, у косозубих колесах одночасно у зачепленні може знаходитися 8 – 10 пар зубців (а не одна чи дві пари, як у прямозубих). Це збільшує плавність роботи передач, навантажувальну здатність.

Косозубі колеса широко застосовуються для передач, що працюють при високих швидкостях та передають великі потужності.

Однією з переваг косозубого зачеплення є також можливість проектування меншої за габаритами передачі. Так, мінімальне число зубців шестерні за умови не підрізування їх інструментальною рейкою є

$$z_{\min} = \frac{2h_a^* \cos \beta}{\sin^2 \alpha_t}, \quad \alpha_t > \alpha = 20^\circ. \quad \text{Якщо кут } \beta = 10^\circ, \alpha_t = 22^\circ 47', \text{ то}$$

$z_{\min} = 14$, що значно менше, ніж для прямозубої передачі.

Поряд із перевагами косозубі колеса мають істотний недолік. Оскільки в таких колесах нормальна реакція зубців спрямована похило до осі колеса, то виникає осьове зусилля. При збільшенні кута β осьова складова зусилля зростає, тому в більшості передач кут β не перевищує 35° (частіше $8...15^\circ$).

Наявність осьового зусилля ускладнює конструкцію передачі. Для його сприймання треба встановлювати упорні підшипники. Це призводить до додаткових втрат на тертя. Для усунення вказаного недоліку застосовують шевронні колеса.

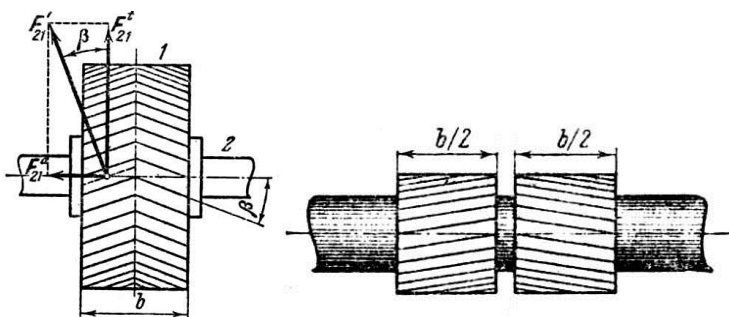


Рис. 9.15

Шевронне зубчасте колесо складається ніби з двох косозубих коліс, сумішених торцями так, щоб зубці мали протилежний нахил (рис. 9.16). У таких колесах осьові зусилля взаємно зрівноважуються. Це дозволяє збільшити кут β до $25^\circ \dots 40^\circ$, що підвищує плавність роботи передачі. Шевронні колеса застосовують у потужних швидкохідних закритих передачах. Необхідно відмітити, що виготовлення шевронних коліс є значно складнішим та дорожчим.

9.12. Просторові зубчасті передачі

До просторових зубчастих механізмів належать конічні та гіперболоїдні передачі (гвинтові, черв'ячні, гіпоїдні).

Конічні зубчасті передачі. Конічні зубчасті колеса застосовують для передачі обертального руху між валами, осі яких перетинаються під деяким кутом Σ . Кут Σ може бути довільним, але на практиці найчастіше трапляються конічні передачі з кутом $\Sigma = 90^\circ$. Такі передачі називаються ортогональними. Конічні передачі складніші за циліндричні у виготовленні та монтажі. Для нарізування коліс необхідні спеціальні верстати та інструмент, а при монтажі необхідно забезпечити збіг вершин конусів з точкою перетину осей валів. Оскільки осі валів конічної передачі перетинаються, то виникають труднощі з розміщенням опор валів. В більшості випадків одне з конічних коліс розміщують консольно на валу. При цьому збільшується нерівномірність розподілу навантаження по довжині зубців. Осьові зусилля, що виникають у передачі, викликають необхідність застосування більш складних опор (встановлення упорних або радіально упорних підшипників). Несуча здатність конічної зубчастої передачі суттєво нижча від циліндричної з порівняльними розмірами і становить близько 85%. ККД конічної зубчастої передачі становить $0,95 \dots 0,96$, що також нижче ККД циліндричної передачі

наближено на 1%. Передатне число приводних конічних передач значно менше, ніж у циліндричних передачах.

Незважаючи на вказані недоліки, конічні передачі застосовуються досить широко, оскільки умови розміщення елементів машин і механізмів, вимагають розміщення валів під кутом один до одного. Конічну зубчасту передачу можна уявити собі як передачу з двома конічними котками, на поверхні яких для усунення проковзування нарізані зубці (рис. 9.17).

Аналогічно до початкових циліндрів циліндричної передачі в конічній передачі розглядають початкові конуси (аксоїдні поверхні), які дотикаються один до одного по спільній твірній і перекочуються один по одному без ковзання. Для виконання останньої умови ці конуси повинні мати спільну вершину, яка знаходиться у точці перетину осей коліс. Рух конусів відбувається навколо миттєвої осі обертання (рис. 9.17, вісь OK).

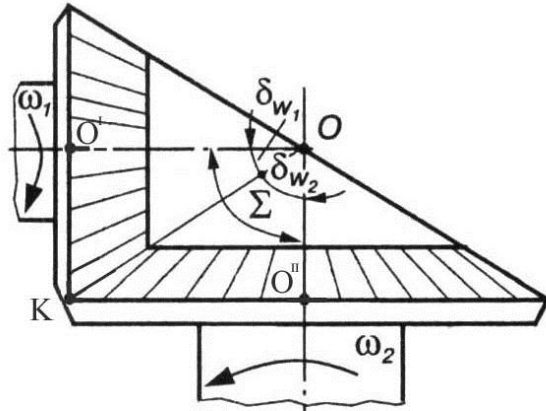


Рис. 9.17

Отже, для конічних зубчастих коліс геометричним параметром також є δ_w – кут початкового конуса. Крім того, розрізняють кути ділільних конусів, які є базовими для визначення елементів зубців та їх розмірів, кути конусів вершин, западин, основних конусів. Відмітимо, що на практиці найчастіше використовуються конічні передачі без зміщення, для яких початкові та ділільні конуси збігаються ($\delta_{w_1} = \delta$, $\delta_{w_2} = \delta$).

Зубці конічних коліс мають різні розміри по своїй довжині, а тому крок, модуль й інші параметри зубців у різних перетинах мають різні значення. Вони зменшуються з наближенням до вершин початкових конусів. Отже, модуль зубців конічних коліс не є постійним у різних перерізах. За стандартний беруть модуль у зовнішньому нормальному перерізі зубця.

У практиці машинобудування використовують зубчасті конічні колеса, що відрізняються формою лінії зубців на розгортці ділильного конуса: прямі, тангенціальні (лінія зубців напрямлена по дотичній до деякого додаткового кола радіуса r і утворює з твірною кут β) (рис. 9.18, а), кругові (рис. 9.18, б). Прямозубі передачі використовуються у випадку порівняно невисоких колових швидкостей – до $3 м/с$ (деколи – до $8 м/с$); з тангенціальними зубцями – до $15 м/с$; з круговими – до $30 м/с$.

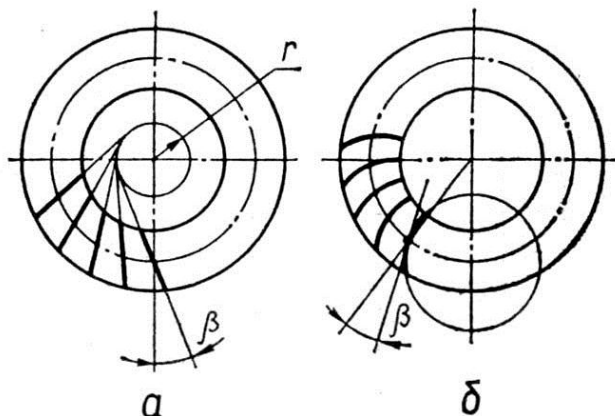


Рис. 9.18

Передатне відношення конічної передачі визначається з припущення, що початкові конуси котяться один по одному без ковзання. Отже, для будь-якої точки дотику конусів K згідно з рис. 9.17 можна записати

$$V_{K_1} = V_{K_2} = \omega_1 KO' = \omega_2 KO'', \text{ тоді}$$

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{KO''}{KO'} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (r_w = r = mz/2).$$

Розглядаючи $\triangle OKO'$ і $\triangle OKO''$, знаходимо

$$u_{12} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = \frac{\sin \delta_{w_2}}{\sin \delta_{w_1}} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}.$$

Для ортогональних конічних передач залежність має вигляд

$$u_{12} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = \operatorname{tg} \delta_2 = \operatorname{ctg} \delta_1.$$

Бічну поверхню зубців можна отримати, якщо площину Π (рис. 9.19) перекочувати без ковзання по основному конусу. Будь-яка пряма KL на площині Π опише у просторі конічну евольвентну поверхню, а кожна точка (оскільки вона рівновіддалена від вершини конуса O) опише траєкторію, що розміщена на сфері певного радіуса і яка називається сферичною евольвентою.

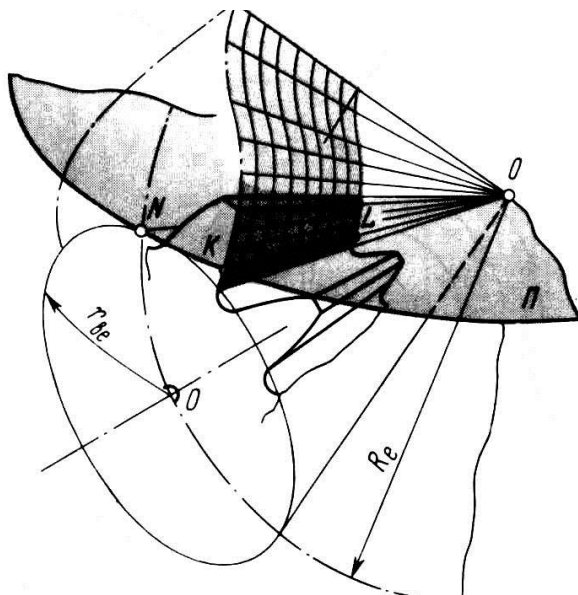


Рис. 9.19

У кожному сферичному перерізі можна виділити свою сферичну евольвенту. Отже, профілі зубців спряжених конічних коліс треба будувати на сферичних поверхнях з центром у т. O . Практичне проектування зубців у цьому випадку буде викликати великі труднощі, оскільки сфера не розгортається на площину. На практиці при побудові профілів зубців сферичні поверхні заміняють конічними, точна розгортка яких легко будується на площині.

Отже, побудова профілю конічного зубчастого колеса зводиться до побудови профілю прямозубого циліндричного колеса на поверхні додаткового конуса.

Суть наближеного методу профілювання на додаткових конусах така: торцеві поверхні зубців, розміщених між колами головок і ніжок, створюють сферичні пояси невеликої ширини, порівняно з радіусом сфери, на яких вони розміщені. Отже, з незначною похибкою сферичні пояси можна замінити

конічними, що лежать на додаткових конусах.

Додатковим конусом є конічна поверхня з тією ж віссю, твірна якої перпендикулярна до твірної основного конуса (рис. 9.20). Якщо тепер додаткові конуси розгорнути на площину, то профілі зубців стають плоскими кривими, близькими до звичайних евольвент. В результаті отримуємо два *еквівалентних* циліндричних колеса.

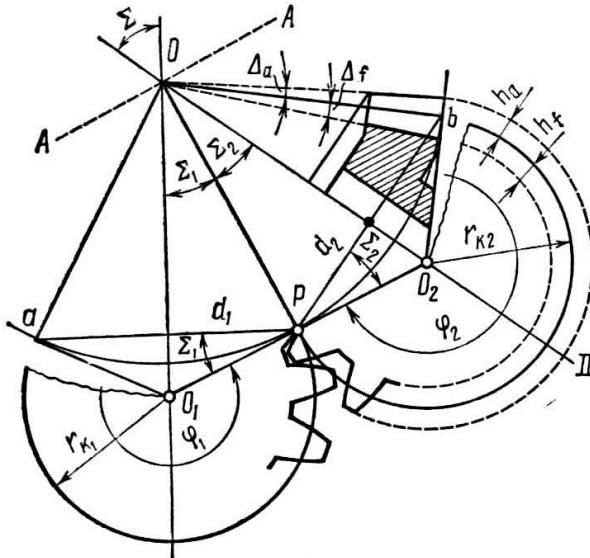


Рис. 9.20

Для побудови розгортки поверхонь додаткових конусів через точку P проводимо лінію, перпендикулярну до твірної початкових конусів PO до перетину з осьовими лініями зубчастих коліс. В результаті одержуємо точки O_1 і O_2 , які приймаємо за центри обертання еквівалентних коліс. Відрізки PO_1 і PO_2 будуть радіусами початкових кіл еквівалентних коліс. Приймавши для цих циліндричних зубчастих коліс модуль та висоту зубця як у конічного колеса у відповідному перетині, будемо профілі еквівалентних коліс.

Переваги конічного зачеплення:

- більший коефіцієнт перекриття, ніж у циліндричного з таким самим числом зубців коліс (оскільки відповідає циліндричному еквівалентному колесу з більшим числом зубців);
- має менше, порівняно з циліндричним, мінімальне число зубців, які можна нарізувати без підрізання.

Недоліки:

- оскільки профіль зубців змінний за величиною, то кіничне зачеплення досить чутливе до неточностей монтажу і до деформації елементів передачі;
- передатне число не перевищує 4;
- менша навантажувальна здатність та зносостійкість передачі; наявність осьових зусиль.

Гіперболоїдні зубчасті передачі. Якщо у циліндричних і кіничних передачах початковими поверхнями були, відповідно, циліндри та конуси, то для передачі руху між перехресними осями початковими поверхнями мають бути поверхні другого порядку, наприклад гіперболоїди. Останні можна отримати, якщо обертати гіперболу, що лежить в площині yz навколо осі Oz (або, якщо взяти два кільця, з'єднаних спицями, і дещо повернути одне відносно одного). Відносний рух ланок – це обертання навколо й ковзання вздовж миттєвої осі.

Таким чином, у зубчастих передачах з перехресними осями спостерігається подвійне ковзання: вздовж гвинтових ліній зубців і додаткове – вздовж профілів зубців як у циліндричних і кіничних передачах.

Відмітимо, що швидкість основного ковзання значно більша від швидкості додаткового.

У гвинтових та гіпоїдних зубчастих передачах початкові поверхні коліс утворюються окремими частинами поверхонь гіперболоїдів обертання 1 і 2 (рис. 9.21), які дотикаються між собою. Для отримання зубчастих коліс поверхню гіперболоїдів обладнують зубцями. При цьому достатньо зубці розташувати на вузькій ділянці поверхні.

Відмітимо, що швидкість відносного ковзання різко зменшується від горловини до периферії гіперболоїдів.

Якщо за початкові поверхні зубчастих коліс вибрати віддалені від горловини поверхні гіперболоїдів і замінити їх бічними поверхнями зрізаних конусів, то одержимо *гіпоїдну* передачу.

Якщо за початкові поверхні вибрати ділянки біля горловини гіперболоїдів, то вийде *гвинтова* зубчаста передача. Для спрощення виготовлення зубчастих коліс поверхні горловин гіперболоїдів замінюють циліндричними поверхнями. За такої заміни зубці коліс контактують у точці, а колеса, що утворюють такі передачі, повинні бути косозубими циліндричними.

Окремим випадком гвинтової передачі, в якій кут між мимобіжними осями коліс дорівнює 90° , є *черв'ячна* передача.

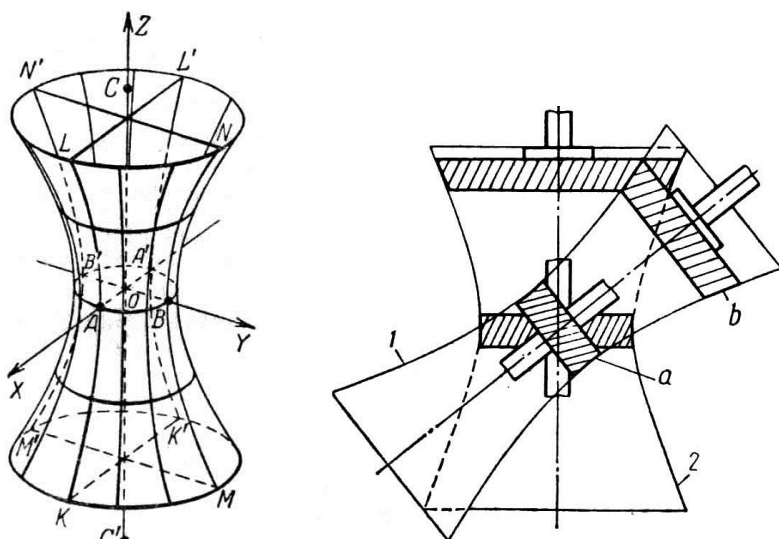


Рис. 9.21

Гвинтові зубчасті передачі. Для передачі обертального руху між мимобіжними валами при малих потужностях застосовують гвинтові зубчасті передачі.

Гвинтова зубчаста передача складається з двох циліндричних косозубих коліс, осі яких перехрещуються під довільним кутом Σ . Переважне використання мають передачі з кутом 90° між осями валів. На відміну від косозубих, для гвинтових циліндричних коліс не є обов'язковим рівність кутів нахилу гвинтових ліній та протилежність їх напрямків. При цьому має справджуватись рівність $\beta_1 + \beta_2 = \Sigma$.

Поверхні початкових циліндрів коліс доторкаються в точці. Гвинтове колесо можна розглянути, як короткий багатозахідний гвинт, у якого число зубців дорівнює числу заходів.

На рис. 9.22 наведений план швидкостей для коліс 1 та 2, що обертаються з кутовими швидкостями ω_1 та ω_2 . З рівності нормальних складових V_n колових швидкостей у точці дотику початкових циліндрів справедливим є вираз:

$$V_n = \omega_1 r_1 \cos \beta_1 = \omega_2 r_2 \cos \beta_2.$$

Отже,

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r \cos \beta_2}{r \cos \beta_1},$$

де β_1, β_2 – кути нахилу ліній зубців коліс.

Косозубі колеса, що перебувають у зачепленні, мають однаковий нормальний крок. Отже, $p_{t_1} \cos \beta_1 = p_{t_2} \cos \beta_2$. Оскільки $\pi d_1 = z_1 p_{t_1}$; $\pi d_2 = z_2 p_{t_1}$. Маємо $u_{12} = z_2 / z_1$.

З наведених формул випливає, що передатне відношення в гвинтових передачах залежить не лише від радіусів початкових циліндрів, а й від кутів нахилу зубців β_1, β_2 . Отже, одне і те ж передатне відношення може бути отримане комбінуванням радіусів початкових кіл та кутів нахилу ліній зубців.

Розрахунок зубчастих коліс гвинтових передач виконується аналогічно розрахунку косозубих циліндричних коліс з тією лише різницею, що кожне з зубчастих коліс може мати свій кут нахилу зубців. За розрахунковий модуль використовують модуль зубців у нормальному перерізі.

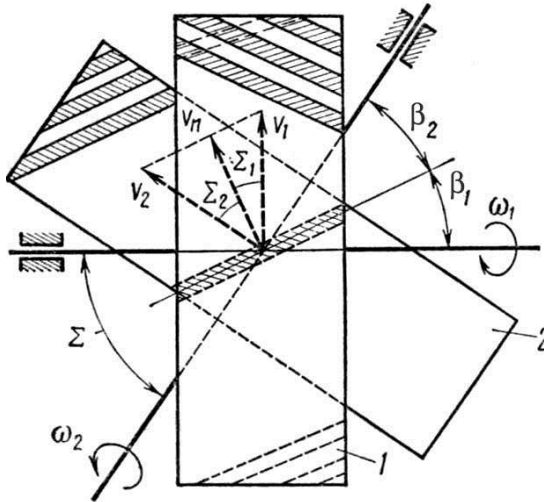


Рис. 9.22

Недоліками передачі є: значне ковзання у зачепленні зубців; точковий контакт зубців і, отже, значні контактні напруження; несприятливі умови змащення зубчастого зачеплення. Через те гвинтові передачі використовують лише при невеликих швидкостях і незначних потужностях.

Гіпоїдні передачі. У гіпоїдних передачах за початкові поверхні вибирають розширені частини гіперболоїдів. Для спрощення виготовлення таких зубчастих коліс ці частини гіперболоїдів замінюють зрізаними конусами. Але, на відміну від конічних передач, вісь малого колеса зміщена відносно осі більшого колеса на деяку величину (рис. 9.23). Отже, вершини конусів не перетинаються – вони перехрещуються переважно під кутом 90° .

Оскільки вали гіпоїдної передачі можна виводити по обидва боки за її межі, виключається консольне навантаження валів, що істотно підвищує несучу здатність передачі порівняно з конічною.

На відміну від гвинтових передач, гіпоїдні можуть бути виконані з лінійним контактом зубців, що також підвищує несучу здатність передачі. Швидкості ковзання профілів у гіпоїдних передачах менші, ніж у гвинтових.

Передатне відношення гіпоїдних передач визначається за такою самою формулою, як і гвинтових:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{d_2 \cos \beta_k}{d_1 \cos \beta_{ш}}.$$

Передатне число більшості гіпоїдних передач не перевищує $u_{12} = 10$, але іноді сягає 30 і більше.

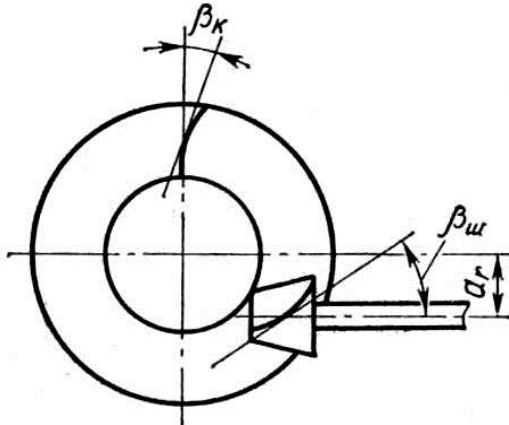


Рис. 9.23

Гіпоїдні колеса широко застосовуються для привода ведучих коліс транспортних машин; а гіпоїдну передачу часто застосовують замість конічної для передачі більших потужностей. Значне ковзання у процесі зачеплення зумовлює необхідність застосування у силових механізмах протизадирних мастильних матеріалів (гіпоїдних масил).

Черв'ячні передачі. Для передачі руху між мимобіжними осями досить широкого поширення набули черв'ячні передачі, які є різновидом гвинтових. Якщо збільшувати на одному з зубчастих коліс кут нахилу зубців, то можна отримати колесо з малим числом зубців (навіть з одним), які огинатимуть початкове коло кілька разів. У результаті отримуємо зубчасте колесо, яке має форму гвинта з декількома витками, заходами (зуб відрізняється від звичайного гвинта лише формою профілю). Таке зубчасте колесо з малою кількістю зубців (переважно одним, двома, чотирма)

називають черв'ячним. При цьому спряжене з ним ведене зубчасте колесо (колесо з малим кутом нахилу зубців) називається черв'ячним.

У переважній більшості випадків використовуються ортогональні черв'ячні передачі ($\Sigma = 90^\circ$). Черв'ячна передача з точковим контактом зубців має ті самі недоліки, що й звичайна гвинтова передача, тому вона практично не застосовується.

Проте існують черв'ячні передачі з лінійним контактом зубців, що дає змогу передавати значні навантаження. Лінійного контакту досягають завдяки тому, що зубцям колеса надають форми гайки, яка охоплює черв'як на деякому куті, а черв'ячне колесо нарізають черв'ячною фрезою, яка є точною копією черв'яка, що входить у зачеплення з колесом.

Переріз черв'яка площиною, перпендикулярною до осі, матиме вигляд рейки, а передача нагадуватиме зачеплення зубчастого колеса з рейкою.

Передатне число черв'ячної передачі дорівнює відношенню числа зубців колеса до числа заходів черв'яка:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_k}{z_q},$$

де z_k – число зубців черв'ячного колеса; z_q – число заходів черв'яка.

Зазвичай ведучою ланкою є черв'як.

За модулем черв'ячної передачі можна знайти основні розміри черв'ячного колеса та черв'яка. Торцевий модуль черв'ячного колеса, що є осьовим модулем черв'яка, приймають стандартним і беруть з нормального ряду.

Число зубців колеса є значно більшим за число заходів черв'яка, а тому в черв'ячних передачах можуть бути значні передатні числа. Так, при числі зубців колеса $z_k = 80$ і числі заходів черв'яка $z_q = 1$ передатне число $u_{12} = 80$.

Перевагами черв'ячної передачі є:

- можливість одержання великих передатних чисел (до 300 і більше);
- плавність зачеплення і безшумність роботи;
- можливість самогальмування, хоч і при низькому К.К.Д.;
- можливість передачі значних потужностей, хоч і при нижчому К.К.Д.

порівняно з циліндричною передачею.

Черв'ячна передача має такі недоліки:

- відносно великі втрати потужності на тертя при зачепленні зубців і, як наслідок, нагрівання передачі та невисокий К.К.Д.;
- складність нарізування;
- чутливість до неточностей виготовлення та монтажу;
- необхідність ретельного змашування поверхонь зубців;
- її порівняно висока вартість.

Складні зубчасті механізми. Це механізми, до яких входять більше, ніж два зубчасті колеса. Складні механізми передач крім, ведучої та веденої ланок, мають проміжні ланки, що обертаються навколо своїх осей.

Складні зубчасті механізми поділяються на механізми передач з нерухожими та рухомими осями коліс. Розглянемо перші.

Складні механізми передач з нерухожими осями можна поділити на окремі ступені, кожна з яких являє собою дві рухомі ланки, що утворюють вищу пару; крім того, вони утворюють зі стояком ще й нижчі пари. Таким чином, бувають прості – одно-, і складні – багатоступінчасті зубчасті передачі; в більшості випадків двох- або трьохступінчасті.

Застосування складних ступінчастих механізмів обумовлене:

- великими передатними відношеннями;
- розміщенням осей вхідної та вихідної ланок на значній відстані одна від одної (при 2-х ланках механізми передач мали б дуже великі габарити);
- потребою змінити знак передатного відношення.

Рядове послідовне зачеплення зубчастих коліс. Ступінчаста зубчаста передача. Серії коліс, в яких осі обертання нерухомі, називають рядовим з'єднанням зубчастих коліс.

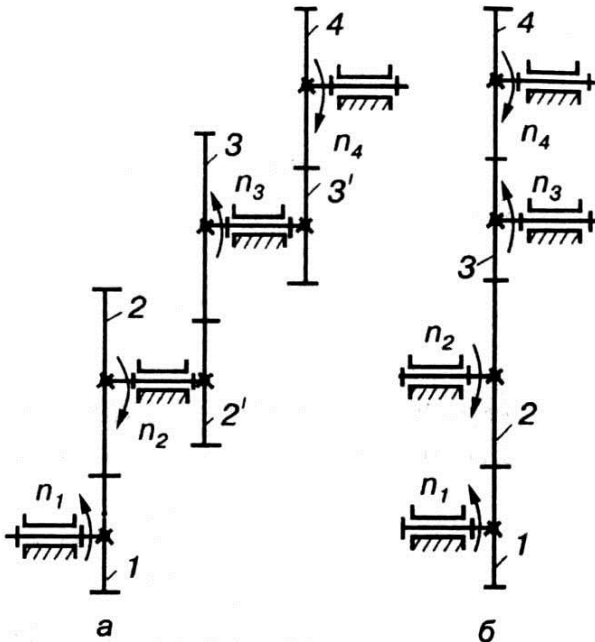


Рис. 9.24

Якщо за умовами роботи передачі необхідно мати велике передатне відношення, то передача руху від ведучого вала до веденого здійснюється за допомогою кількох проміжних зубчастих зачеплень. На кожному проміжному валу закріплюються по два зубчастих колеса, з яких одне ведуче,

а інше – ведене; одне входить у зачеплення з колесом на попередньому валі, друге – на наступному. У такій передачі кожний проміжний вал з'єднується з попереднім і наступним парою коліс. Таким чином, на першому ведучому валі буде закріплено одне колесо. На кожному з проміжних валів – по два колеса і на останньому веденому – одне колесо.

Таке з'єднання зубчастих коліс, вали яких обертаються у нерухомих підшипниках, називається ступінчастою зубчастою передачею.

Передатне відношення кожної пари зубчастих коліс

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, u_{2'3} = \frac{\omega_2}{\omega_3}, u_{3'4} = \frac{\omega_3}{\omega_4}, u_{4'5} = \frac{\omega_4}{\omega_5}.$$

Перемножимо праві і ліві частини цих виразів

$$u_{12}u_{2'3}u_{3'4}u_{4'5} = \frac{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}{\omega_2\omega_3\omega_4\omega_5} = \frac{\omega_1}{\omega_5} = u_{15}$$

звідки матимемо

$$u_{15} = u_{12}u_{2'3}u_{3'4}u_{4'5}.$$

Отже, загальне передатне відношення ступінчастого ряду зубчастих коліс дорівнює добутку окремих передатних відношень простих зубчастих механізмів, що входять до його складу, взятих зі своїми знаками.

Оскільки

$$u_{12} = \pm \frac{z_2}{z_1}; u_{2'3} = \pm \frac{z_3}{z_{2'}}; u_{3'4} = \pm \frac{z_4}{z_{3'}}; u_{4'5} = \pm \frac{z_5}{z_{4'}},$$

одержимо

$$u_{15} = (-1)^m \frac{z_2 z_3 z_4 z_5}{z_1 z_{2'} z_{3'} z_{4'}},$$

де m – число зовнішніх зачеплень, на рис. 24 – $m = 4$.

Таким чином, знак загального передатного відношення ступінчастого ряду залежить від кількості зовнішніх зачеплень: парне число зовнішніх зачеплень відповідає знаку “плюс”, непарне – знаку “мінус”. Число внутрішніх зачеплень на знак загального передаточного числа не впливає.

Напрямок обертання будь-якого колеса передачі можна визначити також за правилом, відомим під назвою *правила стрілок*. Напрямок обертання коліс показано стрілкою (у бік руху зубців, які видно спостерігачеві). Наприклад, стрілка на колесі z_1 показує, що його зубці рухаються зверху вниз.

Таким чином, передаточне відношення $(n-1)$ ступінчастої передачі буде:

$$u_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = u_{12}u_{2'3}u_{3'4}\dots u_{(n-1)'n} = \frac{z_2z_3z_4\dots z_n}{z_1z_2'z_3'\dots z_{(n-1)'}}(-1)^m.$$

Множник $(-1)^m$ дозволяє визначити знак передатного відношення складного зубчастого механізму.

Зубчасті механізми, в яких відбувається зменшення кутових швидкостей при передачі руху від ведучої до веденої ланки і які, як правило, вміщено у спеціальний корпус, називають *редуктором*. Зубчасті механізми, які збільшують кутову швидкість веденої ланки, називають *мультиплікатором*.

Рядове зачеплення з паразитними колесами. Рядове зачеплення з паразитними колесами характеризується тим, що на кожному з проміжних валів розміщено лише одне колесо.

Для здійснення передачі руху між валами, які розміщені на великій відстані або, якщо потрібно, щоб ведений вал обертався в тому ж самому напрямі, що й ведучий, на проміжних валах закріплюють по одному колесу, які не впливають на передатне відношення. Ці колеса називаються паразитними, а весь ряд – паразитним

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = u_{12}u_{23}u_{34} = -\frac{z_2z_3z_4}{z_1z_2z_3} = -\frac{z_4}{z_1}.$$

Таким чином, число зубців паразитних коліс не впливає на абсолютну величину передатного відношення. Паразитні колеса впливають лише на його знак.

Проміжні колеса застосовують для передачі обертання з одного валу на інший при великій міжосьовій відстані, а також для зміни напрямку обертання веденого валу.

Число зубців проміжних коліс не впливає на абсолютну величину передатного відношення, але ці колеса витрачають на тертя певну потужність – тому проміжні колеса називаються паразитними.

9.13. Кінематичний аналіз диференціальних та планетарних механізмів

Зубчасті передачі з рухомими осями коліс. Епіциклічні передачі. У розглянутих зубчастих механізмах геометричні осі всіх коліс не змінюють свого положення у просторі. Можливі й такі зубчасті механізми, у яких геометричні осі одного чи кількох коліс переміщуються у просторі. До числа

таких зубчастих механізмів відносять так звані диференціальні та планетарні механізми. Деколи їх називають епіциклічними механізмами.

Епіциклічною передачею називають механізм, складений з зубчастих (фрикційних) коліс, одне або кілька з яких виконують складний обертальний рух, що складається з обертального руху навколо власної осі і разом з віссю – навколо зчепленого з ним зубчастого колеса (від слів “епіцикл” – коло, центр якого рівномірно рухається по іншому колу). Ці механізми можна поділити на планетарні механізми, що мають одну ступінь вільності і диференціальні механізми, що мають два й більше ступенів вільності.

Схему найпростішого диференціального механізму наведено на рис. 9.25: колеса 1 і 3 називають центральними, їхні осі O_1 , O_3 нерухомі. Колесо 2 з рухомою віссю O_2 називають планетарним або сателітом (колесо 2 обертається навколо власної осі і разом з віссю – навколо колеса 1). Ланку, на якій розміщено осі сателітів, називають водилом Н (інколи позначають літерою S). Наголосимо, що водило є рухомою ланкою.

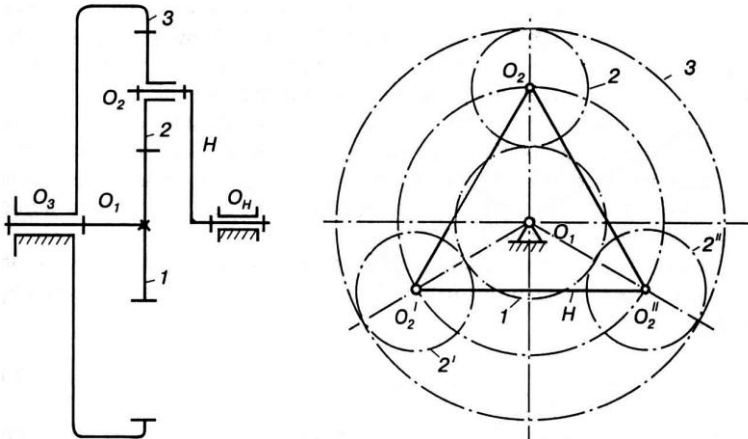


Рис. 9.25

Колеса, які обертаються навколо центральної геометричної осі, називають центральними. Причому, колесо, що має зубці зовнішнього зачеплення, прийнято називати – сонячним, а колесо з зубцями внутрішнього зачеплення – коронним.

Відмітимо, що у дійсного механізму є декілька симетрично розташованих сателітів. Їх встановлюють з метою зменшення габаритів механізму, зниження зусиль в зачепленні, розвантаження підшипників центральних коліс, покращення зрівноваження водила. Але у цьому випадку механізм має пасивні умови зв'язку ($q > 0$), тобто він є статично невизначеним. При кінематичних розрахунках враховується лише один

сателіт, оскільки інші є пасивними у кінематичному відношенні.

Кінематичне дослідження епіциклічних механізмів виконують за допомогою методу інверсії (обернення руху, зупинки). Застосувавши метод інверсії руху, умовно перетворимо диференціальний механізм в обернений механізм, тобто у звичайний зубчастий механізм з нерухомими осями. Механізм, який дістали в результаті застосування методу обернення руху, називають оберненим.

Ступінь рухомості диференціального механізму визначають за формулою П.Л. Чебишева.

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 2.$$

Епіциклічна передача, у якій обидва центральні колеса рухомі і ступінь рухомості якої дорівнює двом, називають *диференціальною*.

Отже, диференціальний механізм має два ступеня вільності, тобто для визначення руху всіх його ланок потрібно задати закон руху двом ланкам. Наприклад, задавши ω_1 і ω_2 , матимемо визначений рух водила – ω_H , або задавши ω_3 і ω_H , чи ω_1 і ω_H , визначимо ω_1 чи ω_3 .

У диференціальному механізмі може відбуватися або розкладання руху (від одного ведучого на два ведених), або складання руху. Таким чином, за допомогою диференціальної передачі можна на одному валі здійснити рух, що передається йому від двох незалежних двигунів.

Проведемо кінематичне дослідження диференціального зубчастого механізму аналітичним методом – виведемо формулу, що встановлює зв'язок між кутовими швидкостями ланок.

Нехай кутові швидкості ланок диференціального механізму ω_1 , ω_2 , ω_3 і ω_H . Застосуємо метод інверсії, суть якого полягає в тому, що всім ланкам вихідного механізму надається додатковий рух з кутовою швидкістю, що дорівнює за абсолютною величиною кутовій швидкості водила, але протилежно спрямованою. У результаті відносний рух ланок не зміниться, але в оберненому механізмі водило зупиниться і диференціальний механізм з рухомими осями перетвориться на рядову передачу з нерухомими осями, кутові швидкості якої набудуть значень

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= \omega_1 - \omega_H; \quad \omega'_2 = \omega_2 - \omega_H; \\ \omega'_3 &= \omega_3 - \omega_H; \quad \omega'_H = \omega_H - \omega_H = 0.\end{aligned}$$

Передатне відношення рядової зубчастої передачі можна знайти за формулою

$$u_{13}^{(H)} = \frac{\omega_1'}{\omega_3'} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_3}{z_1},$$

де верхній індекс, буква або цифра у дужках – (H) означає, що для наведеного випадку водило H – нерухоме (умовно зупинене), тобто передатне відношення визначене за умови нерухомого водила.

Це формула Віллїса, яка встановлює співвідношення між кутовими швидкостями ланок диференціального механізму. У цій формулі треба задати дві кутові швидкості, щоб визначити кутову швидкість третьої ланки. Оскільки відоме тільки передатне відношення $u_{13} = -z_3 / z_1$, маємо лише одне рівняння, а усі три кутові швидкості, що входять у формули, є невідомими.

Планетарні механізми. Закріпимо одне центральне колесо, наприклад 3 (рис. 9.25). Нерухоме центральне колесо називається опорним. У розглядуваному випадку ступінь рухомості епіциклічної передачі буде

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Епіциклічна передача, ступінь рухомості якої дорівнює одиниці й одне із центральних коліс якої закріплене, називається планетарною передачею.

Отже, кожний диференціальний механізм можливо перетворити у планетарний механізм, якщо закріпити одне з центральних коліс. І навпаки планетарний механізм, що має нерухоме колесо можливо перетворити у диференціал, якщо звільнити нерухоме (опорне) колесо і надати йому обертання.

Це так звана властивість оберненості планетарних механізмів, яка дозволяє застосовувати однакові методи дослідження та проектування для планетарних і диференціальних редукторів. При цьому кожному елементарному диференціалу буде відповідати два планетарних механізми.

Користуючись формулою Віллїса, визначимо зв'язок між кутовими швидкостями ланок планетарної передачі, тобто передатне відношення

$$u_{13}^{(H)} = \frac{\omega_1'}{\omega_3'} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{0 - \omega_H} = -\frac{\omega_1}{\omega_H} + 1 = -u_{1H}^{(3)} + 1,$$

звідки

$$u_{1H}^{(3)} = 1 - u_{13}^{(H)}.$$

Отже, передатне відношення планетарного механізму дорівнює різниці між одиницею та передатним відношенням оберненого механізму.

Ця формула справедлива для будь-якої схеми планетарного редуктора

за наявності нерухомого центрального колеса.

Передатне відношення $u_{ij}^{(H)}$ оберненого механізму вираховується від ведучого колеса до того колеса, яке у дійсному планетарному механізмі нерухоме.

Велике передатне відношення епіциклічних передач за малих їхніх габаритних розмірів порівняно з рядовим зачепленням, яке забезпечило б таке передатне відношення є суттєвою перевагою, що сприяла їх широкому розповсюдженню в металорізальних верстатах, літаках, транспортних машинах.

Синтез планетарних механізмів. Розв'язання задачі синтезу планетарних механізмів можна поділити на два етапи:

- вибір схеми планетарного механізму;
- вибір числа зубців механізму.

Вибір схеми планетарного механізму. В інженерній практиці отримали розповсюдження чотири схеми найпростіших планетарних механізмів, у яких сателіти зачіплюються одночасно з двома центральними колесами (рис. 9.26). Усі вони мають три основні вали, один з яких нерухомий. Почергове гальмування одного з валів дозволяє отримати у кожному механізмі на виході три різні швидкості. Передатне відношення усіх цих редукторів визначається за однією формулою. У загальному випадку вибір схеми можна виконати тільки детальним порівнянням різних варіантів.

Підбір чисел зубців коліс планетарних механізмів треба виконувати, щоб задовольнялись умови співвісності, сусідства та складання. Спроекований механізм має бути компактним і забезпечувати задане передатне відношення.

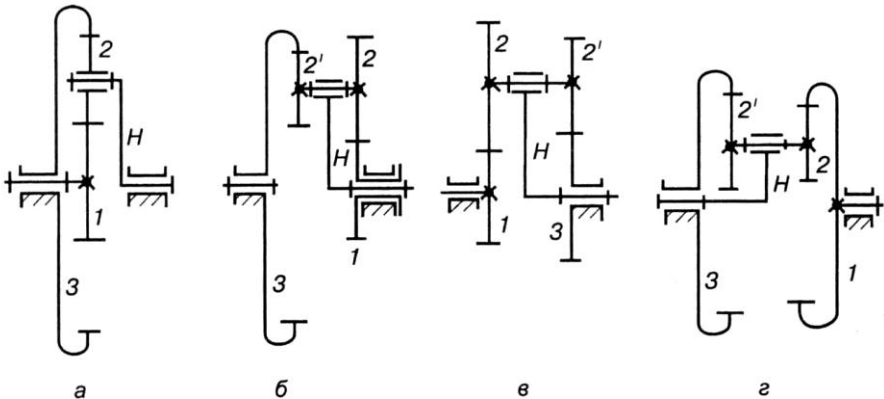


Рис. 9.26

Умова співвісності полягає в тому, щоб геометричні осі ведучого та

веденого валів збігалися.

Умова сусідства полягає в тому, щоб кола виступів сателітів не торкалися і не перетиналися.

Умова складання вимагає, щоб зуби кожного сателіта ввійшли в зачеплення з обома центральними колесами.

Питання для самоконтролю

1. Як класифікують прості зубчасті механізми?
2. Сформулюйте основну теорему зачеплення.
3. Чим відрізняється планетарний зубчастий механізм від диференціального?
4. Які переваги евольвентного зачеплення.
5. Назвіть якісні показники зубчастої передачі.
6. Назвіть основні геометричні параметри евольвентних зубчастих передач.
7. Які існують способи нарізання зубчастих коліс?
8. Властивості та рівняння евольвенти кола.
9. За якою формулою визначається передатне відношення планетарного механізму?
10. Як називається зубчасте колесо, що входить до складу планетарного механізму?
11. Що таке коригування зубчастих коліс.
12. Особливості косозубих циліндричних передач.
13. Просторові зубчасті передачі.
14. Кінематичний аналіз складних зубчастих передач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин: - Київ: Наукова думка, 2004. - 660с.
2. Кіницький Я. Т. Практикум з теорії механізмів і машин. – Львів: Афіша, 2004. – 452 с.
3. В.І. Мороз, О.В. Братченко, А.В. Павшенко Теорія механізмів і машин. Дослідження та проектування механізмів типових технічних засобів залізничного транспорту. *Навчальний посібник*. Харків 2013
4. Курсове проектування з теорії механізмів і машин: учбовий посібник. Є.І.Крижанівський, Б.Д.Малько, В.М.Сенчішал та ін. – Івано-Франківськ, 2000.-357 с.
5. Смірнов В.М., Пеевін Л.Є., Гаркавенко О.М. Механіка механізмів. Навчальний посібник. – К.: КНУБА, 2003. – 157 с.
6. В.В. Бурлаков, С.І. Кучеренко, Д.І. Мазоренко, Л.М. Тищенко Основи теорії механізмів та машин. Курс лекцій. Підручник. Харків, 2009.-340с.:іл.-161.
7. Теорія механізмів і машин. Курс лекцій для студентів спеціальності „Динаміка і міцність машин”/ О.П. Заховайко. – К.: НТУУ "КПІ", 2020. –243 с.
8. Теорія механізмів і машин: практикум для навчання в умовах інформаційно-освітнього середовища : навчальний посібник / Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко, О. А. Горбенко. – Миколаїв : МНАУ, 2019. – 168 с.
9. Я. Т. Кіницький, В. О. Харжевський, М. В. Марченко. Теорія механізмів і машин в системі Mathcad: Навчальний посібник. – Хмельницький: РВЦ ХНУ, 2014. – 324 с.
10. В. В. Рирогов, Г. Б. Філімоніхін, В. В. Невдаха. Теорія механізмів і машин: Навчальний посібник. – Кропивницький: Ц НТУ, 2017. – 88 с.

Для заміток

Для заміток

Навчально-методичне видання

ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

Навчальний посібник

Ярошевич Микола Павлович

Комп'ютерний набір та верстка: Віктор Мартинюк

Дизайн: Віктор Мартинюк

Редактор: Лариса Тиха

Підписано до друку . Формат 60х84/16

Папір офс. Гарн. Таймс. Ум. друк.арк. 13,5

Обл.-вид.арк. 12,0 .

Наклад 50 прим. Зам. 4172

Редакційно-видавничий відділ

Луцького національного технічного університету

43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75.

Друк-РВВ ЛНТУ